

SESSE DEL LAGO DI LUGANO

LILIANA MARCELLI

In questo lavoro si determinano le sesse del Lago di Lugano (Ceresio), con due metodi diversi: il metodo di Defant e il metodo di Hidaka, e si confrontano indi i risultati ottenuti.

La conferma sperimentale di tali risultati verrà fatta in un secondo tempo: qui è riportata soltanto la trattazione teorica.

Senza esporre dettagliatamente la teoria riguardante i metodi usati per la quale rimandiamo all'analogo lavoro di P. Caloi sul lago di Garda (1), ci limitiamo ad accennare succintamente le indicazioni essenziali, necessarie alla comprensione dei metodi usati.

Notizie geografiche e geologiche del Lago di Lugano.

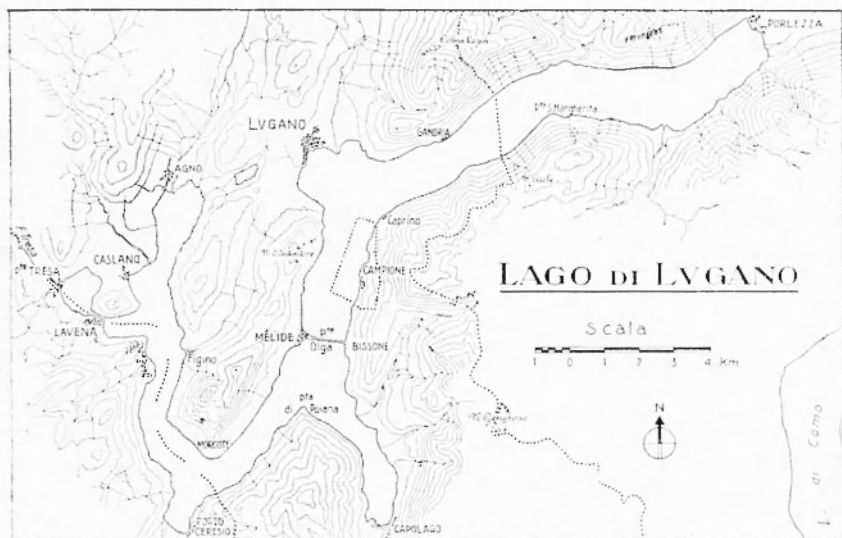
Secondo Manfredo Vanni (2), la posizione geografica del lago di Lugano è: $45^{\circ} 54'$ - $46^{\circ} 2'$ di latitudine N, e $8^{\circ} 52'$ - $9^{\circ} 7'$ longitudine E. Esso è uno dei grandi laghi della regione subalpina del versante italiano, che si estende in gran parte in territorio svizzero (Canton Ticino). All'Italia appartengono: la riva occidentale tra Porto Ceresio e Ponte Tresa, il bacino di NE, detto Ramo di Porlezza, e il piccolo territorio isolato di Campione d'Italia.

L'altitudine media delle acque è di 270 m sul livello del mare: la profondità massima, fra Gandria e Punta S. Margherita è di m 288; la profondità media si calcola di m 130; la superficie è di km^2 48,90, di cui km^2 30,86 appartenenti alla Svizzera e km^2 18,04 all'Italia; il volume delle acque è di km^3 6,56. La larghezza media si calcola di km 1,050; la massima, tra Lugano e Caprino, raggiunge i 3 km.

Il bacino imbrifero è di km^2 614,51. Le oscillazioni di livello (tra la massima magra e la massima piena) raggiungono m 3,18. Memorabile come una delle più ampie oscillazioni quella del 1896: in aprile una magra di 0,04 e in novembre una massima piena di +2,99. La temperatura media delle acque in superficie è di $14^{\circ},5$ (da un minimo di $5^{\circ},8$ ad un massimo di $23^{\circ},2$).

La forma del Lago di Lugano è molto complessa: vi si distin-

guono: un ramo orientale, da Porlezza alla Punta di Poiana, la quale lo divide in due rami minori, uno protendentesi fino a Capolago, l'altro fino a Porto Ceresio; un ramo occidentale, corrispondente alla continuazione della Valle del Vedeggio, diretto da N a S e formante, a sua volta, una piccola diramazione che, dopo essersi ristretta a Lavena, si apre nel bacino di Ponte Tresa dal quale bacino, per mezzo del fiume Tresa, le acque del Lago di Lugano si scaricano in



quelle del Verbano. Pochi sono gli affluenti del Lago di Lugano e non provenienti da ghiacciai, talché le piene di questo bacino dipendono dalle piogge primaverili e autunnali, irregolari ma fortissime, mentre mancano le piene estive.

Dal punto di vista idrologico (livello, regime, forma del fondo) il lago viene distinto dal *ponte-diga di Melide* e dalla stretta di Lavena, nei seguenti bacini contenitori: il bacino di Lugano (profondità m 288, superficie km² 27,47); il bacino di Morcote (profondità m 85, superficie km² 20,32); il bacino di Ponte Tresa (profondità m 59, superficie km² 1,11).

Il fondo del lago nel suo complesso, si presenta variamente costituito: il tratto Porlezza-Lugano è una grande valle a fondo piatto, scavata nei calcari e nelle dolomie, per la quale si incanalò un ramo del ghiacciaio abduano: una vasca a due rami divergenti si presenta

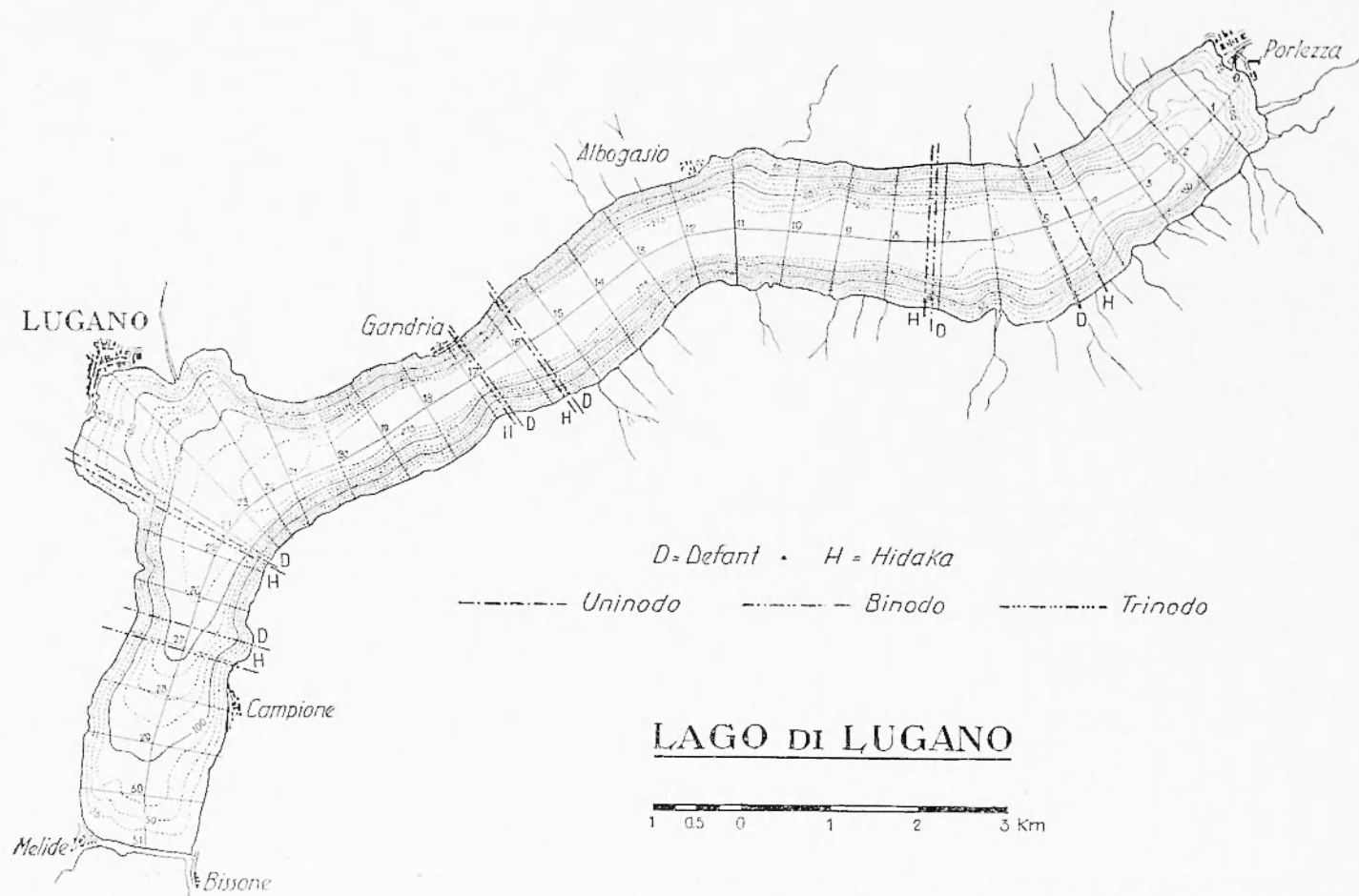


Fig. 1

subito sotto il ponte-diga scavata nei porfidi rossi e bruni, molto meno profonda, lungo cui si incanalò un ramo del ghiacciaio del Ticino; una terza valle accidentata, da Figino ad Agno, scavata in gran parte nei porfidi, per la quale pure si incanalò un ramo del ghiacciaio del Ticino, e il laghetto di Ponte Tresa per il quale pure deflù un altro ramo del detto ghiacciaio del Ticino.

L'origine del lago di Lugano è ancora controversa; ma indiscutibilmente il principale fattore morfologico dovette essere costituito dalla potente azione escavatrice dei ghiacciai.

Nel presente lavoro si studiano le sesse del lago di Lugano limitatamente alla porzione che va da Porlezza al ponte-diga di Melide (v. fig. 1), porzione che presenta una maggiore regolarità ed i cui movimenti possono ritenersi indipendenti da quelli della restante parte, a causa del ponte-diga che taglia il lago in due.

L'area di tale porzione risulta essere di m² 27'092'415.

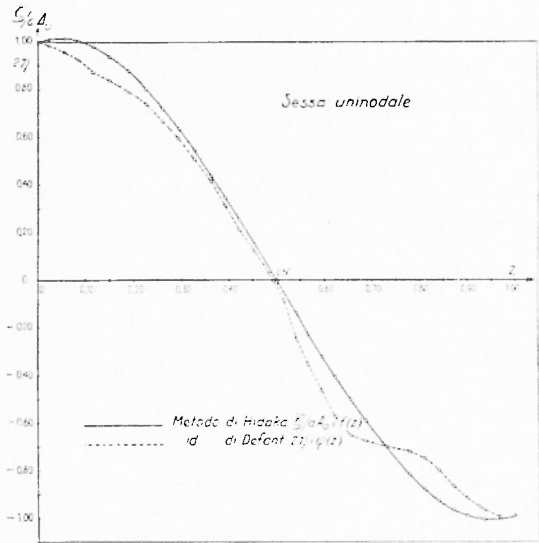


Fig. 2

Sesse uni-bi e trinodali con il metodo di Defant.

(I dati numerici usati sono stati rilevati da una carta geografica dell'Istituto Geografico Militare presa dall'Atlante dei Laghi Italiani del De Agostini con scala 1:50.000).

La formula di Merian

$$T = \frac{2l}{\sqrt{g h_0}} \quad [1]$$

dà in prima approssimazione il periodo della sessa uninodale: nella [1] l rappresenta la lunghezza del lago calcolata lungo la *linea di valle* (la linea cioè congiungente i punti di massima profondità):

per noi $l = m$ 17 205 (computata da Porlezza alla diga), h_0 indica la profondità media del lago ($h_0 = m$ 174,8). Preso per g il valore 9,81 m/sec² la [1] dà per T il valore

$$T = 13^m.85$$

È stato indi praticato un certo numero i di sezioni verticali (precisamente 31) normali alla linea di valle e di queste si sono determinate le larghezze $b(x)$ alla superficie del lago e le aree $S(x)$ (mediante un planimetro); si son calcolate inoltre le aree parziali $V(x)$ del lago comprese in superficie tra ogni sezione e la successiva e si è applicata poi la seconda delle 2 seguenti formule di Defant,

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \eta_i = \frac{4\pi^2}{gT^2} 2 \xi_i \Delta x \\ 2 \xi_i = -\frac{1}{S(x)} \int_0^x 2 \eta_i b(x) dx \end{array} \right. \quad (i = 0, 1, \dots, 31) \quad [2]$$

Nelle [2] il significato dei simboli, oltre quelli già visti, è il seguente: $2\eta_i$ rappresenta l'ampiezza del moto in senso verticale, e

ad esso si attribuisce inizialmente un valore arbitrario, p. es. $2\eta_0 = 100$; $2\xi_i$ rappresenta lo spostamento orizzontale, uguale per tutte le particelle di una stessa sezione verticale $S(x)$. [x è, ovviamente, l'ascissa computata lungo la linea di valle]. Δx è l'intervallo fra una sezione e la successiva: nel nostro caso il valore di Δx è quasi costantemente di 600 m ad eccezione delle sezioni 22, 23, 24, 25 le quali, capitando in uno slargamento del bacino (in corrispon-

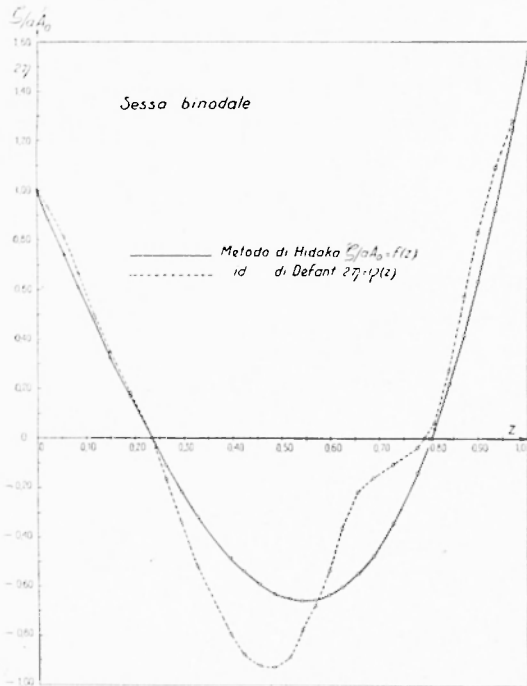


Fig. 3

denza del golfo di Lugano), sono state fatte più ravvicinate ($\Delta x = 500\text{m}$).

La Tabella I porta tutti i valori numerici di queste grandezze: x , $S(x)$, $b(x)$, $V(x)$, Δx e altri valori che occorreranno in seguito.

Se le sezioni trasversali sono abbastanza numerose, si può supporre che dall'estremità del lago (presa in corrispondenza di Porlezza, per cui $x=0$) fino alla prima sezione trasversale, l'entità dello spostamento verticale resti immutata: in tale ipotesi si può subito calcolare il valore della grandezza q .

TABELLA I

Sezioni	x_i	$S(x_i)$	$b(x_i)$	Δx_i	$V(x_i)$	$\sigma(V) =$ $= b(x_i)S(x_i)$	$V_n(x)$ <i>Area del lago compresa tra l'origine ed ogni sezione</i>	$Z =$ $\frac{V_n(x)}{a}$ <i>a = area totale del lago</i>
	m.	10^6 m^2	m	m	10^7 m^2	10^6 m^3	10^6 m^2	
0	0	0	0	0	0	—	0	0
1	580	14.7250	1370	580	6.66665	201.73250	6.66665	0.02161
2	1155	18.6157	1410	575	8.50000	268.08048	15.16665	0.05598
3	1730	24.3750	1400	575	8.03250	299.25000	23.19915	0.08563
4	2330	21.5062	1525	600	8.25000	373.72031	31.11915	0.11608
5	2930	33.2075	1695	600	9.41500	562.86712	40.86415	0.15083
6	3530	33.5750	1675	600	10.87500	562.38125	51.73915	0.19097
7	4105	35.0250	1675	575	10.00000	586.66875	61.73915	0.22788
8	4705	30.2542	1500	600	9.50000	453.81375	71.23915	0.26295
9	5305	32.5793	1525	600	8.75000	496.83356	79.98915	0.29525
10	5905	28.8700	1450	600	8.75000	418.61500	88.73915	0.32751
11	6530	31.6917	1185	625	10.00000	470.62249	98.73915	0.36445
12	7130	26.6375	1250	600	7.75000	332.96875	106.48915	0.39306
13	7730	29.5500	1100	600	7.66500	413.70000	114.15415	0.42135
14	8330	31.7750	1500	600	8.75000	476.62500	122.90415	0.45365
15	8930	33.0200	1525	600	8.25000	503.55500	131.15415	0.48410
16	9530	26.4375	1315	600	8.75000	347.65312	139.90415	0.51640
17	10130	17.9668	1000	600	6.62500	179.66750	146.52915	0.54985
18	10705	26.8575	1315	575	7.08250	353.17643	153.61165	0.56699
19	11305	25.4750	1300	600	7.87500	331.17500	161.48665	0.59606
20	11905	24.6075	1275	600	7.33250	313.74563	168.81915	0.62312
21	12505	32.2917	1695	600	8.50000	547.34516	177.31915	0.65150
22	12805	45.3125	2100	300	8.50000	1087.50000	185.81915	0.68587
23	13105	49.7300	2850	300	11.50000	1417.30500	197.31915	0.72832
24	13405	41.2138	2650	300	13.25000	1092.95938	210.56915	0.77723
25	13705	27.2575	1550	300	9.11750	422.19125	219.98665	0.81199
26	14205	21.9625	1390	500	7.81250	305.27875	227.79915	0.84092
27	14805	17.1825	1280	600	8.25000	219.93600	236.01915	0.87127
28	15405	17.1125	1500	600	8.00000	256.68750	244.01915	0.90080
29	15980	11.9562	1500	575	9.12500	179.34375	253.17415	0.93448
30	16580	8.6583	1450	600	9.37500	125.51462	262.51915	0.96909
31	17205	0	0	625	8.37500	—	270.92415	1.00000

TABELLA II

 $a = 5,70337 \cdot 10^{-8}$ T=14^m Periodo della sessa uninodale

Sezioni	Δq_i 10 ¹⁹ cm. ³	q_i 10 ¹⁹ cm. ³	$2\xi_i$ 10 ⁻¹ cm.	$\alpha(\Delta x)_i$ 10 ⁻¹ cm.	$2\eta_i$ cm.	$2\eta_i$ cm.
0	—	—	—	0	—	100.00
1	0	66.6665	— 4.527	33.07553	— 1.4976	98.50
2	83.7270	150.3935	— 8.078	32.79437	— 2.6493	95.85
3	76.9921	227.3856	—10.638	32.79437	— 3.1887	92.36
4	76.1981	303.5837	—12.388	31.22021	— 4.2392	88.12
5	82.9657	386.5191	—11.640	31.22021	— 3.9834	84.14
6	91.1986	478.0480	—11.238	31.22021	— 4.8723	79.27
7	79.2677	557.3157	—15.912	32.79437	— 5.2182	74.05
8	70.3192	627.6649	—20.746	34.22021	— 7.0994	66.95
9	58.5817	686.2466	—21.064	34.22021	— 7.2081	59.74
10	52.2711	738.5207	—25.581	31.22021	— 8.7539	50.99
11	50.9861	789.5068	—24.912	35.64605	— 8.8801	42.41
12	32.6320	822.1388	—30.864	34.22021	—10.5617	31.54
13	24.1787	846.3175	—28.640	34.22021	— 9.8007	21.74
14	19.0251	865.3429	—27.233	34.22021	— 9.3193	12.42
15	10.2495	875.5924	—26.517	31.22021	— 9.0742	3.35
16	2.9311	878.5235	—33.230	31.22021	—11.3714	— 8.02
17	— 5.3142	873.2093	—48.601	31.22021	—16.6315	—24.65
18	—17.4594	855.7199	—31.863	32.79437	—10.4491	—35.10
19	—27.6406	828.1093	—32.507	31.22021	—11.1239	—46.22
20	—33.8937	794.2156	—32.275	34.22021	—11.0447	—57.27
21	—48.6781	745.5372	—23.087	31.22021	— 7.9006	—65.17
22	—55.3950	690.1422	—15.231	17.11010	— 2.6060	—67.78
23	—77.9124	612.1998	—12.310	17.11010	— 2.1063	—69.88
24	—92.5911	519.6057	—12.598	17.11010	— 2.1556	—72.04
25	—67.8395	451.7662	—16.574	17.11010	— 2.8358	—74.87
26	—58.4936	393.2726	—17.507	28.51684	— 5.1064	—79.98
27	—65.9805	327.2921	—19.048	34.22021	— 6.5183	—86.49
28	—69.1954	258.0967	—15.082	31.22021	— 5.1612	—91.65
29	—83.6351	174.4613	—14.592	32.79437	— 4.7852	—96.41
30	—90.1127	84.0486	— 9.707	31.22021	— 3.3219	—99.76
31	—83.5506	0.1980	—	35.64605	—	—

$$q = \int_0^1 2\eta_0 b(x_1) dx = 2\eta_0 F(x_1)$$

giacché tutto ciò che compare in questa formula è noto: q rappresenta la quantità d'acqua (in cm³) che passando attraverso la sezione $S(x_1)$, provoca nella prima suddivisione del lago lo spostamento verticale assegnato di $2\eta_0$ cm. Si determina successivamente lo spostamento orizzontale $2\xi_1$ in base alla seconda delle [2], dividendo il valore trovato di q , per $S(x_1)$ e cambiando segno al quoziente:

$$2\xi_1 = -\frac{q}{S(x_1)}$$

e quindi ancora con la prima delle [2], si calcola $2 \Delta \eta_i$, che dà la variazione dell'ampiezza verticale dall'estremità del lago ($x=0$) alla prima sezione.

Si procede poi di sezione in sezione calcolando i volumi d'acqua q_i , transitanti attraverso le varie sezioni, e quindi gli spostamenti verticali $2 \eta_i$ da esse determinati nelle singole suddivisioni del lago.

Corrispondentemente all'ultima sezione la cui area è nulla [$S(l)=0$], anche q dovrà annullarsi.

Questo avverrebbe se il periodo calcolato con la formula di Merian ed usato nella prima delle [2] fosse esatto. Poiché questo praticamente è impossibile, si otterrà per q un valore diverso da zero. In questo caso il valore di T va opportunamente corretto, e precisamente: se si trova per q un valore positivo, il periodo va diminuito, se si trova invece un valore negativo, esso va aumentato. Si giungerà così, per successivi tentativi a quel valore di T che darà per l'ultimo q un valore nullo 0 , per lo meno, vicinissimo allo zero.

In modo del tutto analogo si procede per determinare il periodo della sessa binodale e della trinodale: va solo osservato che nel caso della binodale, per l'ultimo valore di q che si trovi positivo, il periodo va aumentato: se si trova invece negativo esso va diminuito.

Nel nostro caso, il periodo calcolato con la formula di Merian per la sessa uninodale, si è dovuto alzare un poco, avendo dato per q un valore negativo.

La tabella II riporta i calcoli relativi alla sessa uninodale. Per il calcolo pratico va notato che

$$\Delta q_i = 2 \eta_{i-1} V_i ; q_i = q_{i-1} + \Delta q_i ; 2 \xi_i = - \frac{q_i}{S_i} ;$$

$$2 \Delta \eta_i = \alpha \cdot (\Delta x) ; 2 \xi_i ; 2 \eta_i = 2 \eta_{i-1} + 2 \Delta \eta_i .$$

Si vede da questa tabella che il periodo è stato portato dal valore (calcolato con la formula di Merian)

$$T = 13^m, 85$$

al valore (calcolato con il metodo di Defant)

$$T_1 = 14^m, 00$$

La poca differenza tra i due valori (appena 15/100 di minuto), fa prevedere fin da ora l'eccezionale regolarità del lago, regolarità che troverà conferma nello sviluppo dello studio.

TABELLA III

 $\alpha = 2,60029 \cdot 10^{-7}$ $T = 6^m,56$ Periodo della sessa binodale

Sezioni	Δq_i 10^{10} cm. ³	q_i 10^{10} cm. ³	$\frac{2z_i}{\rho_i}$ 10^2 cm.	$\alpha(\Delta x)_i$ 10^{-4} cm.	$2\Delta \eta_i$ cm.	$2\eta_i$ cm.
0	—	—	—	0	—	100,00
1	0	66,6665	— 4,527	15,08166	— 6,8281	93,17
2	79,1961	115,8626	— 7,835	14,95165	—11,7117	81,45
3	65,4290	211,2916	— 9,885	»	—14,7797	66,67
4	55,0071	266,2987	—10,867	15,60172	—16,9537	49,72
5	46,8126	313,1113	— 9,429	»	—14,7110	35,01
6	38,0722	351,1835	—10,460	»	—16,3189	18,69
7	18,6911	369,8746	—10,560	14,95165	—15,7894	2,90
8	2,7556	372,6302	—12,317	15,60172	—19,2160	—16,32
9	—14,2765	358,3537	—10,999	»	—17,1610	—33,48
10	—29,2959	329,0578	—11,398	»	—17,7827	—51,26
11	—51,2627	277,7951	— 8,765	16,25179	—14,2456	—65,51
12	—50,7668	227,0283	— 8,523	15,60172	—13,2972	—78,80
13	—60,4026	166,6257	— 5,639	»	— 8,7971	—87,60
14	—76,6178	89,9779	— 2,832	»	— 4,4180	—92,02
15	—75,9148	14,0631	— 0,426	»	— 0,6645	—92,68
16	—81,0989	— 67,0358	2,536	»	3,9560	—88,73
17	—58,7823	—125,8181	7,603	»	10,9256	—77,80
18	—55,1035	—180,9216	6,736	14,95165	10,0720	—67,73
19	—53,3558	—234,2575	9,196	15,60172	14,3167	—53,38
20	—39,1418	—273,3993	11,110	»	17,3341	—36,05
21	—30,6390	—304,0383	9,415	»	14,6896	—21,36
22	—18,1530	—322,1913	7,110	7,80086	5,5467	—15,81
23	—18,1806	—340,3719	6,844	»	5,3392	—10,17
24	—13,8738	—354,2457	8,589	»	6,7002	— 3,77
25	— 3,5502	—357,7959	13,126	»	10,2398	6,47
26	5,0545	—352,7414	16,061	13,00143	20,8817	27,35
27	22,5652	—330,1762	19,216	15,60172	29,9800	57,33
28	45,8640	—284,3122	16,614	»	25,9212	83,25
29	75,9667	—208,3455	17,426	14,95165	26,0542	109,30
30	102,4727	—105,8728	12,228	15,60172	19,0777	128,88
31	107,5197	1,6469	—	16,25179	—	—

Nella Tabella III e nella Tabella IV sono riportati i calcoli relativi alla sessa binodale e trinodale rispettivamente: risulta

$$T_s = 6^m,56 \quad \text{per la binodale}$$

$$T_t = 5^m,04 \quad \text{» » trinodale}$$

Il valore di α che compare in tali tabelle ha il valore $\alpha = \frac{4\lambda^2}{gT^2}$ ed è quindi funzione del periodo della sessa: sarà pertanto

$$\alpha_1 = 5,70337 \cdot 10^{-8} \quad \text{per la uninodale}$$

$$\alpha_2 = 2,60029 \cdot 10^{-7} \quad \text{per la binodale}$$

$$\alpha_3 = 4,41241 \cdot 10^{-7} \quad \text{per la trinodale}$$

TABELLA IV

$a=4,41241 \cdot 10^{-7}$ $T=5^m,04$ Periodo della sessa trinodale

Sezioni	Δq_i 10 ¹⁰ cm. ³	q_i 10 ¹⁰ cm. ³	z_i^2 10 ² cm.	$\alpha(\Delta x)_i$ 10 ⁻⁴ cm.	$2\lambda q_i$ cm.	$2\eta_i$ cm.
0	—	—	—	—	—	100.00
1	0	66.6665	— 4.527	25.59199	—11.5866	33.41
2	75.1514	111.8179	— 7.618	25.37137	—19.3271	69.09
3	55.4931	197.3113	— 9.231	»	—23.4202	45.67
4	37.6744	231.9857	— 9.589	26.17417	—25.3859	20.23
5	19.0937	254.0794	— 7.651	»	—20.2563	0.02
6	0.0257	251.1051	— 7.568	»	—20.0366	— 20.01
7	— 20.0129	234.0922	— 6.683	25.37137	—16.9571	— 36.97
8	— 35.1215	198.9707	— 6.577	26.17417	—17.4113	— 51.38
9	— 47.5836	151.3871	— 4.647	»	—12.3020	— 66.68
10	— 58.3478	93.0393	— 3.223	»	— 8.5319	— 75.22
11	— 75.2151	17.8242	— 0.562	27.57758	— 1.5510	— 76.77
12	— 59.4937	— 41.6695	1.564	26.17417	4.1415	— 72.62
13	— 55.6668	— 97.3363	3.291	»	8.7206	— 63.90
14	— 55.9161	—153.2524	4.823	»	12.7688	— 51.14
15	— 42.1866	—195.4390	5.919	»	15.6697	— 35.17
16	— 31.0324	—226.1714	8.566	»	22.6488	— 12.79
17	— 8.4713	—231.9127	13.076	»	34.6191	— 21.83
18	15.4629	—219.1797	8.172	25.37137	20.7335	42.57
19	33.5208	—185.9589	7.300	26.17417	19.3255	61.39
20	45.3820	—110.5769	5.713	»	15.1212	77.02
21	65.4635	— 75.1131	2.326	»	6.1582	83.17
22	70.6979	— 4.1155	0.097	13.23724	0.1290	83.30
23	95.7981	91.3829	— 1.838	»	— 2.4325	80.87
24	107.1535	198.5364	— 4.811	»	— 6.3721	74.50
25	70.1590	268.6954	— 9.858	»	—13.0488	61.45
26	48.0076	316.7030	—14.420	22.06206	—31.3139	29.61
27	24.4495	341.1525	—19.855	26.17417	—52.5641	— 22.93
28	— 18.3427	322.8098	—18.864	»	—19.9114	— 72.87
29	— 66.4936	256.3162	— 21.138	25.37137	—51.3907	—127.26
30	—119.3067	137.0095	— 15.821	26.17417	—41.8936	—169.15
31	—141.6665	— 4.657	—	27.57758	—	—

I diagrammi tratteggiati delle figure 2-3-4 danno l'andamento delle ampiezze degli spostamenti verticali, secondo quanto risulta dai calcoli eseguiti adottando il metodo di Defant. In ordinate sono riportati i valori delle ultime colonne delle 3 tabelle ($2\eta_i$) e in ascisse i valori di $z_i = \frac{V(\lambda_i)}{a}$ (a =area totale del bacino= m^2 27.092.415) relativi alle singole sezioni.

Come risulta dalle tabelle, e da semplici calcoli di interpolazione i nodi hanno le seguenti posizioni:

	Uninodo: distanza da Porlezza m	9106,78	alla sez.	15,48
{	I° Binodo: » » » »	4195,54	» »	7,15
	II° Binodo: » » » »	13515,40	» »	24,37
{	I° Trinodo: » » » »	2930,71	» »	5,00
	II° Trinodo: » » » »	9751,61	» »	16,37
{	III° Trinodo: » » » »	14543,28	» »	26,56

Sesse uni-bi e trinodali con il metodo di Hidaka.

Volendo trattare lo stesso problema con il metodo di Hidaka, dobbiamo rifarci un momento ad alcuni richiami teorici, in parte già noti (1).

Si sa che lo studio delle sesse si può ricondurre alla soluzione delle due seguenti equazioni, le quali si deducono dalla ipotesi che il bacino in esame sia un canale finito di profondità lentamente variabile:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \zeta = -\frac{1}{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} [S(x) \xi] \end{array} \right. \quad [3]$$

dove qui indichiamo con ξ e ζ gli spostamenti rispettivamente orizzontale e verticale di una particella d'acqua appartenente ad una determinata sezione verticale $S(x)$: x e $b(x)$, hanno lo stesso significato già visto nel metodo di Defant.

Con opportune sostituzioni, il Chrystal trasforma le due equazioni nelle due seguenti

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g \sigma(V) \frac{\partial^2 u}{\partial V^2} \\ \zeta = -\frac{\partial u}{\partial V} \end{array} \right. \quad [4]$$

dove u vale

$$u = \xi \cdot S(x)$$

e rappresenta il volume dell'acqua che transita attraverso la sezione retta $S(x)$ in corrispondenza dello spostamento ξ . La II delle [4] mostra in che maniera u sia legata all'ampiezza ζ della sessa. I valori di $V_n(x)$ (area superficiale compresa tra l'origine delle ascisse e una generica sezione n) variano entro i limiti 0 (all'origine del lago) ed a (area totale del bacino).

Vale cioè per $V(x)$ l'espressione

$$V(x) = \int_0^x b(x) dx \quad (i=1,2...31) \quad [5]$$

con $0 \leq V(x) \leq a$

$\sigma(V)$ rappresenta il prodotto dell'area di una generica sezione retta $S(x)$ per la sua corrispondente larghezza in superficie $b(x)$

$$\sigma(V) = S(x) b(x)$$

Questa funzione ovviamente si annulla alle due estremità del lago

$$\sigma(0) = \sigma(a) = 0$$

Se u si esprime mediante uno sviluppo in serie di funzioni sinusoidali

$$u = \sum_i u_i \text{sen} \frac{2\pi}{T_i} (t-t_i)$$

l'equazione di Chrystal diviene

$$\sigma(V) \frac{d^2 u}{dV^2} + \frac{4\pi^2}{gT^2} u = 0 \quad [6]$$

sogetta alle condizioni ai limiti

$$u(0) = u(a) = 0 \quad [7]$$

La curva che rappresenta la relazione tra $\sigma(V)$ e V vien chiamata da Chrystal *curva normale*. Essa è importante per il fatto che semplifica la soluzione della [6] qualora sia di forma semplice o suddivisibile in tratti di curve semplici. Questo caso, trattato frequentemente da Chrystal, permetterebbe di ricondurre lo studio delle sesse di un bacino di forma qualsiasi a quello delle sesse di un

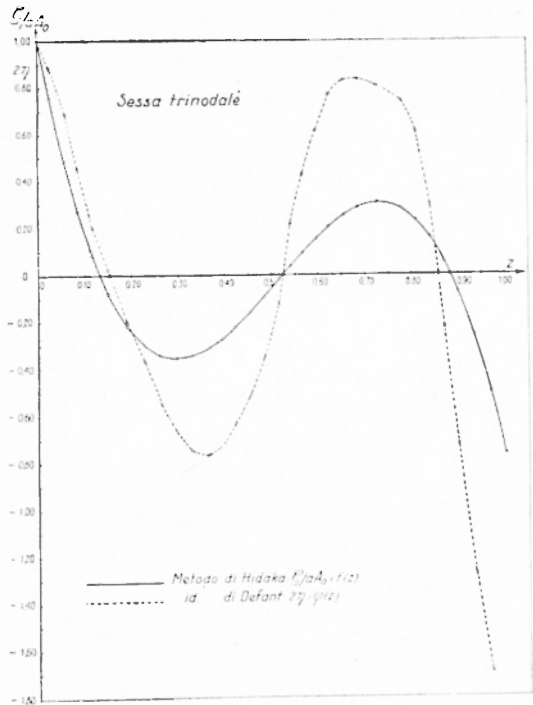


Fig. 4

canale rettangolare a profondità lentamente variabile.

Nel nostro caso, per quanto la regolarità del fondo di quella parte del lago di Lugano che abbiamo studiato, sia piuttosto eccezionale, purtuttavia la curva normale è ben lungi dall'essere rappresentativa di una funzione analitica semplice (come si vede dalla fig. 5 costruita con i valori presi dalla Tabella I).

Si è pertanto seguito anche qui il metodo di Hidaka, basato sul calcolo delle variazioni di Ritz.

Anzitutto l'equazione di Chry-stal può essere ulteriormente modificata ponendo $z = \frac{V}{a}$ ed esprimendo σ in funzione di z con la posizione

$$\sigma(z) = h \gamma(z)$$

dove h è una costante che ha le dimensioni di un volume, mentre $\gamma(z)$ è una funzione di dimensioni nulle. Con queste posizioni le [6] e [7] divengono rispettivamente

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{\lambda}{\gamma(z)} u = 0 \quad \text{con} \quad \lambda = \frac{4\pi^2 a^2}{ghT^2} \quad [6']$$

$$u(0) = u(1) = 0 \quad [7']$$

La [6'] con le condizioni imposte si risolve solo per determinati valori di λ .

Risolverla significa trovare il valore di minimo dell'integrale

$$I(u) = \int_0^1 \left\{ \left(\frac{du}{dz} \right)^2 - \frac{\lambda}{\gamma(z)} u^2 \right\} dz \quad [8]$$

A tal fine supponiamo di avere $m+1$ funzioni

$$\Psi(z), \quad \Psi_1(z), \quad \Psi_2(z), \dots, \Psi_m(z)$$

soddisfacenti le stesse condizioni ai limiti di u , e cioè

$$\Psi_i(0) = 0, \quad \Psi_i(1) = 0 \quad (i=0, 1, 2, \dots, m)$$

e supponiamo che u sia esprimibile mediante la serie finita

$$u = \sum_0^m A_i \Psi_i(z) \quad [9]$$

Le A_i rappresentano $m+1$ costanti che vanno determinate in modo da rendere minimo l'integrale [8], in modo cioè che valgano le $(m+1)$ equazioni

$$\frac{\partial I}{\partial A_0} = 0 \quad , \quad \frac{\partial I}{\partial A_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial I}{\partial A_2} = 0 \quad \dots \quad \frac{\partial I}{\partial A_m} = 0 \quad [10]$$

I valori espliciti delle $\Psi_i(z)$ sono dati da Hidaka nella forma

$$\Psi_i(z) = z(1-z)z^i \quad [11]$$

con che le condizioni ai limiti sono soddisfatte e la [9] diventa

$$u = \sum_0^m z(1-z)z^i A_i \quad [12]$$

Derivando questa espressione rispetto a z e sostituendola insieme con u nella [8] si può procedere alla determinazione delle $(m+1)$ equazioni del sistema [10]. Si avranno così le $(m+1)$ equazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{3} - I_0\lambda \right) A_0 + \left(\frac{1}{6} - I_1\lambda \right) A_1 + \left(\frac{1}{10} - I_2\lambda \right) A_2 + \dots = 0 \\ \left(\frac{1}{6} - I_1\lambda \right) A_0 + \left(\frac{2}{15} - I_2\lambda \right) A_1 + \left(\frac{1}{10} - I_3\lambda \right) A_2 + \dots = 0 \\ \left(\frac{1}{10} - I_2\lambda \right) A_0 + \left(\frac{1}{10} - I_3\lambda \right) A_1 + \left(\frac{3}{35} - I_4\lambda \right) A_2 + \dots = 0 \\ \dots \dots \dots \end{array} \right. \quad [13]$$

Eliminando le costanti A_i fra queste equazioni, si ha un'equazione di grado $(m+1)$ in λ , la cui soluzione dà, per mezzo della seconda delle [6] il periodo della sessa cercato.

$$\left| \begin{array}{ccc} \left(\frac{1}{3} - I_0\lambda \right) & \left(\frac{1}{6} - I_1\lambda \right) & \left(\frac{1}{10} - I_2\lambda \right) \dots \\ \left(\frac{1}{6} - I_1\lambda \right) & \left(\frac{2}{15} - I_2\lambda \right) & \left(\frac{1}{10} - I_3\lambda \right) \dots \\ \left(\frac{1}{10} - I_2\lambda \right) & \left(\frac{1}{10} - I_3\lambda \right) & \left(\frac{3}{35} - I_4\lambda \right) \dots \\ \dots \dots \dots \end{array} \right| = 0 \quad [14]$$

essendo

$$I_n = \int_0^1 \frac{z^n(1-z)^2}{\gamma(z)} z^n dz \quad [15]$$

TABELLA V

S. zioni	z	z^2	$(1-z)$	$(1-z)^2$	$z^2(1-z)^2$	$\frac{z^2(1-z)^2}{10^{-5}}$	dz	$\frac{I_0 = z^2(1-z)^2}{\sigma(z)}$	$I_1 = I_0 z$	$I_2 = I_0 z^2$	$I_3 = I_0 z^3$	$I_4 = I_0 z^4$
						10^{-5}		10^{-2}				
0	0,00000	0,00000	1,00000	1,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1	0,02461	0,00061	0,97539	0,95139	0,00058	2,85774	0,02461	7,03291	0,17308	0,00426	0,00010	0,000003
2	0,05598	0,00313	0,94402	0,89117	0,00279	10,41829	0,03137	32,68217	1,82955	0,10242	0,00573	0,000321
3	0,08563	0,00733	0,91437	0,83607	0,00613	20,48622	0,02965	60,74163	5,20131	0,44539	0,03814	0,003266
4	0,11608	0,01347	0,88392	0,78131	0,01053	28,17080	0,03045	85,78008	9,95735	1,15585	0,13417	0,015575
5	0,15083	0,02275	0,84917	0,72109	0,01640	29,14507	0,03475	101,27911	15,27593	2,30407	0,34752	0,052417
6	0,19097	0,03647	0,80903	0,65453	0,02387	42,44516	0,04014	170,37489	32,53649	6,21349	1,18659	0,226603
7	0,22788	0,05193	0,77212	0,59617	0,03096	52,76994	0,03691	194,77385	44,38507	10,11447	2,30489	0,525237
8	0,26295	0,06914	0,73705	0,54324	0,03756	82,76830	0,03507	290,26872	76,32616	20,06996	5,27740	1,387691
9	0,29525	0,08717	0,70475	0,49667	0,04330	87,14435	0,03230	281,47626	83,10586	24,53701	7,24455	2,138954
10	0,32754	0,10728	0,67246	0,45220	0,04851	115,89028	0,03229	374,20971	122,56865	40,14614	13,14946	4,306976
11	0,36145	0,13282	0,63555	0,40392	0,05365	113,99960	0,03691	420,77252	153,35055	55,88861	20,36860	7,423337
12	0,39306	0,15450	0,60694	0,36838	0,05691	170,92488	0,02861	489,01608	192,21266	75,55111	29,69612	11,672356
13	0,42135	0,17754	0,57865	0,33484	0,05945	143,69208	0,02829	406,50489	171,28083	72,16918	30,40848	12,812615
14	0,45365	0,20580	0,54635	0,29850	0,06143	128,88614	0,03230	416,30224	188,85551	85,67430	38,86615	17,631628
15	0,48410	0,23435	0,51590	0,26615	0,06237	123,86673	0,03045	377,17418	182,59002	88,39183	42,79048	20,714873
16	0,51640	0,26667	0,48360	0,23387	0,06237	179,39031	0,03230	579,43070	299,21801	154,51618	79,79216	41,204670
17	0,54085	0,29252	0,45915	0,21082	0,06167	343,23671	0,02445	839,21376	453,88876	245,48574	132,77096	71,809174
18	0,56699	0,32148	0,43301	0,18750	0,06028	170,66944	0,02614	446,12992	252,95121	143,42080	81,31816	46,106358
19	0,59606	0,35529	0,40394	0,16317	0,05797	175,04757	0,02907	508,86329	303,31305	180,79278	107,76334	64,233418
20	0,62312	0,38828	0,37688	0,14204	0,05515	175,78097	0,02706	475,66329	296,39531	184,68985	115,08394	71,711103
21	0,65450	0,42837	0,34550	0,11937	0,05113	93,42301	0,03138	293,16141	191,87414	125,58163	83,19317	53,795133
22	0,68587	0,47042	0,31413	0,09868	0,04642	42,68482	0,03137	133,90229	91,83957	62,99000	43,20295	29,631609
23	0,72832	0,53045	0,27168	0,07381	0,03915	27,62463	0,04245	117,26655	85,40758	62,20405	45,30445	32,996138
24	0,77723	0,60409	0,22277	0,04963	0,02998	27,42888	0,04891	134,15468	104,26904	81,04102	62,98752	48,955787
25	0,81199	0,65933	0,18801	0,03535	0,02331	55,16272	0,03476	193,36025	157,00659	127,48778	103,51880	84,056233
26	0,84082	0,70698	0,15918	0,02534	0,01791	58,67919	0,02883	169,17297	142,24401	119,60161	100,56343	84,555741
27	0,87127	0,75911	0,12873	0,01657	0,01258	57,19637	0,03045	174,16296	151,74296	132,20909	115,18981	100,361129
28	0,90080	0,81144	0,09920	0,00984	0,00799	31,10825	0,02953	91,86266	82,74988	74,54110	67,14662	60,485674
29	0,93418	0,87325	0,06552	0,00429	0,00375	20,90266	0,03368	70,40017	65,78755	61,47715	57,44917	53,685097
30	0,96909	0,93913	0,03091	0,00096	0,00090	7,14707	0,03461	24,73600	23,97141	23,23046	22,51240	21,816544
31	1,00000	1,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,03091	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
								$I_0 =$	$I_1 =$	$I_2 =$	$I_3 =$	$I_4 =$
								79,59870	39,82308	22,62037	14,08615	9,44316

Se $\gamma(z)$ fosse nota, cioè se $\sigma(z) = \sigma\left(\frac{V}{a}\right)$ fosse una funzione semplice di z , l'integrale [15] si potrebbe calcolare numericamente. Si è già visto invece che la curva normale del nostro lago ha un andamento irregolare. Il calcolo dei vari I si è quindi dovuto fare con integrazione numerica: ci siamo limitati a fare $m=2$ perciò solo tre delle [13] si son calcolate. La tabella V riporta i calcoli necessari per l'integrazione della [15], calcolati di sezione in sezione, avendo posto

$$\gamma(z) = \sigma(z) \quad \text{cioè} \quad h=1$$

Si son trovati così i seguenti valori:

$$\left\{ \begin{array}{lll} I_0 = 79,59870 & I_1 = 39,82308 & I_2 = 22,62037 \\ & I_3 = 14,08615 & I_4 = 9,44316 \end{array} \right. \quad [16]$$

Risolta la [14] sempre nel caso $m=2$, si ha la seguente equazione cubica in λ :

$$\begin{aligned} & (I_0 I_3 I_4 - I_0 I_3^2 - I_1 I_2 + 2 I_1 I_2 I_3 - I_2^3) \lambda^3 - \left[\frac{3}{35} (I_0 I_2 - I_1^2) + \frac{1}{5} (-I_0 I_3 + \right. \\ & \left. + I_1 I_2 + I_1 I_3) + \frac{2}{15} I_0 I_4 + \frac{1}{3} (-I_1 I_4 - I_2^2 + I_2 I_3 + I_2 I_4 - I_3^2) \right] \lambda^2 + \\ & \left. + \left[\frac{1}{700} I_0 - \frac{3}{350} I_1 + \frac{53}{2100} I_2 - \frac{1}{30} I_3 + \frac{1}{60} I_4 \right] \lambda - \frac{1}{10500} = 0 \end{aligned} \quad [17]$$

A calcoli fatti, tenuto conto dei valori calcolati per le I la [17] si può scrivere

$$f(\lambda) = 36,812901 \lambda^3 - 2,0896746 \lambda^2 + 0,0311145 \lambda - 0,0000952381 = 0 \quad [18]$$

Questa equazione si risolve con il metodo di Newton, delle successive approssimazioni: come primo valore approssimato di λ si prende quello che si ottiene ponendo nella formula

$$\lambda = \frac{4 \pi^2 a^2}{g T^2}$$

il valore del periodo dell'unimodale trovato con il metodo di Defant, e cioè

$$T = 11^m = 840^s$$

con che si ha $\lambda = 0,004187547$. Partendo da questo valore si giunge, con successive correzioni, ad avere (con correzione $0,10^{-12}$) per λ il valore

$$\lambda_1 = 0,004116,371,551$$

cui corrisponde un periodo

$$T_1 = 14^m, 12$$

valore in ottimo accordo con quello $T = 14^m$ trovato con il metodo precedente

Conosciuta così una radice, la [18] si può ridurre (p. es. con la regola di Ruffini) ad un'equazione di 2° grado

$$36,812901 \lambda^2 - 1,938139 \lambda + 0,023136 = 0$$

le cui soluzioni ci danno gli altri due valori di λ

$$\lambda_2 = 0,018,294,498 ; \lambda_3 = 0,034,353,866$$

in corrispondenza dei quali si calcolano gli altri due periodi

$$T_2 = 6^m, 70 \quad T_3 = 4^m, 89$$

per la binodale e la trinodale rispettivamente.

Se si ricorda che con il metodo di Defant si erano trovati i valori

$$(T_2)_D = 6^m, 56 \quad (T_3)_D = 5^m, 04$$

si vede come la differenza tra i risultati conseguiti con i due metodi sia appena dell'ordine del decimo di minuto.

Linee nodali.

Per determinare i nodi vale la relazione

$$\frac{du}{dz} = 0$$

che si deduce dalla seconda delle [4]. Siccome u è dato dalla [12]

$$u = \sum_0^m z(1-z)^z A_i \quad [12]$$

se ci limitiamo al caso $m=2$ ed esplicitiamo la [12] avremo

$$u = z(1-z) \left(1 + \frac{A_1}{A_0} z + \frac{A_2}{A_0} z^2 \right) \cdot A_0 ; \quad [19]$$

annullandone la derivata rispetto a z , avremo l'equazione dei nodi

$$\frac{du}{dz} = 4 \frac{A_2}{A_0} z^3 + 3 \left(\frac{A_1}{A_0} - \frac{A_2}{A_0} \right) z^2 + 2 \left(1 - \frac{A_1}{A_0} \right) z - 1 = 0 \quad [20]$$

Per risolvere questa equazione cubica, è necessario conoscere i rap-

porti $\frac{A_2}{A_0}$, $\frac{A_1}{A_0}$, e questi ci vengono dati dalla soluzione di due delle equazioni tratte dalle [13], per esempio risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{3} - I_0 \lambda + \left(\frac{1}{6} - I_1 \lambda\right) \frac{A_1}{A_0} + \left(\frac{1}{10} - I_2 \lambda\right) \frac{A_2}{A_0} = 0 \\ \frac{1}{10} - I_2 \lambda + \left(\frac{1}{10} + I_3 \lambda\right) \frac{A_1}{A_0} + \left(\frac{3}{35} - I_4 \lambda\right) \frac{A_2}{A_0} = 0 \end{cases} \quad [21]$$

usando per I_0, \dots, I_4 i valori [16] già calcolati precedentemente, e per λ successivamente i tre valori trovati per la uni-bi e trinodale.

Sarà dunque, per il λ corrispondente alla uni-nodale.

$$\frac{A_1}{A_0} = +1,356.946.551 \quad ; \quad \frac{A_2}{A_0} = -1,364.135.939$$

e la [20] diviene

$$f(z) = -5.456.543.758 z^3 + 8.163.247.472 z^2 - 0.713.893.103 z - 1 = 0 \quad [22]$$

È evidente che delle tre radici della [22] quelle che soddisfano il nostro problema sono soltanto quelle per cui $z = \frac{V}{a}$ risulta compreso tra 0 e 1.

$$0 < z < 1$$

Nel caso della [22] che è l'equazione relativa alla sessa uninode, sarà dunque uno solo il valore di z da prendere in considerazione. Anche qui la [22] si risolve col metodo di Newton, prendendo come primo valore approssimato di z , quello corrispondente alla i^{ma} sezione in cui si annulla il valore dell'ampiezza $2\eta_i$ calcolato con il metodo di Defant, e precisamente, $\frac{1}{2}$ poiché $2\eta_i$ si annulla tra la 15^a e la 16^a sezione (v. tabella II) [$2\eta_{15} = +3.35$, $2\eta_{16} = -8.02$] in corrispondenza delle quali i valori di z sono rispettivamente $z_{15} = 0.48410$, $z_{16} = 0.51640$ (v. tabella I) con una semplice interpolazione $\frac{1}{2}$

$$z = 0.49400$$

Con successive approssimazioni si è trovato per z il valore più attendibile

$$z_1 = 0.49946159$$

Anche con questo procedimento si trova che l'uminodo è compreso

tra la 15ª e la 16ª sezione, e precisamente alla sezione 15,4757, il che comporta una distanza dall'estremo del lago (Porlezza) di

$$x_1 = m. 9215,45$$

mentre con il metodo di Defant il nodo si trova alla distanza di m. 9106,78. Procedendo nella stessa maniera per la ricerca dei nodi delle sesse bi-nodali e tri-nodali, si ha, tenendo conto dei diversi valori di λ_2

$$f(z) = -5,115.411.592 z^3 - 0,015.916.173 z^2 + 4,568.331.578 z - 1 = 0 \quad [23]$$

per la binodale, e

$$f(z) = 16,161.696.204 z^3 - 24,948.573.498 z^2 + 10,551.534.230 z - 1 = 0 \quad [24]$$

per la trinodale.

I due valori di z vevoli per la binodale sono

$$z_1 = 0,233.308,522 \quad z_2 = 0,804,753,835$$

sicché i 2 nodi si trovano alle distanze dall'origine rispettivamente di

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = m 4197,88 \quad \text{tra la } 7^{\text{a}} \text{ e l' } 8^{\text{a}} \text{ sezione (sez. 7,15)} \\ x_2 = m 13642,54 \quad \text{tra la } 24^{\text{a}} \text{ e la } 25^{\text{a}} \text{ sezione (sez. 24,79)} \quad [25] \end{array} \right.$$

Con il metodo di Defant le due distanze sono invece

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = m 4195,54 \quad \text{tra la } 7^{\text{a}} \text{ e l' } 8^{\text{a}} \text{ sezione, con soli m 2,34 di} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{differenza con il 1 binodo (25) (sez. 7,15)} \\ x_2 = m 13.515,40 \quad \text{tra la } 24^{\text{a}} \text{ e la } 25^{\text{a}} \text{ sezione (sez. 24,37)} \end{array} \right.$$

Risolviendo la [24] per la trinodale, si hanno i seguenti valori di z , tutti soddisfacenti il problema

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = 0,132.987,148 \\ z_2 = 0,525.768,670 \\ z_3 = 0,884.929,522 \end{array} \right.$$

Corrispondentemente i tre nodi si trovano alle seguenti distanze dall'origine del lago

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = m 2.621,90 \quad \text{tra la } 4^{\text{a}} \text{ e la } 5^{\text{a}} \text{ sezione (sez. 4,19)} \\ x_2 = m 9.759,92 \quad \text{» } 16^{\text{a}} \text{ e la } 17^{\text{a}} \quad \text{»} \quad (\text{» } 16,36) \\ x_3 = m 13.515,40 \quad \text{» } 27^{\text{a}} \text{ e la } 28^{\text{a}} \quad \text{»} \quad (\text{» } 27,46) \end{array} \right.$$

[27]

La seguente Tabella VI riassume e confronta i risultati ottenuti con i due metodi.

TABELLA VI

	METODO		Differenza (Hid.)-(Def.)
	DEFANT	HIDAKA	
Periodo della sessa unimodale	$T_1 = 14^m. 00$	$T_1 = 14^m. 12$	$+ 0^m. 12$
» » » binodale	$T_2 = 6^m. 56$	$T_2 = 6^m. 70$	$+ 0^m. 14$
» » » trinodale	$T_3 = 5^m. 04$	$T_3 = 4^m. 89$	$- 0^m. 15$
Distanza dell'uninodo da Porlezza	$x_1^* = m. 9106.78$	$x_1^* = m. 9215.45$	$+ m. 108.67$
» del I binodo » »	$x_1^{**} = » 4195.54$	$x_1^{**} = » 4197.88$	$+ » 2.34$
» del II » » »	$x_2^{**} = » 13515.40$	$x_2^{**} = » 13642.54$	$+ » 127.14$
» del I trinodo » »	$x_1^{***} = » 2930.71$	$x_1^{***} = » 2621.90$	$- m. 308.81$
» del II » » »	$x_2^{***} = » 9751.61$	$x_2^{***} = » 9759.92$	$+ » 8.31$
» del III » » »	$x_3^{***} = » 14513.28$	$x_3^{***} = » 15082.56$	$+ » 569.28$

Si vede ancora una volta come l'accordo sia addirittura eccezionale, raggiungendo in specie per il primo binodo ed il secondo trinodo praticamente una coincidenza quasi assoluta.

Distribuzione delle ampiezze degli spostamenti verticali.

Le ampiezze degli spostamenti verticali, sono date dall'equazione (la seconda della [4])

$$\zeta = - \frac{du}{dV} = - a \frac{du}{dz}$$

Cioè tenendo presente l'espressione di $\frac{du}{dz}$ che si ottiene derivando la [12]

$$\frac{du}{dz} = \sum_0^m \left[(i+1)z^i - (i+2)z^{(i+1)} \right] \cdot A_i$$

l'ampiezza assume l'espressione

$$\zeta = - a \sum_0^m \left[(i+1)z^i - (i+2)z^{(i+1)} \right] \cdot A_i$$

e questa, per $m=2$ diviene

$$\frac{\zeta}{a A_0} = - \left[4 \frac{A_2}{A_0} z^2 + 3 \left(\frac{A_1}{A_0} - \frac{A_2}{A_0} \right) z^2 + 2 \left(1 - \frac{A_1}{A_0} \right) z - 1 \right] \quad [28]$$

Il secondo membro di questa eguaglianza è, a parte il segno, l'equazione cubica [20] (già adoperata per trovare i nodi), i cui coefficienti sono

TABELLA VII

Sezioni	z	z^2	z^3	ζ/aA_0		
				VNI -	BI -	TRI -
				N O D A L E		
0	0	0	0	+ 1.0000	+ 1.0000	+ 1.0000
1	0.02161	0.000606	0.000015	+ 1.0127	+ 0.8877	+ 0.7552
2	0.05598	0.003134	0.000175	+ 1.0153	+ 0.7152	+ 0.4847
3	0.08563	0.007332	0.000628	+ 1.0017	+ 0.6121	+ 0.2693
4	0.11608	0.013475	0.001551	+ 0.9814	+ 0.4779	+ 0.0861
5	0.15083	0.022750	0.003131	+ 0.9107	+ 0.3289	- 0.0794
6	0.19097	0.036469	0.006965	+ 0.8766	+ 0.1638	- 0.2177
7	0.22738	0.051929	0.011834	+ 0.8033	+ 0.0203	- 0.3002
8	0.26295	0.069113	0.018181	+ 0.7225	- 0.1071	- 0.3133
9	0.29525	0.087173	0.025738	+ 0.6395	- 0.2158	- 0.3565
10	0.32754	0.107282	0.035139	+ 0.5498	- 0.3119	- 0.3474
11	0.36115	0.132821	0.048108	+ 0.4400	- 0.4152	- 0.3111
12	0.39306	0.154196	0.060726	+ 0.3508	- 0.4825	- 0.2711
13	0.42135	0.177536	0.074805	+ 0.2597	- 0.5394	- 0.2256
14	0.45365	0.205798	0.093360	+ 0.1533	- 0.5916	- 0.1612
15	0.48110	0.231353	0.113150	+ 0.0516	- 0.6271	- 0.0948
16	0.51610	0.266669	0.137708	- 0.0538	- 0.6501	- 0.0211
17	0.54885	0.292519	0.158209	- 0.1385	- 0.6568	+ 0.0312
18	0.56699	0.321478	0.182275	- 0.2249	- 0.6527	+ 0.0919
19	0.59606	0.355288	0.211773	- 0.3192	- 0.6340	+ 0.1520
20	0.62312	0.388278	0.241914	- 0.4046	- 0.6028	+ 0.2019
21	0.65150	0.428370	0.289368	- 0.4998	- 0.5489	+ 0.2500
22	0.68587	0.470118	0.322646	- 0.5900	- 0.4753	+ 0.2848
23	0.72832	0.530450	0.385337	- 0.7022	- 0.3425	+ 0.3052
24	0.77723	0.604086	0.469511	- 0.8145	- 0.1393	+ 0.2820
25	0.81199	0.659328	0.535358	- 0.8813	+ 0.0397	+ 0.2291
26	0.84082	0.705978	0.594411	- 0.9271	+ 0.2109	+ 0.1590
27	0.87127	0.759111	0.661391	- 0.9659	+ 0.4151	+ 0.0553
28	0.90080	0.811441	0.730946	- 0.9925	+ 0.6369	- 0.0739
29	0.93118	0.873253	0.816037	- 1.0087	+ 0.9193	- 0.2623
30	0.96909	0.939135	0.910106	- 1.0085	+ 1.2131	- 0.5042
31	1.00000	1.000000	1.000000	- 0.9928	+ 1.5630	- 0.7647

funzioni delle λ relative rispettivamente alla uni-bi- e trinodale; sicché si debbono calcolare i valori dei rapporti ζ/aA_0 per i successivi z delle successive sezioni, e tutto questo per determinare una volta le ampiezze (o i rapporti ζ/aA_0) per

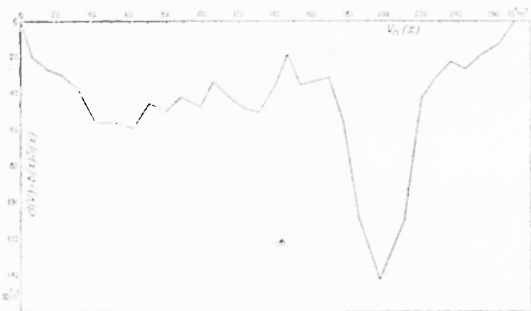


Fig. 5

la uninodeale, una volta quelle per la binodale, e una volta quelle per la trinodale. La [26] per il nostro caso sarà:

$$\frac{\zeta}{a A_0} = - \left[-5,156 \cdot 513 \cdot 758 z^3 + 3,163 \cdot 217 \cdot 172 z^2 - 0,713 \cdot 893 \cdot 103 z - 1 \right]$$

per la uninodeale

$$\frac{\zeta}{a A_0} = - \left[-5,115 \cdot 411 \cdot 592 z^3 - 0,015 \cdot 916 \cdot 173 z^2 + 4,568 \cdot 331 \cdot 578 z - 1 \right]$$

per la binodale

$$\frac{\zeta}{a A_0} = - \left[16,161 \cdot 696 \cdot 204 z^3 - 21,948 \cdot 573 \cdot 198 z^2 + 10,551 \cdot 534 \cdot 230 z - 1 \right]$$

per la trinodale

I risultati dei calcoli sono riportati nella Tabella VII e l'andamento delle stesse ampiezze si vede ancora più chiaramente nelle figure n. 2, 3, 4, dove le linee continue rappresentano precisamente le ampiezze riportate in funzione di z . Dalle stesse figure risulta, per confronto, la differenza tra i risultati ottenuti con i 2 metodi.

Poiché l'accordo è, in linea generale, piuttosto buono, e in certi casi, come già si è fatto notare, (periodi e nodi) più che soddisfacente, è da presumere che questi risultati rispondano a realtà.

Roma — Istituto Nazionale di Geofisica — febbraio 1948.

RIASSUNTO

In questo lavoro sono state determinate le sesse del lago di Lugano (Ceresio) con il metodo di Defant, il metodo di Hidaka, applicato successivamente, ha dato buone conferme dei risultati trovati. Lo studio è stato fatto limitatamente a quella porzione del lago che va da Porlezza al ponte diga di Melide. Si son riportati in grafici i risultati dei calcoli eseguiti con i due metodi, e dal confronto risulta il buon accordo. Questo accordo, quasi eccezionale, può trovare spiegazione nella discreta regolarità del bacino in istudio, regolarità che avvicina il nostro lago ai casi ideali per cui valgono senz'altro le teorie di Defant e di Hidaka.

BIBLIOGRAFIA

- (1) P. CAIOL, *Le sesse del lago di Garda*, Parte prima, *Sesse che interessano l'intero lago*, « Ann. di Geofisica », I, 1.
 (2) *Enciclopedia Italiana* (Treccani), XXI, 609.