STUDIO SULLE SESSE DEL LAGO DI ALBANO

MAURIZIO GIORGI

La prime ricerche limnologiche in Italia risalgono al 1662 ([1]) ed ebbero inizio con uno studio del P. Atanasio Kircher sui laghi di Albano e Nemi. Da allora i numerosissimi studi fatti sia da italiani — per la più gran parte — che da stranieri, si limitano generalmente all'aspetto morfologico, geologico o biologico; la limnologia fisica è stata trascuratissima in Italia e soltanto per qualche lago si hanno sporadici dati riguardanti la temperatura, la colorazione, la trasparenza, le sesse, ecc.

La limnologia in Italia, come altrove, ebbe nuovo impulso e maggiore rigore scientifico con gli studi del naturalista svizzero F. A. Forel.

Dobbiamo però constatare che per quanto numerose siano le pubblicazioni riguardanti i laghi italiani siamo ben lontani dal possedere una sufficiente conoscenza delle loro caratteristiche geofisiche quale ci si può attendere da studi condotti con metodo scientifico e con i mezzi di indagine che si possono avere al presente.

E' necessario, per colmare questa lacuna, condurre ricerche sistematiche e scientificamente rigorose ed a questo scopo l'Istituto Nazionale di Geofisica ha iniziato lo studio delle sesse dei principali bacini lacustri italiani: a tale studio faranno seguito altre indagini nei riguardi della temperatura, dell'assorbimento delle radiazioni, ecc.

E' in questo programma di studi che prende posto la presente ricerca che riguarda lo studio teorico delle sesse del lago di Albano: i risultati di questo studio saranno confrontati, quanto prima possibile, con i dati sperimentali su un modello di lago già appositamente costruito in scala convenientemente ridotta e quindi sottoposti a verifica con le registrazioni di limnografi che dovranno essere installati in siti opportuni sulle rive del lago.

Il lago di Albano.

Il lago di Albano sui colli laziali è in fondo ad una conca le cui pareti scendono ripidissime da ogni lato meno che Nord-Ovest ove hanno un declivio molto meno accentuato: la sua forma è grossolanamente ellittica con l'asse maggiore diretto da nord-ovest a sud-est.

Molti studiosi si sono occupati dei problemi geologici dell'interessantissima regione laziale ed hanno cercato di dare una plausibile spiegazione della presenza di questa cavità nel vulcano laziale. L'ipo-

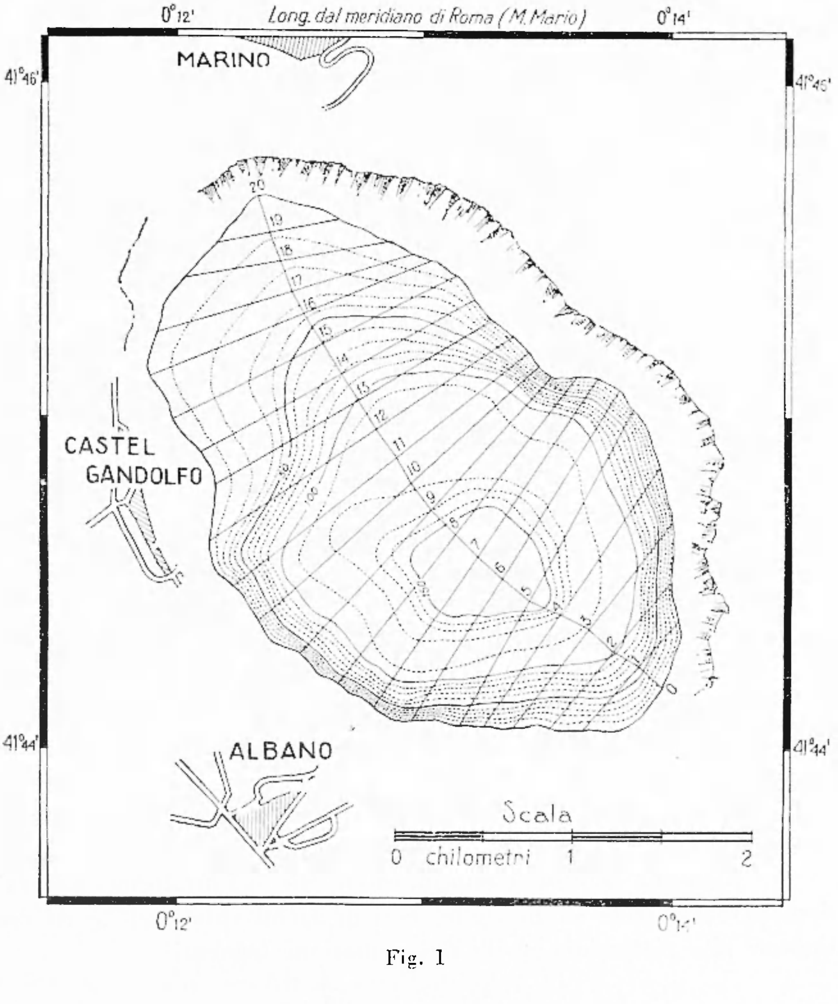

Fig. 1

tesi più attendibile ([2, 3]), tra le diverse proposte, basata su inconfondibili rilievi geologici, è che il lago si sia formato nel cratere costituito dall'intersezione di due bocche vulcaniche contigue: la porzione meridionale del lago, che è quella in cui si riscontra la massima profondità e costituisce come una ulteriore depressione dopo una zona quasi pianeggiante, come si può vedere nella cartina batometrica, è formata dalla più recente delle due bocche; infatti la profondità qui è maggiore che nella parte settentrionale perchè quest'ultima venne in parte colmata dai prodotti di questa bocca eruttiva.

Il lago è situato a 41°45' ca. lat. N, a 0°13' ca. long. E (Monte Mario) ed a 293 m sul livello del mare; le sue acque sono azzurre, molto limpide e trasparenti (n. VIII della scala Forel-Ule); termicamente appartiene alla categoria dei laghi temperati; ha un emissario artificiale di epoca romana (398-97 a. C.) scavato nel peperino per 1800 m, alto m 1,80, largo m 1,20 con l'imboccatura a metà delle coste occidentali; misura 3500 m di lunghezza e 2300 di larghezza, 10 km di circuito e 602 ettari di superficie ([1,5]), la massima profondità è di m 170 e si riscontra, come abbiamo sopra osservato nella parte centro-meridionale; le pareti hanno un pendio irregolare: sono ripidissime fino a 100 m di profondità, divengono poi pressoché pianeggianti da 100 a 120 m e poi tornano di nuovo a scendere rapidamente dai 120 a 160 m; il bacino imbrifero è di kmq 9,74 circa, ed è alimentato, inoltre, da sorgenti per lo più interne.

Determinazione teorica dei dati relativi alle sesse del lago di Albano.

Per la determinazione teorica dei dati riguardanti le sesse del lago di Albano ho usato due metodi diversi: il metodo di Defant e quello del giapponese Hidaka.

Per quanto concerne la bibliografia e l'illustrazione dei metodi più opportuni per la determinazione dei dati relativi alle sesse rinviamo alle memorie originali ([6, 7, 8]) ed in particolare ad una recente pubblicazione di P. Caloi ([9]) avente per oggetto lo studio delle sesse del lago di Garda.

Per quanto riguarda l'applicazione dei metodi sopra accennati ci limiteremo per brevità alle indicazioni più necessarie.

E' noto che le ipotesi semplificative che si introducono per rendere affrontabile lo studio delle sesse in bacini chiusi od aperti conducono alla risoluzione delle due equazioni seguenti:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \qquad [1]$$

$$\eta = -\frac{1}{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left[S(x)\, \xi \right] \qquad [2]$$

dove: ξ rappresenta lo spostamento orizzontale uguale per tutte le particelle di una stessa sezione verticale $S(x)$, x l'ascissa lungo la linea di valle, $b(x)$ la larghezza in superficie della $S(x)$, η lo spostamento verticale delle particelle d'acqua.

G. Chrystal trasforma, mediante la sostituzione di opportune variabili le [1] e [2] nelle seguenti equazioni:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g\,\sigma(v)\,\frac{\partial^2 u}{\partial v^2} \qquad [3]$$

e:

$$\eta = -\frac{\partial u}{\partial v} \qquad [4]$$

dove:

$$u = \xi S(x) \qquad [5]$$

è il volume d'acqua che passa attraverso la sezione $S(x)$ in corrispondenza dello spostamento orizzontale ξ:

$$v(x) = \int_0^x b(x)dx \qquad [6]$$

è l'area in superficie dall'ascissa $x=0$ alla sezione $S(x)$ e varia tra i limiti 0 ed a (a=area totale del bacino)

$$o \leqq v(x) \leqq a \qquad [7]$$

$$\sigma(v) = S(x)b(x) \qquad [8]$$

è il prodotto dell'area della sezione trasversale corrispondente all'ascissa x per la larghezza in superficie di questa stessa sezione ed è una funzione di v che si annulla ad entrambe le estremità del lago:

$$\sigma(o) = \sigma(a) = o. \qquad [9]$$

Se si esprime la u mediante la serie di funzioni sinusoidali:

$$u = \sum_1^\infty u_i(v)\ \text{sen}\ \frac{2\pi}{T_i}(t-t_i) \qquad [10]$$

l'eq. di Chrystal diviene:

$$\sigma(v)\frac{d^2u}{\partial v^2} + \frac{4\pi^2}{gT^2}\,u = 0 \qquad [11]$$

ed è soggetta alle condizioni ai limiti:

$$u(o) = u(a) = 0. \qquad [12]$$

Il diagramma che rappresenta l'andamento di $\sigma(v)$ in funzione di v fu chiamato da Chrystal « curva normale »: Chrystal ha trovato la soluzione della [11] in diversi casi particolari in cui la $\sigma(v)$ può rappresentarsi mediante una curva analitica semplice o tratti raccordati di curve analitiche (tratti rettilinei, archi di parabola, quar-

Tabella 1

Sezioni	x m	$S(x)$ m²	$b(x)$ m	$v(x)$ singole m²	$\Delta(x)$ m	Sessa uninodale $\frac{4\pi^2}{gT^2}\Delta x$	$q=\eta v(x)$ m³	$\xi=\frac{q}{S(x)}$ m	$\Delta\eta=\alpha\xi\Delta x$ cm	η cm	q_1 m³
0	0	0	0	0						100,00	
1	178,75	35 875	812,0	151 250	178,75	0,01218213	131 250	− 5,658	− 4,46	95,54	171 175
2	357,50	75 875	1100,0	179 166	„	„	302 425	− 5,986	− 4,86	90,68	215 365
3	536,25	119 875	1455,0	237.500	„	„	517.790	− 4,319	− 5,76	85,42	231 346
4	715,00	161 250	1775,0	270 854	„	„	749 136	− 4,645	− 5,66	79,76	310 731
5	893,75	214.000	2025,0	389 583	„	„	1 059 867	− 4,955	− 6,03	73,73	262 632
6	1072,50	262 750	2225,0	383 334	„	„	1.342.499	− 5,109	− 6,22	67,51	271.446
7	1251,25	277 750	2220,0	402.083	„	„	1.613 945	− 5,811	− 7,08	60,43	214 023
8	1430,00	256 500	2178,0	354 167	„	„	1 827.968	− 7,127	− 8,68	51,75	213 469
9	1608,75	225 875	2125,0	412.500	„	„	2 041.457	− 9,058	− 11,01	40,74	156 170
10	1787,50	223 000	2125,0	383.333	„	„	2 197 607	− 9,855	− 12,01	28,73	106.541
11	1966,25	210.375	2122,0	370.854	„	„	2.304.148	− 10,953	− 13,34	15,39	63 484
12	2145,00	163.625	2662,0	412 500	„	„	2.367 632	− 14,470	− 17,63	− 2,24	− 8 587
13	2323,75	120 875	1825,0	383.333	„	„	2 359 045	− 19,516	− 23,77	− 26,01	− 80 198
14	2502,50	90 875	1775,0	308.334	„	„	2 278 847	− 25,077	− 30,55	− 56,56	− 197 960
15	2681,25	67.125	1775,0	350 000	„	„	2 080 887	− 31,000	− 37,76	− 94,32	− 306 540
16	2860,00	43.250	1700,0	325.000	„	„	1.774 347	− 41,025	− 49,98	− 144,30	− 411 855
17	3038,75	25.125	1550,0	285.416	„	„	1 362.492	− 54,229	− 66,06	− 210,36	− 517.156
18	3217,50	12 375	1200,0	245 834	„	„	845 356	− 68,312	− 83,22	− 293,58	− 470.946
19	3396,25	4 000	750,0	160 415	„	„	374 410	− 93,603	− 114,03	− 407,61	− 365.153
20	3575,00	0	0	89.584	„	„	9.257				

Sezioni	Sessa binodale $\frac{4\pi^2}{gT^2}\Delta x$	$q=\eta v(x)$ m³	$\xi=\frac{q}{S(x)}$ m	$\Delta\eta=\alpha\xi\Delta x$ cm	η cm	q_1 m³	Sessa trinodale $\frac{4\pi^2}{gT^2}\Delta x$	$q=\eta v(x)$ m³	$\xi=\frac{q}{S(x)}$ m	$\Delta\eta=\alpha\xi\Delta x$ cm	η cm	q_1 m³
0		0	0	0	100,00		0	0	0	0	100,00	
1	0,0311350	131 250	− 3,659	− 11,39	88,61	158 759	0,0553511	131 250	− 3,658	− 20,25	79,75	142 885
2	„	290 009	− 3,822	− 11,90	76,71	182 186	„	274 135	− 3,613	− 20,00	59,75	141 903
3	„	472 195	− 3,939	− 12,26	64,45	174 557	„	416 041	− 3,471	− 19,21	40,54	109 796
4	„	646 749	− 4,011	− 12,49	51,96	202 427	„	575 837	− 3,761	− 18,05	22,49	87 617
5	„	849 176	− 3,968	− 12,35	39,61	151 639	„	613 454	− 2,867	− 15,87	6,62	25 577
6	„	1.001 015	− 3,810	− 11,86	27,75	111 578	„	638 331	− 2,413	− 13,36	− 6,74	− 27 100
7	„	1.112.593	− 4,006	− 12,47	15,28	54 117	„	611 731	− 2,202	− 12,19	− 18,93	− 67.044
8	„	1 166 710	− 4,586	− 14,28	1,00	4 125	„	544.687	− 2,124	− 11,76	− 30,69	− 126.596
9	„	1.170 835	− 5,184	− 16,14	− 15,14	− 58.037	„	413 091	− 1,851	− 10,25	− 40,91	− 156 937
10	„	1 112.798	− 4,990	− 15,54	− 30,68	− 113.772	„	261 154	− 1,171	− 6,48	− 47,42	− 175.849
11	„	999 026	− 4,749	− 14,79	− 45,47	− 187.564	„	85.395	− 0,405	− 2,24	− 49,66	− 204.848
12	„	811.462	− 4,059	− 15,44	− 60,91	− 233.488	„	− 121.543	+ 0,743	+ 4,11	− 45,55	− 174 605
13	„	577 974	− 4,782	− 14,89	− 75,80	− 233 717	„	− 296.151	+ 2,450	+ 13,56	− 31,99	− 98 636
14	„	344 257	− 3,788	− 11,79	− 87,59	− 306 565	„	− 394.787	+ 4,344	+ 24,04	− 7,95	− 27 825
15	„	37 692	− 0,562	− 1,75	− 89,34	− 290 355	„	− 422.612	+ 6,296	+ 34,85	+ 26,90	+ 87 425
16	„	− 252 663	+ 5,842	+ 18,19	− 71,15	− 203 073	„	− 335 187	+ 7,750	+ 42,90	+ 69,80	+ 199.220
17	„	− 455 736	+ 18,139	+ 56,48	− 14,67	− 36 064	„	− 135.967	+ 5,412	+ 29,96	+ 99,76	+ 245 244
18	„	− 491 800	+ 39,741	+ 123,73	+ 109,06	+ 174.943	„	+ 160.277	− 8,320	− 48,88	+ 50,88	+ 61.619
19	„	− 316.850	+ 79,213	+ 240,63	+ 355,69	+ 318.641	„	+ 190.896	− 47,724	− 264,16	− 213,28	− 191.965
20	„	+ 1.791					„	− 159				

Calcolo delle grandezze relative alle sesse uni-bi-trinodale col metodo di Defant per valori di T corrispondenti rispettivamente a $T_I = 213^s$, $T_{II} = 152^s$, $T_{III} = 114^s$

tiche, ecc.): in altre parole il procedimento di Chrystal consiste nel ricondurre le eq. idrodinamiche per un bacino qualsiasi alla stessa forma che esse hanno nel caso di un bacino rettilineo di sezione rettangolare e profondità variabile.

Nel nostro caso da una carta batometrica al 50.000 ([10]), con la massima cura possibile onde non apportare altri errori e approssimazioni oltre quelli inerenti alla carta stessa, si è disegnata la linea che tocca i punti di maggiore profondità lungo la massima estensione del lago (la cosidetta « linea di valle ») a partire dall'estremo sud: dato l'andamento, piuttosto regolare, di questa linea rispetto alla distribuzione delle masse d'acqua che lascia da ambo le parti si è suddivisa in 20 parti uguali della lunghezza di m 178,75 ciascuna (m 3575 complessivi).

Per i punti di suddivisione sono state disegnate le traccie delle sezioni verticali come è indicato nella fig. 1: su opportuna scala sono state disegnate con i dati batometrici della carta le sezioni verticali e con un planimetro se ne è trovata l'estensione superficiale, analogamente sono state misurate le aree parziali, progressive e totale in superficie. I risultati sono riportati nella tabella n. 1.

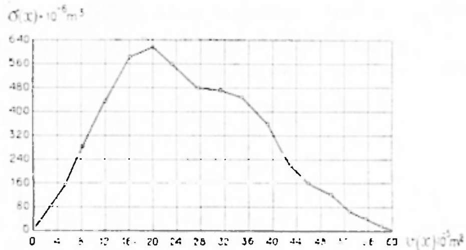

Fig. 2

La curva normale come si vede sul diagramma della fig. 2 non è una curva riducibile ad una forma analitica semplice e quindi non è stato possibile applicare il metodo di Chrystal e si è ritenuto opportuno tentare una soluzione con quello di Defant.

Determinazione delle grandezze relative alle sesse uni, bi e trinodale col metodo di Defant.

Come è noto si comincia col determinare, in prima approssimazione, il periodo della sessa uninodale mediante la formula di Merian:

$$T = \frac{2l}{\sqrt{gh}}$$

dove l è la lunghezza del lago e h la profondità media. Si calcolano poi gli spostamenti orizzontali e le variazioni degli spostamenti verticali $\Delta\eta$, sezione per sezione, mediante le seguenti espressioni:

$$\Delta\eta = \frac{4\pi^2}{gT^2}\xi\Delta x \qquad \xi(x) = -\frac{1}{S(x)}\int_0^x \eta b(x)dx$$

che si deducono immediatamente dalle equazioni idrodinamiche dei piccoli moti in un canale [1] e [2] essendo ξ ed η grandezze periodiche sinusoidali.

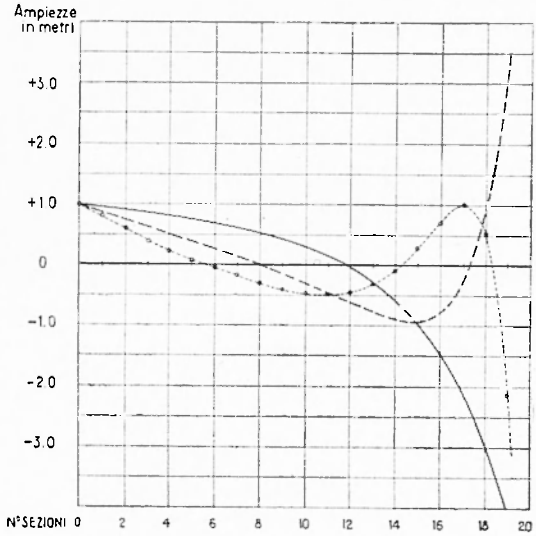

Fig. 3

Si fissa uno spostamento arbitrario, per es. $\eta = 100$ cm (gli spostamenti reali sono in genere molto più piccoli di questo valore) per l'estremo $x=0$; le condizioni da soddisfare sono:

$$\xi(o)=0, \ \xi(l)=0$$

dato che per masse d'acqua chiuse, nel caso di oscillazioni libere, gli spostamenti orizzontali debbono annullarsi alle estremità.

Per un numero di sezioni trasversali sufficientemente grandi si può supporre che dall'estremità del lago $x=0$ fino alla prima sezione trasversale l'entità dello spostamento verticale resti immutata; in tal modo la grandezza:

$$q = \int_0^{x_1} \overline{\eta} b(x) dx = \overline{\eta}\, v(x_1)$$

può essere immediatamente calcolata essendo tutto noto: la q sta a rappresentare il volume d'acqua che passando attraverso la sezione $S(x_1)$ provocherebbe nella prima suddivisione del lago lo spostamento verticale assegnato di η cm. Si determina successivamente $\xi(x)$ e quindi $\Delta\eta$, che è la variazione dell'ampiezza verticale dall'estremità $x=0$ alla prima sezione. Si procede quindi da una sezione alla successiva calcolando i volumi d'acqua transitanti attraverso le varie sezioni e quindi gli spostamenti verticali da esse determinati nelle singole suddivisioni del lago. Per l'ultima sezione la cui superficie $S(l)=0$, dovrà aversi $q=0$. Se il periodo ottenuto con la formula di Merian è il vero periodo della sessa uninodale eseguendo il calcolo si trova che per l'ultima sezione è: $q=0$. Se q risulta maggiore o minore di zero si dovrà correggere opportunamente il valore di T.

Con i dati della tab. n. 1 si è proceduto al calcolo secondo il metodo sopra accennato e nella tabella stessa vengono riportati i calcoli relativi alla sessa uninodale, binodale e trinodale per i valori più vicini al vero tra tutti quelli calcolati; la q finale non risulta esattamente uguale a zero ma è abbastanza piccola in tutti e tre i casi e precisamente maggiore di zero per la prima e minore di zero per la seconda e per la terza; interpolando i valori di T corrispondenti a questi calcoli con quelli di altri calcoli analoghi i valori definitivi di T risultano:

$T_{\mathrm{I}} = 4^{\mathrm{m}}.03$ per la uninodale
$T_{\mathrm{II}} = 2^{\mathrm{m}}.53$ » » binodale
$T_{\mathrm{III}} = 1^{\mathrm{m}}.90$ » » trinodale.

Il diagramma della fig. 3 dà un'idea della distribuzione delle ampiezze degli spostamenti verticali secondo quanto risulta dai calcoli eseguiti con questo metodo.

La posizione delle linee nodali risulta la seguente:

per la uninodale: $x_1^{\mathrm{I}} = 2122$ m. tra la 11ª e 12ª sezione

per la binodale: $x_1^{\mathrm{II}} = 1451$ » » » 8ª » 9ª »
$x_2^{\mathrm{II}} = 3067$ » » » 17ª » 18ª »

per la trinodale: $x_1^{\mathrm{III}} = 982$ » » » 5ª » 6ª »
$x_2^{\mathrm{III}} = 2513$ » » » 14ª » 15ª »
$x_3^{\mathrm{III}} = 3251$ » » » 18ª » 19ª »

Sesse uni, bi e trinodale con il metodo di Hidaka.

Alla equazione di Chrystal può darsi una ulteriore forma mediante l'introduzione della variabile $z = v/a$.

La funzione $\sigma(z)$ assume la forma:

$$\sigma(z) = h\gamma(z) \tag{13}$$

dove h è una costante avente le dimensioni di un volume mentre la funzione $\gamma(z)$ ha evidentemente dimensioni nulle: le [11] e [12] divengono rispettivamente:

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{\lambda}{\gamma(z)}\,u = 0 \tag{14}$$

$$u(o) = u(l) = 0 \qquad [15]$$

dove:

$$\lambda = \frac{4\pi^2 a^2}{T^2 g h} \qquad [16]$$

La [14] con le condizioni [15] ammette soluzioni solo per determinati valori di λ.

Molti ricercatori (Chrystal, Proudman, Doodson, Hidaka, ecc.) hanno tentato di dare delle soluzioni della [14] applicabili effettivamente in pratica per la determinazione delle grandezze occorrenti nello studio delle sesse.

Esponiamo brevemente il metodo di Hidaka basato sul calcolo delle variazioni di Ritz.

La risoluzione della [14] con le condizioni [15] conduce a trovare il valore di minimo dell'integrale:

$$I(u) = \int_0^1 \left\{ \left(\frac{du}{dz} \right)^2 - \frac{\lambda}{\gamma(z)}\, u^2 \right\} dz \qquad [17]$$

A tal fine se si esprime la funzione u come una combinazione lineare delle $m+1$ funzioni:

$$\Psi_i(z) = z(1-z)z^i \qquad [18]$$

soddisfacenti alle stesse condizioni ai limiti di $u(z)$:

$$\Psi_i(o) = \Psi_i(1) = 0 \qquad (per\ i = 0,1,2,\ldots m) \qquad [19]$$

e cioè:

$$u = \sum_0^m{}_i\, A_i \Psi_i(z) \qquad [20]$$

e si sostituisce la [20] nella [17] si possono determinare le condizioni di minimo per $I(u)$ risolvendo le $m+1$ equazioni:

$$\frac{\partial I}{\partial A_j} = 0 \qquad per\ j = 0,1,2,\ldots,m \qquad [21]$$

che scritte in forma esplicita assumono il seguente aspetto:

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{1}{3} - I_0\lambda\right) A_0 + \left(\frac{1}{6} - I_1\lambda\right) A_1 + \left(\frac{1}{10} - I_2\lambda\right) A_2 + \cdots = 0 \\
\left(\frac{1}{6} - I_1\lambda\right) A_0 + \left(\frac{2}{15} - I_2\lambda\right) A_1 + \left(\frac{1}{10} - I_3\lambda\right) A_3 + \cdots = 0 \\
\left(\frac{1}{10} - I_2\lambda\right) A_0 + \left(\frac{1}{10} - I_3\lambda\right) A_1 + \left(\frac{3}{35} - I_4\lambda\right) A_2 + \cdots = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad [22]$$

dove:

$$I_n = \int_0^1 \frac{z^2(1-z)^2 z^n}{\sigma(z)}\, dz \qquad [23]$$

Se si eliminano le $m+1$ costanti A_i si ha l'equazione dei periodi sotto forma del determinante di ordine $m+1$:

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} - I_0\lambda & \frac{1}{6} - I_1\lambda & \frac{1}{10} - I_2\lambda & \dots \\ \frac{1}{6} - I_1\lambda & \frac{2}{15} - I_2\lambda & \frac{1}{10} - I_3\lambda & \dots \\ \frac{1}{10} - I_2\lambda & \frac{1}{10} - I_3\lambda & \frac{3}{35} - I_4\lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \qquad [24]$$

Hidaka ha calcolato le equazioni per $m=1$ ed $m=2$. P. Caloi (*) ha calcolato l'eq. per $m=3$.

La risoluzione della [24] diviene impossibile praticamente per m superiore a questi valori.

Nel nostro caso, come già abbiamo avuto occasione di ricordare, la $\sigma(z)$ non essendo esprimibile mediante una curva analitica di tipo semplice per applicare il metodo di Hidaka è stato necessario ricorrere ad una integrazione numerica degli integrali [23]; i calcoli fino al valore $n=4$, sono contenuti nella tabella n. 2, ed i risultati sono i seguenti:

TABELLA 2

Sezioni	$U(x)$ m^2	$Z = \frac{U(x)}{a}$	$\sigma(x)=S(x)b(x)$ m^3	$\frac{z^2(1-z)^2}{\sigma(x)}$ 10^{-12}	Δz	$M = \frac{z^2(1-z)^2\Delta z}{\sigma(x)}$ 10^{-12}	Mz 10^{-12}	Mz^2 10^{-12}	Mz^3 10^{-12}	Mz^4 10^{-12}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	131.250	0,021605	29 130 500	15,345	0,021605	0,3315	0,0072	0,0002	0,0000	0,0000
2	310 416	0,051097	83 462 500	28,166	0,029492	0,8307	0,0424	0,0022	0,0001	0,0000
3	547.916	0,090192	174 418 125	38,608	0,039095	1,5094	0,1361	0,0123	0,0011	0,0001
4	818.750	0,134774	286 218 750	47,509	0,044582	2,1180	0,2855	0,0385	0,0052	0,0007
5	1 208 335	0,198903	433 350 000	58,586	0,064129	3,7572	0,7473	0,1486	0,0296	0,0059
6	1 591.667	0,262003	584 613 750	63,951	0,063100	4,0353	1,0573	0,2770	0,0726	0,0190
7	1 993 750	0,328189	616 605 000	78,838	0,066186	5,2180	1,7125	0,5620	0,1844	0,0605
8	2 347 917	0,386488	558.657 000	100,641	0,058299	5,8673	2,2676	0,8764	0,3387	0,1309
9	2 760 417	0,454390	479 984 375	128,054	0,067902	8,6951	3,9510	1,7953	0,8156	0,3707
10	3 143 750	0,517490	475.875 000	131,568	0,063100	8,3019	4,2962	2,2237	1,1505	0,5954
11	3 514 584	0,578552	446 415 750	133,181	0,061042	8,1296	4,7032	2,7210	1,5747	0,9107
12	3 927,084	0646454	557 594 750	154,389	0,067902	10,4833	6,7768	4,3807	2,8316	1,8500
13	4 310 417	0709534	220 596 875	192,546	0,063100	12,1497	8,6206	6,1166	4,3399	3,0793
14	4 618 751	0760288	161 303 125	205,917	0,050754	10,4511	7,9458	6,0411	4,5930	3,4920
15	4 968 751	0817901	119 146 875	186,182	0,057613	10,7265	8,7732	7,1756	5,8689	4,8002
16	5 293 751	0871399	73 525.000	170,799	0,053498	9,1374	7,9623	6,9324	6,0461	5,2686
17	5 579 167	0918361	38 943 750	144,285	0,046982	6,7788	6,2255	5,7174	5,2508	4,8222
18	5 825 001	0.958848	14 850.000	104,648	0,040467	4,2429	4,0683	3,9009	3,7404	3,5864
19	5 985 416	0.985254	5 000 000	70,333	0,026406	1,8572	1,8298	1,8028	1,7767	1,7500
20	6 075 000	1	0	0	0,014746	0	0	0	0	0
						114,6209	71,4086	50,7302	38,6103	30,7237
						(I_0)	(I_1)	(I_2)	(I_3)	(I_4)

$$I_0 = 114,6209.10^{-12};\ I_1 = 71,4086.10^{-12};\ I_2 = 50,7302.10^{-12};$$
$$I_3 = 38,6193.10^{-12};\ I_4 = 30,7232.10^{-12}$$

Per $m=1$ la $u(z)$ assume la forma:

$$u=z(1-z)(A_0+A_1z)$$

e l'equazione dei periodi, secondo la [24], a calcoli fatti, è:

$$\varphi(\lambda)=715{,}55303.10^{-24}\lambda^2-8{,}38999.10^{-12}\lambda+\frac{1}{60}=0$$

Le radici di questa equazione sostituite nella [14] danno:

$T_1=4^m{,}03$ per la sessa uninodale
$T_2=2^m{,}12$ » » » binodale.

Il secondo periodo si discosta alquanto dal valore trovato col procedimento del Defant e quindi è più probabile che un valore più vicino al vero per la binodale sia quello che più sotto è stato ottenuto dall'equazione cubica a cui porta il metodo di Hidaka per $m=2$.

Infatti per $m=2$ l'espressione di u è la seguente:

$$u=z(1-z)(A_0+A_1z+A_2z^2)$$

e l'equazione che si deduce dalla [24] è:

$$\varphi(\lambda)=278{,}26430.10^{-36}\lambda^3-7{,}90287.10^{-24}\lambda^2+0{,}05674.10^{-12}\lambda-\frac{1}{10500}=0$$

da cui si traggono i seguenti valori per i periodi:

$T_1=4^m{,}12$ per la sessa uninodale
$T_2=2^m{,}31$ » » » binodale
$T_3=1^m{,}50$ » » » trinodale.

Determinazione delle linee nodali col metodo di Hidaka.

I nodi si determinano ponendo la condizione:

$$\frac{du}{dz}=0$$

che per $m=2$ diviene:

$$f(z)=4\frac{A_2}{A_0}z^3+3\left(\frac{A_1}{A_0}-\frac{A_2}{A_0}\right)z^2+2\left(1-\frac{A_1}{A_0}\right)z-1=0 \qquad [25]$$

dove i valori $\dfrac{A_1}{A_0}$ e $\dfrac{A_2}{A_0}$ si deducono da una coppia delle 3 equazioni tratte dalle [22]. Scegliendo le equazioni:

$$\left(\frac{1}{3}-I_0\lambda\right)A_0+\left(\frac{1}{6}-I_1\lambda\right)A_1+\left(\frac{1}{10}-I_2\lambda\right)A_2=0$$

$$\left(\frac{1}{6}-I_1\lambda\right)A_0+\left(\frac{2}{15}-I_2\lambda\right)A_1+\left(\frac{1}{10}-I_3\lambda\right)A_2=0 \qquad [26]$$

i valori di detti rapporti sono risultati, per λ corrispondente alla sessa uninodale:

$$\frac{A_1}{A_0}=2,57954 \qquad \frac{A_2}{A_0}=-3,11985$$

e quindi la [25] diviene:

$$f(z)=12,47940\,z^3-17,09817\,z^2+3,15908\,z+1=0$$

Le radici che soddisfano al nostro problema sono evidentemente soltanto quelle rispondenti alla condizione:

$$0<z<1 \qquad [27]$$

in questo caso se ne ha una sola e precisamente:

$$z_1=0,47074$$

l'uninodo è quindi tra la 9ª e la 10ª sezione e precisamente in corrispondenza dell'ascissa:

$$x_1=1656\,m.$$

Ripetendo lo stesso procedimento con i valori di λ corrispondenti alla sessa bi e trinodale sostituiti nella [26] e traendo i rispettivi valori dei rapporti $\dfrac{A_1}{A_0}$ e $\dfrac{A_2}{A_0}$ da sostituire nella [24] si ha per la binodale

$$f(z)=25,23040\,z^3-28,97004\,z^2+4,69816\,z+1=0$$

che dà i seguenti due valori soddisfacenti alla condizione [27]:

$$z_1=0,37786 \qquad z_2=0,88841$$

Le ascisse dei binodi risultano quindi:

$x_1^{II}=1103\,m.$ tra la 7ª ed 8ª suddivisione

$x_2^{II}=2424\,m.$ » » 16ª » 17ª »

e per la sessa trinodale:

$$f(z)=12,38108\,z^3-20,67597\,z^2+9,59344\,z-1=0$$

che dà tutte e tre le radici soddisfacenti alla [27]:

$z_1 = 0,14640 \qquad z_2 = 0,59291 \qquad z_3 = 0,93065$

Le ascisse dei trinodi risultano quindi:

$$x_1^{III} = 747m \qquad x_2^{III} = 2004m \qquad x_3^{III} = 3093m.$$

Distribuzione delle ampiezze degli spostamenti verticali.

L'ampiezza dello spostamento verticale viene dato dalla [4]

$$\eta = -\frac{du}{dx} = -a\frac{du}{dz}$$

nel nostro caso:

$$\eta = -a\left\{ 4A_2z^3 + 3(A_1 - A_2)z^2 + 2(A_0 - A_1)z - A_0 \right\}$$

quindi l'andamento delle ampiezze degli spostamenti verticali, relativamente alle sesse, uni, bi e trinodale, ponendo: $\zeta = \dfrac{\eta}{aA_0}$ viene rappresentato dalle tre seguenti funzioni:

$$\zeta^{I} = 12,47940\, z^3 - 17,09817z^2 + 3,15908\, z + 1$$

$$\zeta^{II} = 25,23040\, z^3 - 28,97004z^2 + 4,69816\, z + 1$$

$$\zeta^{III} = -12,38108 z^3 + 20,67597z^2 - 9,59304\, z + 1$$

I risultati dei calcoli sono riportati nella tabella n. 3, e l'andamento delle stesse ampiezze si vede chiaramente nel diagramma n. 4.

Nella tabella n. 4 vengono riportati i risultati relativi al calcolo dei periodi e delle ascisse dei nodi ottenuti col metodo di Hidaka confrontati con quelli ottenuti col procedimento di Defant.

TABELLA 3

Sezioni	Z	ζ^{I}	ζ^{II}	ζ^{III}
0	0	+ 1	1	1
1	0,02160	+ 1,060	1,087	0,802
2	0,05110	+ 1,118	1,168	0,562
3	0,09019	+ 1,155	1,206	0,294
4	0,13477	+ 1,146	1,169	0,052
5	0,19890	+ 1,050	0,987	− 0,188
6	0,26200	+ 0,878	0,696	− 0,317
7	0,32819	+ 0,636	0,313	− 0,359
8	0,38649	+ 0,387	− 0,055	− 0,334
9	0,45439	+ 0,076	− 0,480	− 0,252
10	0,51749	− 0,215	− 0,830	− 0,143
11	0,57853	− 0,479	− 1,093	− 0,027
12	0,64643	− 0,732	− 1,253	+ 0,094
13	0,70953	− 0,909	− 1,239	+ 0,180
14	0,76029	− 0,997	− 1,086	+ 0,216
15	0,81790	− 1,026	− 0,732	+ 0,211
16	0,87140	− 0,973	− 0,209	+ 0,148
17	0,91838	− 0,853	+ 0,424	+ 0,038
18	0,95885	− 0,689	+ 1,112	− 0,104
19	0,98525	− 0,550	+ 1,638	− 0,223
20	1	− 0,460	+ 1,958	− 0,299

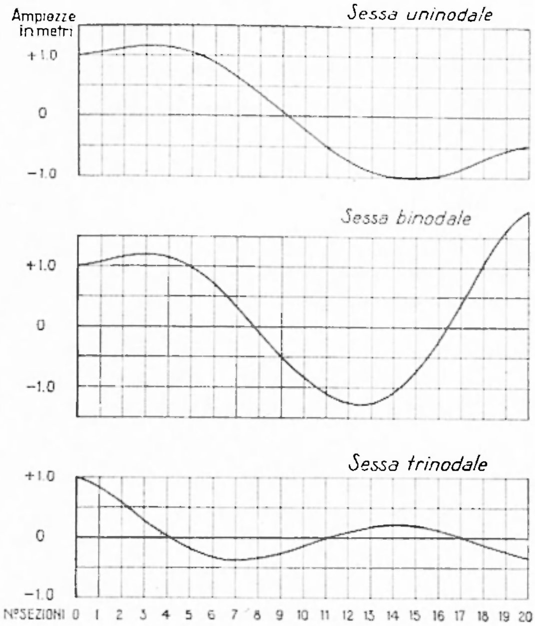

Fig. 4

Mentre sussiste una buona concordanza per i periodi, non si nota sensibile accordo nella posizione dei nodi dedotta con i due metodi; evidentemente il fattore di forma del lago ha una importanza fondamentale nei riguardi della formazione e delle caratteristiche delle sesse e tutti i metodi teorici ideati non possono ottenere altro che delle soluzioni più o meno approssimate. Il metodo di Hidaka è forse quello che può dare i migliori risultati nel caso di laghi aventi curve normali non troppo semplici, ed è quindi probabile che i risultati sopra ottenuti possano essere non troppo lontani dalla realtà: ad ogni modo i risultati sperimentali che si otterranno disponendo opportunamente gli apparecchi di osservazione potranno confermare o meno questa previsione. Dobbiamo altresì notare che le onde stazionarie che costituiscono le sesse si formano generalmente in senso longitudinale ma possono prodursi anche in senso trasversale e nel nostro caso dato che la dimensione trasversale non differisce notevolmente dalla longitudinale si potranno verificare sesse anche in questa ed in altre direzioni. In una prossima comunicazione verranno dati i risultati dello studio su un modello e quelli delle osservazioni dirette.

Tabella 4

Metodo	S. uninodale		S. binodale			S. trinodale			
	T^{I}	x^{I}	T^{II}	x_1^{II}	x_2^{II}	T^{III}	x_1^{III}	x_2^{III}	x_3^{III}
	sec	m	sec	m	m	sec	m	m	m
Defant	242	2122	153	1451	3067	114	982	2543	3051
Hidaka	247	1656	139	1403	2424	90	747	2004	3093

Roma — Istituto Nazionale di Geofisica — gennaio 1946.

RIASSUNTO

Viene fatto uno studio teorico sulle sesse del lago di Albano nei colli laziali; si confrontano e si discutono i risultati ottenuti mediante l'applicazione di due metodi diversi.

BIBLIOGRAFIA

(1) MARINELLI O.: *Appunti per la storia della nostra limnologia con un'appendice sulle depressioni italiane.* Atti del V Congresso Geogr. Italiano, Napoli (1905).

(2) CUMIN G.: *La conca di Albano.* Appunti morfologici. Boll. della Soc. Geogr. Ital., Roma (1917).

(3) SABATINI: *Il vulcano laziale.* Roma 1900.

(4) RICCARDI R.: *I laghi d'Italia.* Boll. della Soc. Geogr. Ital., Roma (1925).

(5) MARINELLI O.: *Area e profondità dei principali laghi italiani.* Riv. Geogr. Italiana. Firenze (1894-95).

(6) CHRYSTAL G.: *On the Hydrodynamical theory of seiches.* Trans. of the R. Soc. of Edinburg, v. XLV, p. 455 (1955).

(7) DEFANT A.: *Neue methode, etc.* Ann. der Hydrogr., XLVI (1918).

(8) HIDAKA K.: *Application of Ritz's variation method to the determination of seiches in a lake.* Mem. Imp. Marine Obs. VI. 2 (1936).

(9) CALOI P.: *Le sesse del lago di Garda.* Annali di Geofisica n. 1 (1948).

(10) DE AGOSTINI G.: *Atlante dei laghi italiani.* Novara-Roma (14 tavole) 1917.