

## LE SESSE DEL LAGO MAGGIORE

P. CALOI - M. DE PANFILIS - M. GIORGI - F. PERONACI

### PARTE PRIMA

I. — Le caratteristiche fisiche dei laghi italiani sono, a tutt'oggi, pressoché ignote. Pochissimo si sa, se si esclude il lago di Garda, sui moti liberi e forzati delle acque dei nostri laghi; quasi nulla sulla loro termologia, sulle connesse onde interne (sesse termiche), sul bilancio termico, sulla radiazione, sulla colorazione, la trasparenza, ecc.

L'Istituto Nazionale di Geofisica si propone di colmare, nel limite del possibile, questa grave lacuna: compito arduo, che richiederà, fra l'altro, adeguata organizzazione e gran copia di osservazioni opportunamente scaglionate nello spazio e nel tempo.

Uno di noi, impadronitosi dell'argomento, nei suoi aspetti teorici e sperimentali, ha iniziato uno studio sistematico — limitato per ora alle sesse ordinarie e a quelle termiche — del lago di Garda: studio che ha già portato alla stampa di tre contributi (<sup>1</sup>).

E' nostro proposito estendere un'analoga ricerca a tutti i laghi italiani. Pertanto abbiamo portato la nostra attenzione sul secondo, per importanza, di tali laghi: il lago Maggiore o Verbano.

Ecco i principali elementi morfometrici del Lago Maggiore, quali risultano dalla Carta idrografica del Verbano, pubblicata a Genova dal R. Ufficio Idrografico nel 1891:

Altezza sul livello del mare	m	394
Superficie	ha	21216
Profondità massima	m	372
» media	»	175
Volume in 10 <sup>6</sup> m <sup>3</sup>		371000

Il lago Maggiore ha sette isole (Brissago maggiore e minore, Isola Madre, S. Giovanni, Superiore, Bella e Partegora) della complessiva superficie di km<sup>2</sup> 0,24.

2. — È noto che la prima rigorosa teoria idrodinamica sulle sesse è dovuta a Chrystal. Per le ipotesi che sono a fondamento di questa teoria, oltre che ai lavori originali, rimandiamo alla prima parte del citato lavoro sul lago di Garda (1). Qui ci limitiamo a riportare l'equazione, che di Chrystal porta il nome, e che regge il moto libero (sesse) dei laghi:

$$\sigma(v) \frac{d^2 u}{dv^2} + \frac{4\pi^2}{gT^2} u = 0, \quad [1]$$

dove  $u$  si ritiene rappresentabile mediante la somma di una serie di semplici funzioni armoniche di  $t$ .

Questa teoria mostra che quando la larghezza e la forma della sezione trasversale di un lago varia con la profondità, purché non in modo brusco, si può procedere ai calcoli introducendo due variabili,  $\sigma$  e  $v$ .  $\sigma$  è il prodotto dell'area  $S(x)$  di una sezione trasversale per la larghezza  $b(x)$  di detta sezione alla superficie del lago, mentre  $v(x)$  è l'area della superficie del lago fra la traccia in superficie della sezione trasversale corrispondente a  $\sigma$ , e un'altra linea similare, scelta come riferimento. Noi conteremo le  $x$  a partire da un estremo (l'estremo Sud) del lago.

Secondo Chrystal quindi lo studio delle oscillazioni di un lago può essere fatto ritenendo retta la linea mediana del lago in superficie, uniforme la sua larghezza, rettangolare una sua generica sezione trasversale, sì che la sezione longitudinale del lago risulterà limitata da una curva i cui punti hanno per ascissa e ordinata rispettivamente  $v$  e  $\sigma$ . È questa la curva *normale* del lago. Ne risulta che  $v$  è la distanza misurata lungo la linea mediana del lago ridotto e  $\sigma$  è la profondità nel punto  $v$ .

Per ottenere i dati necessari al calcolo della curva normale ci siamo valsi di una carta batimetrica del lago al 50.000, carta tratta dall'« Atlante dei laghi italiani » della Casa De Agostini.

Le linee di uguale profondità si susseguono di 25 m in 25 m: tra una isobata e l'altra sono inoltre segnati molti punti con profondità intermedie. Furono praticate 77 sezioni, normali alla linea di valle, fra l'estremo Sud (Sesto Calende) e l'estremo Nord (Locarno). I valori ottenuti per le varie grandezze che entrano nel calcolo [ $x$ ,  $S(x)$ ,  $b(x)$ ,  $v(x)$ ,  $\sigma(x)$ ] sono riportate nelle prime colonne della tabella I.

La curva normale è rappresentata nella fig. 1. Essa appare di forma complessa, tale da rendere ardua, se non impossibile, l'applicazione di uno dei metodi suggeriti da Chrystal per l'integrazione della [1].

Dopo un'applicazione del così detto « metodo giapponese », applicazione che ha condotto a risultati poco attendibili, com'era da prevedere data la natura accidentata del lago, siamo ricorsi ai metodi di Defant e di Hidaka.

3. - *Metodo di Defant.* — Il metodo proposto da Defant (<sup>2</sup>), di cui si dà un cenno nella seconda parte del lavoro dedicato al Garda,

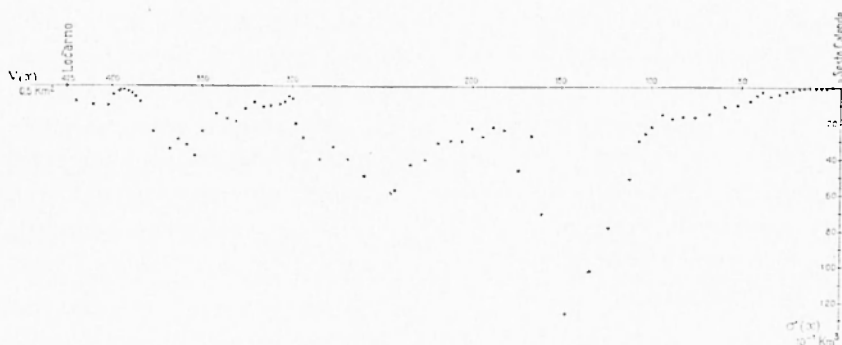


Fig. 1

prende le mosse dalle equazioni differenziali dell'idrodinamica. L'asse delle  $x$  è nel piano dello specchio del lago, possibilmente secondo la direzione della linea di valle. L'origine delle coordinate è ad un estremo del lago. L'asse  $y$  è normale alla  $x$ , sempre nel piano orizzontale, l'asse  $z$  positiva verticalmente verso l'alto. Sia  $x$  l'ascissa di un punto  $P$  del lago,  $S(x)$  la sezione trasversale e  $b(x)$  la larghezza del lago corrispondenti al punto assegnato. La massa d'acqua fra la sezione  $S(x)$  e la successiva  $S(x+dx)$  sarà  $S(x).dx$ . Se questi strati compiono uno spostamento orizzontale pari a  $\xi$  ed uno verticale uguale a  $\eta$ , allora, in base alle equazioni di moto e di continuità dell'idrodinamica, si hanno le equazioni differenziali

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = g \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{b(x)} \cdot \frac{\partial S(x) \cdot \xi}{\partial x} \right], \quad \eta = - \frac{1}{b(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (S(x) \cdot \xi). \quad [2]$$

TABELLA I

Sezioni	$x$ $10^5 \text{ cm}$	$S(x)$ $10^7 \text{ cm}^2$	$b(x)$ $10^2 \text{ m}$	$V(x)$ singole $10^7 \text{ cm}^2$	$V(x)$ complessive $10^7 \text{ cm}^2$	$\sigma(x)$ $10^3 \text{ cm}^3$
0	0	0	0	0	0	0
1	1	23,7	12,-	1612,5	1612,5	28,4
2	2	23,2	14,25	1337,5	2950,-	33,1
3	3	23,3	19,50	1712,5	4662,5	45,4
4	4	10,2	12,75	1587,5	6250,-	13,-
5	5	24,8	17,-	1562,5	7812,5	42,2
6	6	55,5	13,75	1350,-	9162,5	76,3
7	7	91,7	16,-	1475,-	10637,5	146,7
8	8	119,5	18,75	1837,5	12475,-	224,1
9	9	144,-	23,50	2075,-	14550,-	338,4
10	10	200,3	24,25	2312,5	16862,5	485,7
11	11	126,5	21,75	2187,5	19050,-	275,1
12	11,5	163,5	29,50	1437,5	20487,5	482,3
13	12	229,5	33,25	1962,5	22450,-	763,1
14	13	291,8	34,25	3506,5	25956,5	999,4
15	14	316,3	34,75	3600,-	29556,5	1099,1
16	15	375,-	40,-	4312,5	33869,-	1500,-
17	16	460,2	36,25	3925,-	37794,-	1668,2
18	17	528,8	31,25	3400,-	41194,-	1652,5
19	18	602,3	29,25	3012,5	44205,5	1761,7
20	19	597,-	26,50	2800,-	47006,5	1582,1
21	20	687,9	32,75	2787,5	49794,0	2252,9
22	20,5	744,2	35,25	1791,7	51585,7	2623,3
23	21	789,-	38,25	1741,7	53327,4	3017,9
24	21,5	1012,-	51,-	2843,5	56170,9	5161,2
25	22	1149,2	69,-	5860,-	62030,9	7929,5
26	22,5	1304,5	79,-	5650,-	67680,9	10305,6
27	23	1369,5	92,75	6250,-	73930,9	12702,1
28	23,5	1040,8	68,25	6462,5	80393,4	7103,5
29	24	806,3	34,25	3187,5	83580,9	2761,6
30	25	666,2	43,-	3675,-	87255,9	3681,7
31	26	786,5	50,75	3700,-	90955,9	2418,5
32	27	794,3	28,50	3012,5	93968,4	2263,8
33	28	683,5	32,-	3025,-	96993,4	2827,2
34	29	809,-	28,75	2912,5	99905,9	2325,9
35	30	943,-	33,50	3137,5	103043,4	3159,1
36	31	934,3	34,-	3162,5	106205,9	3176,6
37	32	952,-	33,50	3187,5	109393,4	3189,2
38	33	1068,5	38,25	3550,-	112943,4	4087,-

TABELLA I (seguito)

Sezioni	$x$ $10^5 \text{cm}$	$S(x)$ $10^7 \text{cm}^2$	$b(x)$ $10^2 \text{m}$	$V(x)$ singole $10^7 \text{cm}^2$	$V(x)$ complessive $10^7 \text{cm}^2$	$\sigma(x)$ $10^{-1} \text{cm}^3$
39	34	1086,-	40,45	3925,-	116868,4	4392,9
40	35	1327,5	43,95	4200,-	121068,4	5834,4
41	36	1455,-	46,37	4500,-	125568,4	6746,8
42	37	1113,5	45,05	4500,-	130068,4	5016,3
43	38	1021,-	40,-	4525,-	134593,4	4084,-
44	39	900,-	37,45	3900,-	138493,4	3370,5
45	40	1043,-	39,18	4175,-	142668,4	4086,5
46	41	818,-	35,-	4275,-	146943,4	2863,-
47	41,5	706,5	29,30	1900,-	148843,4	2070,-
48	42	393,-	18,62	1400,-	150243,4	731,8
49	42,5	375,-	16,95	800,-	151043,4	635,6
50	43	456,-	20,40	850,-	151893,4	930,2
51	44	477,5	20,62	1825,-	153718,4	984,6
52	45	480,-	22,50	2200,-	155918,4	1080,-
53	46	479,5	24,05	2250,-	158168,4	1153,-
54	47	420,-	21,70	2275,-	160443,4	911,4
55	48	517,5	25,45	2375,-	162818,4	1317,-
56	49	659,-	30,07	2825,-	165643,4	1981,6
57	50	630,-	29,30	2825,-	168468,4	1845,9
58	51	579,-	26,85	2750,-	171218,4	1554,6
59	52	869,8	40,75	3637,5	174855,9	3544,4
60	52,5	878,8	44,30	2100,-	176955,9	3893,1
61	53	735,2	44,80	2312,-	179267,9	3293,7
62	53,5	672,7	45,50	2357,-	181624,9	3060,8
63	54	778,6	48,75	2280,-	183904,9	3562,1
64	55	638,2	41,02	4600,-	188504,9	2617,9
65	56	308,4	28,25	3675,-	192179,9	871,2
66	56,5	228,8	23,82	1337,-	193516,9	545,-
67	57	178,9	21,25	1075,-	194591,9	380,2
68	57,5	132,-	22,20	1162,-	195753,9	293,-
69	58	112,2	17,87	875,-	196628,9	200,5
70	58,5	119,7	18,52	787,-	197415,9	221,7
71	59	136,7	20,50	775,-	198190,9	280,2
72	59,5	189,7	25,35	1100,-	199290,9	480,9
73	60	270,3	40,45	1600,-	200890,9	1093,4
74	61	304,9	34,57	4407,-	205297,9	1054,-
75	62	221,5	37,45	4562,-	209859,9	829,5
76	63	7,7	10,50	2457,-	212316,9	8,1
77	63,25	0	0	237,-	212553,9	

TABELLA II

$T = 48,7^m$ $\alpha = 4,7131 \times 10^{-7} m^{-1}$						
Sezioni	$x$ 10m	$\alpha \Delta x$	q $10^3 m^3$	$2 \xi_0$ m	$2 \Delta \eta_0$ m	$2 \eta_0$ cm
0	0	$4,7131 \cdot 10^{-4}$	0	0	0	0,00
1	1	..	1612,50	- 68,038	- 0,0321	96,79
2	2	..	2907,07	- 125,305	- 0,0591	90,88
3	3	..	4463,39	- 191,554	- 0,0903	81,85
4	4	..	5762,76	- 264,976	- 0,2663	55,22
5	5	..	6625,57	- 267,160	- 0,1259	42,63
6	6	..	7201,07	- 129,749	- 0,0612	36,51
7	7	..	7759,59	- 84,401	- 0,0398	32,53
8	8	..	8337,33	- 73,952	- 0,0349	29,04
9	9	..	8939,91	- 62,040	- 0,0292	26,12
10	10	..	9543,93	- 47,648	- 0,0225	23,87
11	11	..	10066,09	- 79,574	- 0,0375	20,12
12	11,5	$2,3565 \cdot 10^{-4}$	10355,31	- 63,335	- 0,0149	18,63
13	12	..	10720,92	- 46,714	- 0,0110	17,53
14	13	$4,7131 \cdot 10^{-4}$	11335,61	- 38,847	- 0,0185	15,70
15	14	..	11900,81	- 37,624	- 0,0177	13,93
16	15	..	12501,54	- 33,337	- 0,0157	12,36
17	16	..	12986,67	- 28,219	- 0,0132	11,04
18	17	..	13362,03	- 25,268	- 0,0119	9,85
19	18	..	13658,76	- 22,677	- 0,0107	8,78
20	19	..	13904,60	- 23,291	- 0,0110	7,68
21	20	..	14118,68	- 20,524	- 0,0097	6,71
22	20,5	$2,3565 \cdot 10^{-4}$	14238,90	- 19,133	- 0,0045	6,26
23	21	..	14347,93	- 16,184	- 0,0043	5,83
24	21,5	..	14513,71	- 14,342	- 0,0034	5,49
25	22	..	14835,42	- 12,912	- 0,0030	5,19
26	22,5	..	15128,65	- 11,597	- 0,0027	4,92
27	23	..	15436,15	- 11,271	- 0,0027	4,65
28	23,5	..	15736,66	- 15,120	- 0,0036	4,29
29	24	..	15873,40	- 19,686	- 0,0046	3,83
30	25	$4,7131 \cdot 10^{-4}$	16014,15	- 18,708	- 0,0083	2,95
31	26	..	16123,30	- 20,539	- 0,0097	1,98
32	27	..	16182,95	- 20,374	- 0,0096	1,02
33	28	..	16213,80	- 18,352	- 0,0086	0,16
34	29	..	16218,46	- 20,048	- 0,0094	- 0,78
35	30	..	16193,99	- 17,173	- 0,0081	- 1,59
36	31	..	16143,71	- 17,278	- 0,0081	- 2,40
37	32	..	16067,21	- 16,877	- 0,0080	- 3,20
38	33	..	15953,61	- 14,931	- 0,0070	- 3,90

TABELLA II (seguito)

T = 48,7 <sup>m</sup> $\alpha = 4,7131 \times 10^{-7} \text{ m}^{-1}$						
Sezioni	$\alpha$ 10 <sup>3</sup> m	$\alpha \Delta x$	q 10 <sup>3</sup> m	$2\xi_0$ m	$2\Delta\eta_0$ m	$2\eta_0$ cm
39	34	4,7131 · 10 <sup>-4</sup>	15800,53	-14,549	-0,0069	- 4,59
40	35	..	15607,75	-11,757	-0,0055	- 5,14
41	36	..	15594,45	-10,580	-0,0050	- 5,64
42	37	..	15140,65	-13,597	-0,0064	- 6,28
43	38	..	14856,43	-14,551	-0,0069	- 6,97
44	39	..	14584,65	-16,205	-0,0076	- 7,73
45	40	..	14261,92	-13,674	-0,0064	- 8,37
46	41	..	13904,10	-16,998	-0,0080	- 9,17
47	41,5	2,3565 · 10 <sup>-4</sup>	13729,87	-19,434	-0,0046	- 9,63
48	42	..	13595,05	-34,593	-0,0082	-10,45
49	42,5	..	13511,45	-36,031	-0,0085	-11,30
50	43	..	13415,05	-29,419	-0,0069	-11,99
51	44	4,7131 · 10 <sup>-4</sup>	13196,58	-27,637	-0,0130	-13,29
52	45	..	12904,20	-26,884	-0,0127	-14,56
53	46	..	12576,60	-26,229	-0,0124	-15,80
54	47	..	12217,15	-29,088	-0,0137	-17,17
55	48	..	11809,36	-22,820	-0,0108	-18,25
56	49	..	11293,80	-17,138	-0,0081	-19,06
57	50	..	10755,35	-17,072	-0,0080	-19,86
58	51	..	10209,20	-17,632	-0,0083	-20,69
59	52	..	9456,60	-10,872	-0,0051	-21,20
60	52,5	2,3565 · 10 <sup>-4</sup>	9011,40	-10,254	-0,0024	-21,44
61	53	..	8515,71	-11,583	-0,0027	-21,71
62	53,5	..	8004,01	-11,898	-0,0028	-21,99
63	54	..	7502,64	- 9,636	-0,0023	-22,22
64	55	4,7131 · 10 <sup>-4</sup>	6480,52	-10,154	-0,0048	-22,70
65	56	..	5646,29	-18,308	-0,0085	-23,56
66	56,5	2,3565 · 10 <sup>-4</sup>	5331,29	-23,301	-0,0055	-24,11
67	57	..	5072,11	-28,352	-0,0067	-24,78
68	57,5	..	4784,17	-36,244	-0,0085	-25,63
69	58	..	4559,91	-40,641	-0,0096	-26,59
70	58,5	..	4350,85	-36,346	-0,0086	-27,45
71	59	..	4137,91	-30,270	-0,0071	-28,16
72	59,5	..	3828,15	-20,180	-0,0048	-28,64
73	60	..	3369,91	-12,467	-0,0029	-28,91
74	61	4,7131 · 10 <sup>-4</sup>	2095,85	- 6,874	-0,0032	-29,23
75	62	..	762,33	- 3,442	-0,0016	-29,39
76	63	..	40,27	- 5,230	-0,0025	-29,54
77	63,25	..	-29,14			

TABELLA III

$T = 37^m,4 \quad \alpha = 7,9918 \times 10^{-9}$						
Sezioni	$x$ $10^5 \text{cm}$	$\alpha \Delta x$	$q$ $10^{10} \text{cm}^3$	$2 \xi_0$ $10^3 \text{cm}$	$2 \Delta \eta_0$ $\text{cm}$	$2 \eta_0$ $\text{cm}$
0	0					100,00
1	1	$7,9918 \cdot 10^{-4}$	161,25	- 6,804	-5,44	94,56
2	2	..	287,7	- 12,401	-9,91	84,65
3	3	..	432,7	- 18,571	-14,84	69,81
4	4	..	543,5	- 53,284	-42,58	27,23
5	5	..	586,0	- 23,629	- 18,88	8,35
6	6	..	597,3	- 10,762	- 8,60	- 0,25
7	7	..	596,9	- 6,509	- 5,20	- 5,45
8	8	..	586,9	- 4,911	- 3,92	- 9,37
9	9	..	567,5	- 3,941	- 3,15	- 12,52
10	10	..	538,5	- 2,688	- 2,15	- 14,67
11	11	..	506,4	- 3,003	- 3,20	- 17,87
12	11,5	$3,9959 \cdot 10^{-4}$	480,7	- 2,940	- 1,17	- 19,04
13	12	..	443,3	- 1,932	- 0,77	- 19,81
14	13	$7,9918 \cdot 10^{-4}$	373,8	- 1,281	- 1,02	- 20,83
15	14	..	298,8	- 0,945	- 0,76	- 21,59
16	15	..	205,7	- 0,549	- 0,44	- 22,03
17	16	..	119,2	- 0,259	- 0,21	- 22,24
18	17	..	43,6	- 0,082	- 0,07	- 22,31
19	18	..	- 23,6	0,039	0,03	- 22,28
20	19	..	- 86,0	0,144	0,12	- 22,16
21	20	..	- 147,8	0,215	0,17	- 21,99
22	20,5	$3,9959 \cdot 10^{-4}$	- 187,2	0,252	0,10	- 21,89
23	21	..	- 225,3	0,286	0,11	- 21,78
24	21,5	..	- 287,2	0,284	0,11	- 21,67
25	22	..	- 414,2	0,360	0,14	- 21,53
26	22,5	..	- 535,8	0,411	0,16	- 21,37
27	23	..	- 669,4	0,489	0,20	- 21,17
28	23,5	..	- 806,2	0,775	0,31	- 20,86
29	23	..	- 872,7	1,082	0,43	- 20,43
30	25	$7,9918 \cdot 10^{-4}$	- 947,8	1,107	0,88	- 19,55
31	26	..	- 1020,1	1,297	1,04	- 18,51
32	27	..	- 1075,9	1,355	1,08	- 17,43
33	28	..	- 1128,6	1,277	1,02	- 16,41
34	29	..	- 1176,4	1,454	1,16	- 15,25
35	30	..	- 1224,2	1,298	1,04	- 14,21
36	31	..	- 1269,1	1,358	1,09	- 13,12
37	32	..	- 1310,9	1,377	1,10	- 12,02
38	33	..	- 1353,6	1,267	1,01	- 11,01



TABELLA III (seguito)

T = 37 <sup>m</sup> ,4 $\alpha = 7,9918 \times 10^{-9}$						
Sezioni	$x$ 10 <sup>5</sup> cm	$\alpha \Delta x$	q 10 <sup>10</sup> cm <sup>3</sup>	$2 \xi_0$ 10 <sup>3</sup> cm	$2 \Delta \eta_0$ cm	$2 \eta_0$ cm
39	34	7,9918 · 10 <sup>-4</sup>	-1396,8	+ 1,286	+ 1,03	- 9,98
40	35	..	-1438,7	+ 1,084	+ 0,87	- 9,11
41	36	..	-1479,7	+ 1,017	+ 0,81	- 8,30
42	37	..	-1517,0	+ 1,362	+ 1,09	- 7,21
43	38	..	-1549,6	+ 1,518	+ 1,21	- 6,00
44	39	..	-1573,0	+ 1,748	+ 1,40	- 4,60
45	40	..	-1592,2	+ 1,527	+ 1,22	- 3,38
46	41	..	-1606,6	+ 1,964	+ 1,57	- 1,81
47	41,5	3,9959 · 10 <sup>-4</sup>	-1610,0	+ 2,279	+ 0,91	- 0,90
48	42	..	-1611,3	+ 4,100	+ 1,64	+ 0,74
49	42,5	..	-1610,7	+ 4,295	+ 1,72	+ 2,43
50	43	..	-1608,6	+ 3,528	+ 1,41	+ 3,87
51	44	7,9918 · 10 <sup>-4</sup>	-1601,5	+ 3,354	+ 2,68	+ 6,55
52	45	..	-1587,1	+ 3,306	+ 2,64	+ 9,19
53	46	..	-1566,4	+ 3,267	+ 2,61	+ 11,80
54	47	..	-1539,6	+ 3,666	+ 2,93	+ 14,73
55	48	..	-1504,6	+ 2,907	+ 2,32	+ 17,05
56	49	..	-1456,4	+ 2,210	+ 1,77	+ 18,82
57	50	..	-1403,2	+ 2,227	+ 1,78	+ 20,60
58	51	..	-1346,5	+ 2,326	+ 1,86	+ 22,46
59	52	..	-1264,8	+ 1,454	+ 1,15	+ 23,62
60	52,5	3,9959 · 10 <sup>-4</sup>	-1215,2	+ 1,383	+ 0,55	+ 24,17
61	53	..	-1159,3	+ 1,577	+ 0,63	+ 24,80
62	53,5	..	-1100,8	+ 1,656	+ 0,63	+ 25,45
63	54	..	-1042,8	+ 1,339	+ 0,54	+ 25,99
64	55	7,9918 · 10 <sup>-4</sup>	- 923,2	+ 1,447	+ 1,16	+ 27,15
65	56	..	- 823,4	+ 2,670	+ 2,13	+ 29,33
66	56,5	3,9959 · 10 <sup>-4</sup>	- 784,3	+ 3,428	+ 1,37	+ 30,55
67	57	..	- 751,4	+ 4,200	+ 1,63	+ 32,33
68	57,5	..	- 713,8	+ 5,403	+ 2,15	+ 34,49
69	58	..	- 683,6	+ 6,093	+ 2,45	+ 36,92
70	58,5	..	- 654,5	+ 5,433	+ 2,13	+ 39,10
71	59	..	- 624,2	+ 4,565	+ 1,62	+ 40,32
72	59,5	..	- 579,2	+ 3,053	+ 1,22	+ 42,14
73	60	..	- 511,8	+ 1,893	+ 0,76	+ 42,90
74	61	7,9918 · 10 <sup>-4</sup>	- 322,7	+ 1,053	+ 0,85	+ 43,75
75	62	..	- 123,1	+ 0,556	+ 0,44	+ 44,19
76	63	..	- 14,5	+ 1,883	+ 1,50	+ 45,69
77	63,25	..	- 3,7	0	0	

TABELLA IV

T = 23 <sup>m</sup> ,4 $\alpha = 2,0436 \times 10^{-6}$						
Sezioni	x Km	$\alpha \Delta x$	q $10^3 \text{ m}^3$	$\Sigma \xi_0$ m	$\Sigma \Delta \eta_0$ cm	$\Sigma \eta_0$ cm
0	0		0	0	0	100,00
1	1	20,436 · 10 <sup>-4</sup>	1612,5	- 68,04	-13,90	86,10
2	2	..	2764,1	- 119,14	-24,35	61,75
3	3	..	3821,6	- 164,02	-33,52	28,23
4	4	..	4269,8	- 418,61	-85,55	-57,32
5	5	..	5374,2	- 136,06	-27,81	-85,13
6	6	..	2224,4	- 40,09	- 8,19	-93,32
7	7	..	848,4	- 9,25	- 1,89	-95,21
8	8	..	- 901,1	+ 7,54	+ 1,54	-93,67
9	9	..	- 2844,8	+ 19,76	+ 4,04	-89,63
10	10	..	- 4917,5	+ 24,55	+ 5,02	-84,61
11	11	..	- 6768,3	+ 53,50	+ 10,93	-73,68
12	11,5	10,218 · 10 <sup>-4</sup>	- 7827,4	+ 47,87	+ 4,89	-68,79
13	12	..	- 9177,4	+ 39,99	+ 4,09	-64,70
14	13	20,436 · 10 <sup>-4</sup>	-11446,1	+ 39,23	+ 8,02	-56,68
15	14	..	-13486,6	+ 42,64	+ 8,71	-47,97
16	15	..	-15555,3	+ 41,48	+ 8,48	-39,49
17	16	..	-17105,3	+ 37,17	+ 7,60	-31,89
18	17	..	-18189,6	+ 34,40	+ 7,03	-24,86
19	18	..	-18938,5	+ 31,44	+ 6,43	-18,43
20	19	..	-19454,5	+ 32,58	+ 6,66	-11,77
21	20	..	-19782,6	+ 28,76	+ 5,88	- 5,89
22	20,5	10,218 · 10 <sup>-4</sup>	-19887,9	+ 26,72	+ 2,73	- 3,16
23	21	..	-19942,9	+ 25,28	+ 2,58	- 0,58
24	21,5	..	-19926,4	+ 19,69	+ 2,01	+ 1,45
25	22	..	-19842,6	+ 17,27	+ 1,76	+ 3,19
26	22,5	..	-19662,4	+ 15,07	+ 1,54	+ 4,73
27	23	..	-19366,8	+ 14,14	+ 1,44	+ 6,17
28	23,5	..	-18968,1	+ 18,22	+ 1,86	+ 8,03
29	24	..	-18712,1	+ 23,21	+ 2,37	+ 10,40
30	25	20,436 · 10 <sup>-4</sup>	-18329,9	+ 21,41	+ 4,38	+ 14,78
31	26	..	-17783,0	+ 22,61	+ 4,62	+ 19,40
32	27	..	-17198,6	+ 21,65	+ 4,42	+ 23,82
33	28	..	-16478,0	+ 18,65	+ 3,81	+ 27,63
34	29	..	-15673,3	+ 19,37	+ 3,96	+ 31,59
35	30	..	-14682,2	+ 15,57	+ 3,18	+ 34,77
36	31	..	-13582,6	+ 14,54	+ 2,97	+ 37,74
37	32	..	-12379,6	+ 13,00	+ 2,66	+ 40,40
38	33	..	-10945,4	+ 10,24	+ 2,09	+ 42,49

TABELLA IV (seguito)

T = 237,4 $\alpha = 2,0436 \times 10^{-6}$						
Sezioni	x Km	$\alpha \Delta x$	$q$ $10^3 \text{ m}^3$	$2\xi_0$ m	$2\Delta l_0$ cm	$2\eta_0$ cm
39	34	$20,436 \cdot 10^{-4}$	- 9277,7	+ 8,54	+ 1,75	+ 44,24
40	35	..	- 7419,6	+ 5,59	+ 1,14	+ 45,38
41	36	..	- 5377,5	+ 3,70	+ 0,76	+ 46,14
42	37	..	- 3301,2	+ 2,97	+ 0,61	+ 46,75
43	38	..	- 1185,8	+ 1,16	+ 0,24	+ 46,99
44	39	..	+ 648,8	- 0,72	- 0,15	+ 46,84
45	40	..	+ 2602,4	- 2,50	- 0,51	+ 46,33
46	41	..	+ 4583,0	- 5,60	- 2,14	+ 43,19
47	41,5	$10,218 \cdot 10^{-4}$	+ 5441,6	- 7,70	- 0,79	+ 44,40
48	42	..	+ 6063,2	- 15,43	- 1,58	+ 42,82
49	42,5	..	+ 6405,8	- 17,08	- 1,75	+ 41,07
50	43	..	+ 6754,9	- 14,81	- 1,51	+ 39,56
51	44	$20,436 \cdot 10^{-4}$	+ 7476,9	- 15,66	- 3,20	+ 36,36
52	45	..	+ 8276,8	- 17,24	- 3,52	+ 32,84
53	46	..	+ 9015,7	- 18,80	- 3,84	+ 29,00
54	47	..	+ 9675,4	- 23,04	- 4,71	+ 24,29
55	48	..	+ 10252,3	- 19,81	- 4,05	+ 20,24
56	49	..	+ 10824,1	- 16,43	- 3,36	+ 16,88
57	50	..	+ 11301,0	- 17,94	- 3,67	+ 13,21
58	51	..	+ 11654,3	- 20,15	- 4,12	+ 9,09
59	52	..	+ 11994,9	- 13,79	- 2,82	+ 6,27
60	52,5	$10,218 \cdot 10^{-4}$	+ 12126,6	- 13,00	- 1,41	+ 4,86
61	53	..	+ 12239,0	- 16,65	- 1,70	+ 3,16
62	53,5	..	+ 12315,5	- 18,30	- 1,87	+ 1,29
63	54	..	+ 12342,9	- 15,81	- 1,62	- 0,33
64	55	$20,436 \cdot 10^{-4}$	+ 12327,7	- 19,32	- 3,95	- 4,28
65	56	..	+ 12170,4	- 39,46	- 8,06	- 12,34
66	56,5	$10,218 \cdot 10^{-4}$	+ 12005,4	- 52,47	- 5,36	- 17,70
67	57	..	+ 11815,1	- 60,04	- 6,75	- 24,45
68	57,5	..	+ 11531,0	- 87,36	- 8,93	- 33,38
69	58	..	+ 11238,9	- 100,17	- 10,24	- 43,04
70	58,5	..	+ 10896,4	- 91,03	- 9,30	- 52,92
71	59	..	+ 10436,3	- 76,71	- 7,84	- 60,76
72	59,5	..	+ 9817,9	- 51,75	- 5,29	- 66,05
73	60	..	+ 8761,1	- 32,42	- 3,31	- 69,36
74	61	$20,436 \cdot 10^{-4}$	+ 5704,4	- 18,71	- 3,82	- 73,18
75	62	..	+ 2365,9	- 10,68	- 2,18	- 75,36
76	63	..	+ 514,3	- 60,79	- 13,65	- 89,01
77	63,25	..	+ 303,3			

La prima può mettersi sotto la forma

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

Possiamo considerare come soluzioni le funzioni periodiche di  $t$  e porre

$$\xi = \xi_0(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varepsilon\right), \quad \eta = \eta_0(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varepsilon\right);$$

allora le grandezze  $\xi_0, \eta_0$  — ampiezze dei moti orizzontali e verticali rispettivamente — dipendenti solo da  $x$  e non da  $t$ , soddisfano alle relazioni

$$\frac{4\pi^2}{T^2} \xi_0 = g \frac{d\eta_0}{dx}, \quad \eta_0 = -\frac{1}{b(x)} \frac{d}{dx} \left( S(x) \xi_0 \right).$$

Sostituiamo nella prima equazione ai quozienti di differenziali i quozienti di differenze e integriamo la seconda: si ottiene

$$2 \Delta \eta_0 = \frac{4\pi^2}{gT^2} 2\xi_0 \Delta x, \quad 2\xi_0 = -\frac{1}{S(x)} \int_0^x 2\eta_0 b(x) dx \quad [3]$$

$2\eta_0$  e  $2\xi_0$  sono le ampiezze delle oscillazioni lungo il lago, nei due sensi verticale e orizzontale. Nel caso di masse d'acqua chiuse (laghi), per oscillazioni libere, gli spostamenti orizzontali devono annullarsi alle estremità. Per entrambe le estremità del lago avremo pertanto  $\xi = 0$ .

Assegnate le superficie  $S(x)$  delle sezioni trasversali tracciate, nonché le superficie parziali del lago fra sezione e sezione, il calcolo delle grandezze  $2\eta_0$  e  $2\xi_0$  non presenta difficoltà.

Se non si conosce un valore approssimativo  $T_1$  del periodo della sessa unimodale del lago allo studio, si può dedurne uno con la nota formula di Merian. In tal modo, resta fissato il fattore  $\frac{4\pi^2}{T_1^2}$ . Ad uno degli estremi del lago ( $x=0$ , sezione trasversale 0) sia lo spostamento verticale  $2\eta_0 = +100$  cm ( $\xi_0 = 0$ ). Per un numero di sezioni trasversali sufficientemente grande, si può supporre che dall'estremità del lago ( $x=0$ ) fino alla prima sezione trasversale l'entità dello spostamento resti immutata. Allora la grandezza:

$$q = \int_0^{x_1} 2\eta_0 \cdot b(x) dx = 2\eta_0 \cdot r(x_1)$$

può essere calcolata, poiché la superficie  $\nu(x)$  del lago da 0 alla 1<sup>a</sup> sezione trasversale è assegnata. È manifesto il significato fisico di  $q$ : dalla seconda delle [3] consegue il valore di  $2z_0$ , mentre la prima delle [3] dà il valore di  $\Delta 2\eta_0$ , variazione dell'altezza da 0 alla prima sezione, in corrispondenza della quale l'altezza sarà  $100 \div 2 \Delta \eta_0$ . Si procede in tal modo di sezione in sezione, fino all'ultima, considerata di area nulla, in corrispondenza della quale dovrà quindi aversi  $q=0$ , cosa che si verificherà quando il valore di  $T_1$  prescelto coinciderà con l'esatto periodo della sessa uninodale del lago. Quando ciò non si verifica, si ripeteranno i calcoli con un nuovo valore di  $T_1$ , che sarà maggiore o minore del precedente a seconda che l'ultimo valore di  $q$  è negativo o positivo. Procedimento analogo per la determinazione delle sesse binodale, trinodale, ecc.

Il metodo consente, assieme a quella del periodo, la determinazione della suddivisione degli spostamenti orizzontali lungo il lago, della posizione delle linee nodali, nonché la grandezza degli spostamenti verticali delle particelle d'acqua nelle singole sezioni trasversali. Il metodo presenta inoltre il notevole vantaggio di consentire la risoluzione anche nei casi di configurazioni assai complesse, cosa di assai ardua attuazione con i procedimenti proposti da Chrystal.

Il metodo di Defant fu applicato per il calcolo degli elementi relativi alle sesse uni- bi- e trinodale. Le tabelle II, III, IV contengono i risultati corrispondenti ai valori definitivi dei periodi delle prime tre sesse.

4. - *Metodo di Hidaka.* -- La teoria di questo metodo è stata esposta e, in parte ampliata, nel primo lavoro sulle sesse del Garda (<sup>1</sup>). Posto  $z = \frac{v}{a}$ , dove  $a$  è l'area totale del lago, Hidaka (<sup>2</sup>) scrive la [1] sotto la forma

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{\lambda}{\sigma(z)} u = 0, \quad [4]$$

con le condizioni ai limiti

$$u(0)=0, \quad u(1)=0 \quad [5]$$

e dove

$$\lambda = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{a^2}{g}. \quad [6]$$



I periodi delle tre prime sesse, quante ne consente di determinare il caso  $m=2$ , conseguono dalla equazione,

$$\begin{aligned} & \left( I_0 I_2 I_3 - I_0 I_3 - I_1^2 I_1 + 2 I_1 I_2 I_3 - I_2^2 \right) \lambda^3 - \\ & - \left[ \frac{3}{35} \left( I_0 I_2 - I_1^2 \right) + \frac{1}{5} \left( -I_0 I_3 + I_1 I_2 + I_1 I_3 \right) + \right. \\ & \left. + \frac{2}{15} I_0 I_1 + \frac{1}{3} \left( -I_1 I_1 - I_2^2 + I_2 I_3 + I_2 I_4 - I_3^2 \right) \right] \lambda^2 + \\ & + \left( \frac{1}{700} I_0 - \frac{3}{350} I_1 + \frac{53}{2100} I_2 - \frac{1}{30} I_3 + \frac{1}{60} I_4 \right) \lambda - \frac{1}{10500} = 0 \end{aligned} \quad [10]$$

che deriva dalla [8], eliminando le costanti  $A_0, A_1, A_2$ .

Tenendo conto dei valori di  $I_0, \dots, I_4$ , la [10] diventa

$$8307623 \lambda^3 - 1507803 \lambda^2 + 72071,3 \lambda - 952,381 = 0,$$

che risolta dà per  $\lambda$  i valori

$$\lambda_1 = 0,022465 \quad ; \quad \lambda_2 = 0,044581 \quad ; \quad \lambda_3 = 0,114418.$$

Poiché la superficie totale del lago è  $212553,9 \cdot 10^3 \text{ m}^2$ , dalle [6] conseguono i periodi delle sesse uninodale, binodale e trinodale:

$$T_1 = 47^{\text{m}},4 \quad ; \quad T_2 = 33^{\text{m}},7 \quad ; \quad T_3 = 21^{\text{m}},0.$$

Per quanto concerne i nodi, poiché in essi  $\frac{du}{dz} = 0$ , per  $m=2$  dalla [7]

si deduce

$$4 \frac{A_2}{A_0} z^3 + 3 \left( \frac{A_1}{A_0} - \frac{A_2}{A_0} \right) z^2 + 2 \left( 1 - \frac{A_1}{A_0} \right) z - 1 = 0. \quad [11]$$

Dalle prime delle [8], limitate ai primi tre termini, si trae

$$\frac{A_1}{A_0} = -1,4131 \quad ; \quad \frac{A_2}{A_0} = +1,1989.$$

La [11] diviene allora

$$4,7956 z^3 - 7,8360 z^2 + 4,3262 z - 1 = 0,$$

la cui sola radice minore dell'unità è:

$$z = 0,41995.$$

TABELLA V

Sezioni	$\frac{J}{\sigma(z)}$ km	$Z = \frac{v}{a}$	$\frac{Z^2(1-Z)^2}{\sigma(Z)}$ $10^{-6}$	$\Delta Z$	$\frac{M = \frac{Z^2(1-Z)\Delta Z}{\sigma(Z)}}{10^{-2}}$	MZ $10^{-2}$	MZ <sup>2</sup> $10^{-2}$	MZ <sup>3</sup> $10^{-2}$	MZ <sup>4</sup> $10^{-2}$
0	0								
1	1	0,00759	2,0070	0,00759	1,52251	0,01155	0,00009	0,00000	0,00000
2	2	0,01388	5,6798	0,00629	3,57259	0,04939	0,00069	0,00001	0,00000
3	3	0,02194	10,1322	0,00806	8,16655	0,17517	0,00393	0,00009	0,00000
4	4	0,02940	16,2154	0,00746	16,71109	0,37331	0,01036	0,00117	0,00003
5	5	0,03676	24,6919	0,00736	21,85324	0,80303	0,02952	0,00109	0,00004
6	6	0,04311	35,2936	0,00635	29,15644	1,41028	0,02630	0,00113	0,00005
7	7	0,04905	48,1124	0,00694	39,69621	2,23535	0,02679	0,00134	0,00007
8	8	0,05469	63,1619	0,00864	53,76673	3,34059	0,01054	0,00238	0,00014
9	9	0,06005	80,1514	0,00976	72,703	4,82272	0,00494	0,00376	0,00026
10	10	0,06593	99,8821	0,01088	97,4852	6,74788	0,07519	0,00596	0,00047
11	11	0,07234	122,1985	0,01029	129,0026	9,23156	0,20000	0,01793	0,00161
12	11,5	0,07639	15,7288	0,00677	10,64840	1,02640	0,09893	0,00954	0,00092
13	12	0,10562	11,6944	0,00923	10,79393	1,14005	0,12042	0,01272	0,00134
14	13	0,12212	11,4999	0,01650	18,97484	2,31721	0,28297	0,03455	0,00422
15	14	0,13905	13,6398	0,01693	22,07638	3,06972	0,42685	0,05936	0,00825
16	15	0,15934	11,9620	0,02029	24,27090	3,86733	0,61621	0,09818	0,01564
17	16	0,17781	12,8114	0,01847	23,60266	4,20746	0,74812	0,13303	0,02365
18	17	0,19380	14,7722	0,01599	23,60075	4,57770	0,87715	0,17194	0,03332
19	18	0,20798	15,4022	0,01418	21,80032	4,54035	0,9472	0,19646	0,04086
20	19	0,22115	18,7517	0,01317	24,60599	5,46152	1,20781	0,26711	0,05907
21	20	0,23447	14,2638	0,01312	18,70035	4,39030	1,02851	0,20094	0,05645
22	20,5	0,24209	12,8765	0,00842	10,84201	2,63125	0,63857	0,15498	0,03761
23	21	0,25089	11,7005	0,00820	9,50769	2,40796	0,60414	0,15158	0,03603
24	21,5	0,26427	11,3247	0,01338	9,80045	2,58996	0,68445	0,18088	0,04780
25	22	0,29184	11,3885	0,02757	14,80058	4,33599	1,26484	0,36913	0,10773
26	22,5	0,31842	11,5704	0,02658	12,10812	3,86820	1,23171	0,39220	0,12088
27	23	0,34782	11,0511	0,02940	11,91023	4,14262	1,44089	0,50117	0,17432
28	23,5	0,37823	11,7817	0,03041	23,67631	8,95509	3,38709	1,28110	0,48455
29	24	0,39322	20,6145	0,01499	30,90114	12,15095	4,77800	1,87879	0,73878
30	25	0,41051	15,9007	0,01729	27,50096	11,28942	4,63441	1,90246	0,78098
31	26	0,42792	24,7798	0,01741	43,14163	18,46117	7,89992	3,38053	1,44660
32	27	0,44209	26,8723	0,01417	38,07833	16,83405	7,44218	3,29012	1,40053
33	28	0,45632	21,7707	0,01423	30,97971	14,13666	6,45084	2,94366	1,30325
34	29	0,47003	26,6787	0,01371	36,57650	17,19205	8,08077	3,79821	1,70527
35	30	0,48479	19,7474	0,01476	29,14716	14,13025	6,85019	3,32091	1,60994
36	31	0,49967	19,6751	0,01488	29,27655	14,62861	7,30948	3,65234	1,82496
37	32	0,51466	19,5632	0,01499	29,32524	15,09253	7,76752	3,99765	2,05742
38	33	0,53156	15,1720	0,01670	25,33724	13,46120	7,15379	3,80124	2,01982



TABELLA V (seguito)

Sezioni	$\bar{x}$ dall' Sud Km	$Z = \frac{\sigma}{a}$	$\frac{Z^2(1-Z)^2}{\sigma(Z)}$ $10^{-6}$	$\Delta Z$	$\frac{M = Z^2(1-Z)\Delta Z}{\sigma(Z)}$ $10^{-2}$	MZ $10^{-2}$	MZ <sup>2</sup> $10^{-2}$	MZ <sup>3</sup> $10^{-2}$	MZ <sup>4</sup> $10^{-2}$
39	34	0.54983	13,9461	0.01847	25,75845	14,16277	7,78711	4,28160	2,35414
40	35	0.56959	10,3011	0.01976	20,35497	11,59399	6,60382	3,76148	2,14250
41	36	0.59076	8,6634	0.02117	18,34042	10,83479	6,40075	3,78130	2,23384
42	37	0.61193	11,2420	0.02117	23,79931	14,56351	8,91184	5,45342	3,33711
43	38	0.63322	13,2081	0.02129	28,12004	17,80617	11,27524	7,13971	4,52101
44	39	0.65157	15,2915	0.01835	28,05990	18,28299	11,91263	7,76190	5,05742
45	40	0.67121	11,9178	0.01964	23,40656	15,71072	10,54519	7,07805	4,73035
46	41	0.69132	15,9053	0.02011	31,98556	22,11226	15,28663	10,56797	7,30583
47	41.5	0.70026	21,2821	0.00894	19,02620	13,32329	9,32976	6,53325	4,57498
48	42	0.70685	58,6759	0.00659	38,66742	27,33207	19,31967	13,65610	9,65262
49	42.5	0.71061	66,5371	0.00376	25,01795	17,77801	12,63324	8,97732	6,37937
50	43	0.71461	44,7151	0.00400	17,88604	12,78154	9,13381	6,52712	4,66434
51	44	0.72320	40,7008	0.00859	34,96199	25,26451	18,28575	13,22427	9,56378
52	45	0.73355	35,3750	0.01035	36,61313	26,85755	19,70138	14,45193	10,60123
53	46	0.74413	31,4423	0.01058	33,26595	24,75419	18,42032	13,70710	10,19967
54	47	0.75484	37,5730	0.01074	40,24068	30,37327	22,92846	17,30732	13,06425
55	48	0.76601	24,3933	0.01117	27,24732	20,87172	15,98794	12,24691	9,38126
56	49	0.77930	14,9283	0.01329	19,83971	15,46109	12,04881	9,38964	7,31734
57	50	0.79259	14,6406	0.01329	19,45736	15,42171	12,22309	9,68790	7,67853
58	51	0.80553	15,7861	0.01294	20,42721	16,45473	13,25479	10,67714	8,60075
59	52	0.82264	6,0067	0.01711	10,27746	8,45465	6,95514	5,72158	4,70680
60	52.5	0.83252	4,9937	0.00988	4,93378	4,10747	3,41955	2,84685	2,37006
61	53	0.84340	5,2956	0.01088	5,76161	4,85934	4,09837	3,45657	2,91527
62	53.5	0.85449	5,0500	0.01109	5,60045	4,78553	4,08919	3,49417	2,98573
63	54	0.86522	3,8185	0.01073	4,09725	3,54502	3,06723	2,65383	2,29615
64	55	0.88686	3,8454	0.02164	8,32145	7,37996	6,54500	5,80449	5,14778
65	56	0.90415	8,6237	0.01729	14,91038	13,48122	12,18904	11,02072	9,96436
66	56.5	0.91044	12,1982	0.00629	7,67267	6,98551	6,35988	5,79030	5,27171
67	57	0.91549	15,7391	0.00505	7,94825	7,27654	6,66160	6,09863	5,58323
68	57.5	0.92096	18,0922	0.00547	9,89643	9,11422	8,39383	7,75038	7,11937
69	58	0.92508	23,9451	0.00412	9,86538	9,12627	8,44253	7,81001	7,22489
70	58.5	0.92878	19,7294	0.00370	7,29988	6,77998	6,29711	5,84865	5,43209
71	59	0.93243	14,1792	0.00365	5,17541	4,82571	4,49964	4,19560	3,91210
72	59.5	0.93760	7,1117	0.00517	3,67675	3,44732	3,23221	3,03052	2,84142
73	60	0.94513	2,4593	0.00753	1,85185	1,75024	1,65420	1,56344	1,47765
74	61	0.96586	1,0351	0.02073	2,14576	2,07250	2,00175	1,93341	1,86740
75	62	0.98733	0,1886	0.02147	0,40507	0,39994	0,39487	0,38987	0,38493
76	63	0.99888	0,1543	0.01155	0,17824	0,17824	0,17784	0,17764	0,17744
77	63.25	1.00000	0,0000	0.00112					
					1421,92978	689,47568	434,94804	302,03373	221,38243

L'uninodo dista quindi dall'estremo Sud km 25,54.

Per i binodi è  $\lambda = 0,044581$ . La [11] diviene

$$7,8412 z^3 - 16,2144 z^2 + 8,8890 z - 1 = 0,$$

le cui radici minori dell'unità sono

$$z_1 = 0,15110 \quad ; \quad z_2 = 0,68547.$$

Il binodo Sud dista km 14,59 e il binodo Nord km 40,71 dall'estremo Sud. I trinodi corrispondono a  $\lambda = 0,114448$ . La [11] diventa

$$42,4532 z^3 - 58,4259 z^2 + 19,7240 z - 1 = 0,$$

le cui tre radici sono

$$z_1 = 0,06135 \quad ; \quad z_2 = 0,43768 \quad ; \quad z_3 = 0,87721.$$

Distanze dei trinodi dall'estremo Sud: trinodo Sud km 8,27; trinodo medio km 26,89; trinodo Nord km 54,55.

L'andamento delle ampiezze si determina con la formula

$$\zeta = - \frac{du}{dz} a.$$

Nel caso  $m=2$ , si ha

$$\zeta = A_0 a \left\{ 4 \frac{A_2}{A_0} z^3 + 3 \left( \frac{A_1}{A_0} - \frac{A_2}{A_0} \right) z^2 + 2 \left( 1 - \frac{A_1}{A_0} \right) z - 1 \right\}.$$

Per l'uninodale del lago Maggiore avremo

$$\zeta = A_0 a \left\{ 4,7956 z^3 - 7,8360 z^2 + 4,8262 z - 1 \right\}.$$

Analogamente, per la binodale

$$\zeta = A_2 a \left\{ 7,8412 z^3 - 16,2144 z^2 + 8,8890 z - 1 \right\},$$

e per la trinodale infine

$$\zeta = A_0 a \left\{ 42,4532 z^3 - 58,4259 z^2 + 19,7240 z - 1 \right\}.$$

TABELLA VI

Sezioni	VNI-	BI-	TRI-	Sezioni	VNI	BI	TRI
	- NODALE				NODALE		
	$\mathcal{L}_1$	$\mathcal{L}_2$	$\mathcal{L}_3$		$\mathcal{L}_1$	$\mathcal{L}_2$	$\mathcal{L}_3$
0	1	1	1	39	-0,082	-0,289	+0,762
1	0,964	0,933	0,854	40	-0,093	-0,252	+0,876
2	0,934	0,880	0,737	41	-0,105	-0,209	+0,986
3	0,898	0,813	0,595	42	-0,118	-0,165	+1,080
4	0,865	0,752	0,469	43	-0,132	-0,118	+1,159
5	0,833	0,695	0,352	44	-0,144	-0,077	+1,208
6	0,806	0,646	0,255	45	-0,159	-0,033	+1,246
7	0,781	0,602	0,167	46	-0,176	+0,013	+1,261
8	0,743	0,532	0,035	47	-0,184	+0,034	+1,260
9	0,705	0,002	-0,100	48	-0,190	+0,049	+1,257
10	0,664	0,393	-0,218	49	-0,193	+0,057	+1,253
11	0,627	0,328	-0,329	50	-0,197	+0,066	+1,249
12	0,603	0,287	-0,396	51	-0,206	+0,086	+1,236
13	0,572	0,233	-0,481	52	-0,217	+0,109	+1,213
14	0,519	0,142	-0,615	53	-0,228	+0,133	+1,182
15	0,467	0,056	-0,727	54	-0,241	+0,156	+1,143
16	0,410	-0,036	-0,831	55	-0,254	+0,181	+1,092
17	0,362	-0,112	-0,899	56	-0,272	+0,209	+1,020
18	0,324	-0,171	-0,937	57	-0,290	+0,236	+0,932
19	0,294	-0,218	-0,957	58	-0,310	+0,262	+0,833
20	0,264	-0,258	-0,964	59	-0,337	+0,295	+0,679
21	0,238	-0,293	-0,960	60	-0,354	+0,313	+0,578
22	0,222	-0,314	-0,952	61	-0,373	+0,332	+0,455
23	0,207	-0,333	-0,941	62	-0,394	+0,351	+0,319
24	0,183	-0,361	-0,916	63	-0,416	+0,363	+0,175
25	0,140	-0,408	-0,835	64	-0,462	+0,400	-0,152
26	0,103	-0,440	-0,727	65	-0,502	+0,422	-0,450
27	0,068	-0,460	-0,578	66	-0,518	+0,430	-0,566
28	0,036	-0,467	-0,399	67	-0,530	+0,435	-0,665
29	0,022	-0,471	-0,303	68	-0,544	+0,441	-0,771
30	0,008	-0,459	-0,186	69	-0,555	+0,445	-0,855
31	-0,006	-0,449	-0,068	70	-0,565	+0,449	-0,932
32	-0,016	-0,438	+0,031	71	-0,575	+0,452	-1,010
33	-0,026	-0,425	+0,131	72	-0,589	+0,457	-1,123
34	-0,035	-0,410	+0,228	73	-0,610	+0,423	-1,293
35	-0,044	-0,392	+0,332	74	-0,672	+0,475	-1,798
36	-0,053	-0,371	+0,435	75	-0,742	+0,483	-2,379
37	-0,062	-0,349	+0,537	76	-0,782	+0,484	-2,717
38	-0,074	-0,326	+0,646	77	-0,786	+0,484	-2,751

Facendo variare  $z$  nelle tre precedenti equazioni, si ha l'andamento dell'ampiezza per le tre sesse considerate. I risultati del calcolo sono contenuti nella tabella VI, dove è  $\eta = \zeta/aA_0$ .

Le figure 2, 3, 4, danno una rappresentazione grafica dei valori per l'andamento degli spostamenti verticali delle prime tre sesse, calcolate con i metodi di Defant e di Hidaka.

5. - *Le osservazioni.* — Le osservazioni sulle sesse del lago Maggiore sono poche e poco accurate.

Una prima serie di osservazioni fu eseguita con un limnografo Sarasin presso Lesa, dal 1911 al 1914. Una difettosa sistemazione dello strumento, mancante di tubo filtrante, ha fatte sì che i diagrammi — come osserva il prof. Vercelli (1) che ebbe ad effettuare l'analisi — siano alterati da vibrazioni rapidissime, pro-

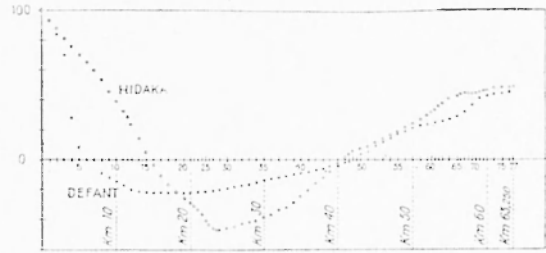


Fig. 2

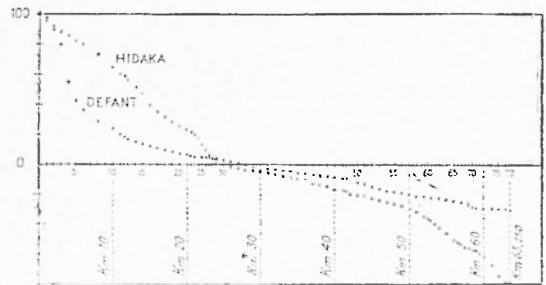


Fig. 3

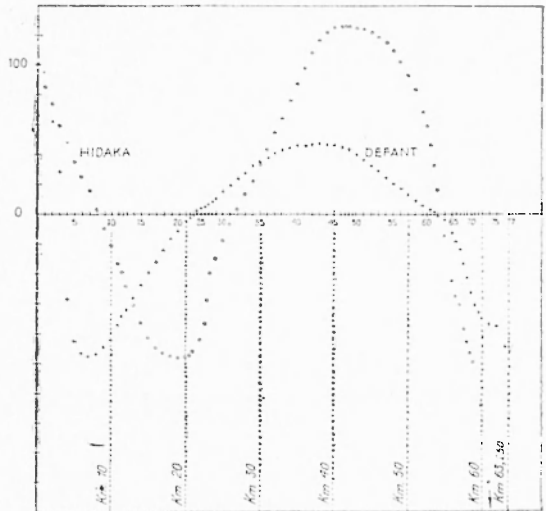


Fig. 4

ducenti un tratteggio così fitto da renderli talora indecifrabili.

Vercelli riassume la sua analisi ritenendo come assai approssimati i seguenti valori dei periodi

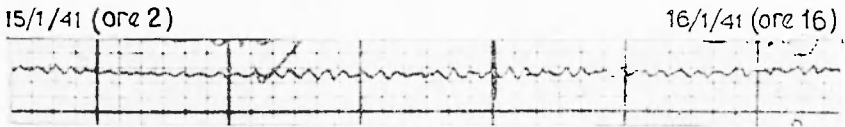
min	9.5	per	le	onde	trinodali;
»	22.5	»	»	»	binodali;
»	40	»	»	»	uninodali.

Aggiunge che a Lesa predomina non l'oscillazione di maggiore periodo (uninodale), ma quella di periodo successivamente minore (binodale). Queste ultime, anzi, costituirebbero la quasi totalità dei linnogrammi. Conclude osservando come non riesca facile stabilire perché prevalgano a Lesa, prossima all'estremo Sud del Lago, le onde di minore periodo ed augurandosi che il suo studio, rimasto incompleto, possa venire ripreso e condotto a compimento mediante sistematiche ricerche ed osservazioni.

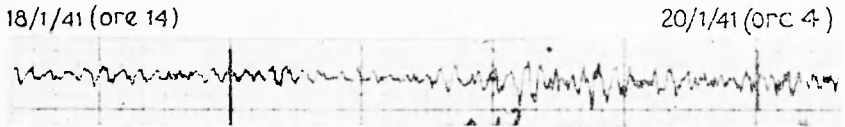
Con la presente ricerca, noi ci proponiamo appunto di iniziare l'auspicato studio sistematico. Osserviamo intanto che la sessa uninodale, dovrebbe avere un periodo non minore di 46<sup>m</sup>, come risulta dal calcolo; che il periodo della binodale dev'essere dell'ordine di 35<sup>m</sup> (media dei valori calcolati), mentre di 22<sup>m</sup> ca. dovrebbe essere quello della trinodale. Le onde di questo periodo rilevate da Vercelli fra i linnogrammi di Lesa, debbono quindi considerarsi come *trinodali* e non binodali.

Il fatto che a Lesa non venga registrata né l'uninodale, né la binodale può essere così spiegato. Intanto per ciò che concerne l'uninodale, va osservato che questa sessa ben difficilmente può realizzarsi: l'esistenza di strozzature e, più ancora, di brusche variazioni di direzione nella linea di valle, fanno sì che, anche quando la sessa si forma, essa si smorzi rapidamente. Inoltre, a Lesa queste oscillazioni risulterebbero notevolmente ridotte in ampiezza come si vede dalla fig. 2 e dalla tavola fuori testo. Le condizioni idrodinamiche per la formazione della binodale invece sussistono: i suoi nodi infatti si formano nei pressi delle strozzature e deviazioni sopra accennate. A Lesa però essa non può venire registrata, perché, come mostra specialmente il risultato ottenuto con il metodo di Hidaka, essa si trova proprio nella zona nodale Sud di detta sessa. Ecco perché a Lesa vengono osservate quasi esclusivamente le sesse trinodali.

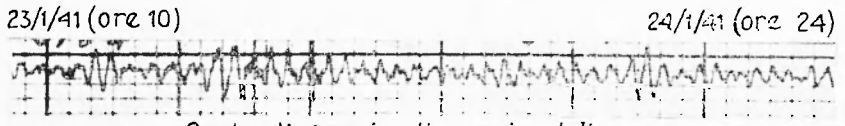
Resta l'onda con periodo di 40<sup>m</sup> ca. Il calcolo esclude che questa sessa possa interessare l'intero lago; molto probabilmente riguarda il



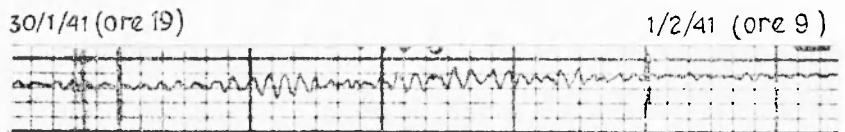
Qualche onda uninodale fra onde di 40 minuti



Trinodali sovrapposte a uninodali



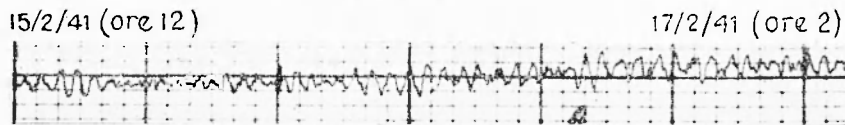
Onde di 40 minuti e uninodali



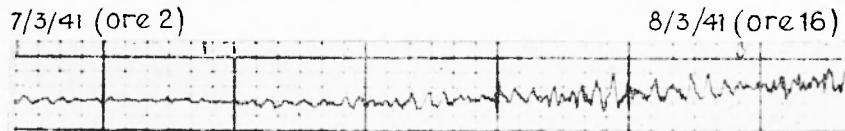
Onde di 40 minuti e uninodali



Binodale



Uninodali su onde 40 minuti



Onde trinodali sovrapposte ad onde di 40 minuti

Fig. 5

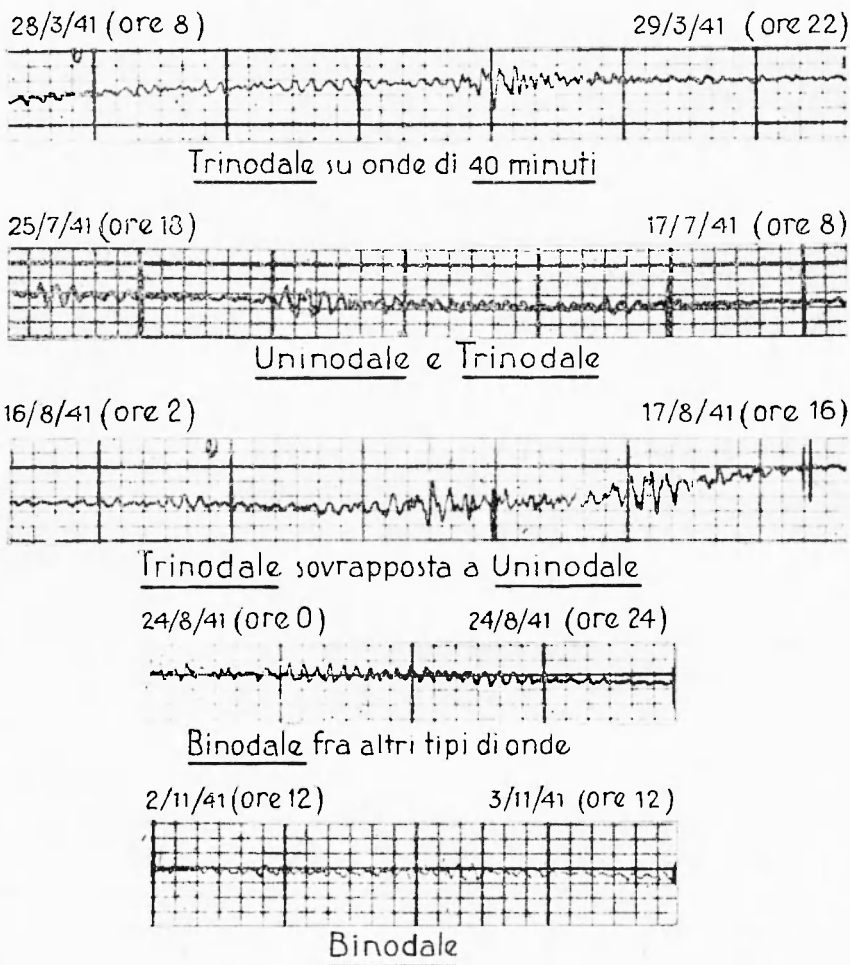


Fig. 6

tratto del lago che dall'estremo Sud va alla strozzatura ed alla brusca deviazione di Maccagno. Cosa che ci riserviamo di osservare con il modello fatto costruire appositamente.

Altre registrazioni di sesse del Verbano vengono da parecchi anni ottenute ad Angera e a Sesto Calende, per conto del Magistrato alle Acque - Ufficio Idrografico del Pò, Sezione di Milano. Scopo di queste registrazioni però è di seguire le lente variazioni di livello: pertanto, lo scorrimento dei registratori è molto piccolo (3 mm all'ora) e il coefficiente di riduzione è pari a 1/10. Queste circostanze fanno sì

che i limnogrammi ottenuti riescano insufficienti ai fini di un'esatta analisi delle sesse. Inoltre va notato che Sesto Calende è sita sul Ticino, quindi non propriamente sul lago.

Ad ogni modo, da esse risulta chiaramente che l'ordine di grandezza dei valori calcolati è attendibile. Le figg. 5 e 6 rappresentano alcune riproduzioni di registrazioni ottenute a Sesto Calende. Va osservato che sui diagrammi, a differenza di ciò che aveva rilevato Vercelli a Lesa, prevalgono nettamente le onde di  $40^m$ . Rari gli esempi di uninodali (media  $46^m-48^m$ ) che, comunque, si esauriscono in pochissime oscillazioni; qualche esempio di binodale ( $34-35^m$  ca.) e di trinodale ( $22^m$  ca.).

Da dette registrazioni non è possibile stabilire una media precisa dei periodi delle varie sesse, sebbene siano sufficienti a testimoniare della buona rispondenza dei valori calcolati.

E' nostro proposito iniziare al più presto una serie di registrazioni con apparecchi adatti allo scopo; ciò che ci permetterà, assieme alle esperienze che ci proponiamo di fare sul modello del Verbano, un confronto più accurato con i risultati dei calcoli.

*Roma — Istituto Nazionale di Geofisica — gennaio 1948.*

#### RIASSUNTO

*Vengono esposti i risultati della prima parte di uno studio dedicato alle oscillazioni libere del Verbano. Con due metodi diversi, vengono determinati i periodi e i nodi delle sesse uninodale, binodale e trinodale. La media dei risultati dei periodi è in buono accordo con le poche osservazioni finora eseguite; le linee nodali ottenute con i due metodi concordano bene per la parte nord del lago, mentre per la parte sud differiscono sensibilmente, cosa prevista data la forma complessa del bacino. In un prossimo lavoro, oltre a controllare quale dei due metodi dà risultati più vicini alla realtà, cercheremo di dar ragione della sessa di  $40^m$ , che viene registrata nella parte sud e che non interessa l'intero lago.*

#### BIBLIOGRAFIA

(<sup>1</sup>) CALOI P.: *Le sesse del Lago di Garda*, Parte I., Ann. di Geofisica, 1, n. 1 (1948).

— *Le sesse del Lago di Garda*, Parte II., Ann. di Geofisica, 1, n. 2 (1948).



— *Notte colli onde interne (sesso termiche) nel Lago di Garda*, La Ric. Scient. e Ricostruz., XVII, n. 1 (1917).

(<sup>2</sup>) DEBANT A.: *Neue Methode zur Ermittlung der Eigenschwingungen (Seiches) von abgeschlossenen Wassermassen*, ecc., Ann. der Hydrogr., XLVI (1918).

(<sup>3</sup>) HIDAKA K.: *Application of Ritz's Variation Method to the Determination of Seiches in a Lake*, Mem. Imp. Marine Observ., VI, n. 2 (1936).

(<sup>4</sup>) VERCELLI F.: *Le sasse del Verbano*, Rend. R. Ist. Lomb. di Sc. e Lett., XLVIII, p. 947-951 (1915).

# Lago Maggiore

Scala 0 1 2 3 4 5 Km.

