LE SESSE DEL LAGO DI GARDA

PIETRO CALOI

PARTE SECONDA

1 - ANCORA DELLE SESSE INTERESSANTI L'INTERO LAGO. — Nella nota precedente ([1]) avevo osservato che il risultato erroneo conseguito da Defant ([2]) applicando alle sesse del lago di Garda un metodo di Chrystal, non era da attribuirsi, come successivamente ritenne l'Autore ([3]), all'inefficacia del metodo, ma ad un errore sfuggito a Chrystal nella redazione prima della sua memoria e ripreso poi da Defant nella sua applicazione (*).

Nel suo primo studio sulle sesse del Garda, Defant aveva approssimato la curva normale del lago ad una combinazione di tratti rettilinei.

Nel caso di lago a fondo rettilineo, Chrystal sviluppò la seguente teoria. Se prendiamo l'origine della x in un punto dove la profondità è h, allora la legge della profondità è $h(x)=h\left(1-\dfrac{x}{a}\right)$, dove a è una costante, positiva o negativa a seconda che il fondo del lago è inclinato verso l'alto o verso il basso nella direzione delle x crescenti.

Con le notazioni consuete, avremo pertanto

$$\xi\, h\left(1-\frac{x}{a}\right)=u=P\sin n(t-\tau)\quad,\quad \zeta=-\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad [1]$$

(*) Nello stesso errore incorsero i giapponesi Nakamura e Honda ([4]) che, applicando il metodo Chrystal dei tratti di rette raccordati al lago Hakoné ottennero per l'uninodale il valore di 22^m.47, alquanto discosto da quello dato dalle osservazioni (15^m.38) e confermato dal metodo Du Boys, opportunamente applicato. Gli AA. attribuirono l'insuccesso alla schematizzazione adottata per la curva normale, mentre in realtà dipendeva dal motivo su detto. L'equazione dei periodi, corretta, doveva essere (in sostituzione della [5] usata dagli autori):

$$\frac{a_2\,\beta_1\,h_1}{a_1\,\beta_2\,h_2}-\frac{\{\lambda_1 J_1(n\beta_1)+\mu_1 Y_1(n\beta_1)\}\cdot\{\lambda_2 J_0(n\beta_2)+\mu_2 Y_0(n\beta_2)\}}{\{\lambda_1 J_0(n\beta_1)+\mu_1 Y_0(n\beta_1)\}\cdot\{\lambda_2 J_1(n\beta_2)+\mu_2 Y_1(n\beta_2)\}}=0.$$

dove P è determinato dalla

$$\frac{d^2P}{dx^2} + \frac{n^2P}{gh\left(1-\frac{x}{a}\right)} = 0. \qquad [2]$$

Se si trasforma la [2] ponendo

$$\omega = 2\,na\sqrt{1-\frac{x}{a}} \Big/ \sqrt{gh} \quad , \quad P = R\omega, \qquad [3]$$

otteniamo

$$\frac{d^2R}{d\omega^2} + \frac{1}{\omega}\frac{dR}{d\omega} + \left(1-\frac{1}{\omega^2}\right)R = 0, \qquad [4]$$

che è un caso particolare dell'equazione di Bessel.

Se $J_n(\omega)$ e $Y_n(\omega)$ indicano le funzioni di Bessel e di Neumann, la soluzione generale della [4] è

$$R = A\,J_1(\omega) + B\,Y_1(\omega).$$

Consegue

$$\xi\omega = \left\{A\,J_1(\omega) + B\,Y_1(\omega)\right\}\sin n(t-\tau). \qquad [5]$$

Chrystal dà poi

$$\zeta = \frac{2\,a}{h}\left\{A\,J_0(\omega) + B\,Y_0(\omega)\right\}\sin n(t-\tau). \qquad [6]$$

Ma il coefficiente della [6] va invertito.

Per la prima delle [3] si ha infatti

$$\zeta = -\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial \omega}\frac{d\omega}{dx} = \frac{2n^2a}{gh\omega}\frac{\partial u}{\partial \omega}.$$

D'altronde per la I^a delle [1] e per la [5]

$$u = \xi\omega\frac{\omega h^2 g}{4\,n^2a^2} = \omega\frac{h^2 g}{4\,n^2a^2}\left[A\,J_1(\omega) + B\,Y_1(\omega)\right]\sin n(t-\tau);$$

per cui

$$\zeta = \frac{h}{2\,a}\left[\frac{A}{\omega}\frac{d}{d\omega}\left\{\omega\,J_1(\omega)\right\} + \frac{B}{\omega}\frac{d}{d\omega}\left\{\omega\,Y_1(\omega)\right\}\right]\sin n(t-\tau).$$

Ma per una proprietà fondamentale delle funzioni $J_1(\omega)$, $Y_1(\omega)$ è

$$\frac{1}{\omega}\frac{d}{d\omega}\Big(\omega J_1(\omega)\Big) = J_0(\omega) \quad , \quad \frac{1}{\omega}\frac{d}{d\omega}\Big(\omega Y_1(\omega)\Big) = Y_0(\omega).$$

Perciò

$$\zeta = \frac{h}{2a}\Big\{ A J_0(\omega) + B Y_0(\omega) \Big\} \sin n(t-\tau). \qquad [7]$$

Chrystal si servì della [6] per sviluppare alcuni casi particolari (curva normale a forma di triangolo isoscele, inclinazione secondo una sola direzione, curva normale a forma di triangolo scaleno, ecc.), introducendo nuovi errori nei coefficienti.

Defant si valse pure della [6] nello sviluppo del caso da lui considerato, relativo al lago di Garda, anch'egli giungendo, naturalmente, a formule con i coefficienti più o meno alterati. Mi limito a riportare, corretta, la formula valevole per il calcolo dei periodi (formula [30] nella trattazione di Defant):

$$\frac{\beta_2}{\alpha_3} J_1(n\alpha_3)\Big[J_1(n\alpha_1)\, Q_0 + J_0(n\alpha_1)\, Q_1\Big] +$$
$$+ \frac{a_2}{a_3}\frac{h_2}{h_1} J_0(n\alpha_3)\Big[J_1(n\alpha_1)\, R_0 + J_0(n\alpha_1)\, R_1\Big] = 0, \qquad [8]$$

dove

$$Q_0 = J_0(n\beta_2)Y_0(n\alpha_2) - J_0(n\alpha_2)Y_0(n\beta_2) \;,\; Q_1 = J_0(n\beta_2)Y_1(n\alpha_2) - J_1(n\alpha_2)Y_0(n\beta_2)$$
$$R_0 = J_0(n\alpha_2)Y_1(n\beta_2) - J_1(n\beta_2)Y_0(n\alpha_2) \;,\; R_1 = J_1(n\alpha_2)Y_1(n\beta_2) - J_1(n\beta_2)Y_1(n\alpha_2), \qquad [9]$$

essendo

$$\alpha_1 = \frac{2a_1}{\sqrt{gh_1}} \;,\; \alpha_2 = \frac{2a_2}{\sqrt{gh_1}} \;,\; \alpha_3 = \frac{2a_3}{\sqrt{gh_2}} \;,\; \beta_2 = \frac{2a_2}{\sqrt{gh_1}}\sqrt{1-\frac{r}{a_2}} \qquad [10]$$

Nel caso del Garda, Defant aveva ottenuto

$a_1 = 178$, $a_2 = 64$, $a_3 = 145$, $h_1 = 23500$, $h_2 = 8490$, $r = 37$.

Con questi dati ho voluto risolvere la [8], tenendo conto delle [9] e [10], con il metodo delle approssimazioni successive e valendomi di tabelle delle funzioni di Bessel e Neumann. I primi tre valori di n che annullano la [8] sono:

$n_1 = \cdot 00253$, $n_2 = \cdot 0043$, $n_3 = \cdot 00586$,

a cui corrispondono i periodi

$T_1 = 41^m.39$, $T_2 = 24^m.35$, $T_3 = 17^m.87$.

che costituiscono i periodi delle sesse uninodale, binodale e trinodale del lago di Garda. Questi valori sono in buon accordo con quelli ottenuti da Vercelli e da me con altri metodi. Defant invece era pervenuto, a causa dei coefficienti sbagliati, ai valori $42^m.8$; $28^m.00$; $20^m.13$.

Resta comunque provato anche per questa via che la sessa osservata a Riva, con periodo fra 28^m e 30^m (circa 30^m secondo Valentin e Teglio: $28^m.58$ valore medio di 62 serie osservate da Defant), *non interessa l'intero lago*, almeno come sessa longitudinale. Il fatto però che secondo Vercelli, essa non compaia fra le registrazioni di Desenzano, fa ritenere che neppure come sessa trasversale può riguardare l'intero lago.

SESSE DEL BACINO OCCIDENTALE

2. — Il lago di Garda non presenta una linea di valle unica, attorno al quale si verifichi la distribuzione più o meno simmetrica delle acque. La linea di valle, che in effetti appare singola nella parte settentrionale del Garda fino all'altezza di Toscolano, ivi presenta una ramificazione secondaria verso il golfo di Salò e il fondo si appiattisce, sollevandosi a piano lievemente inclinato, dando luogo ad un canale più profondo a ridosso della linea Punta S. Vigilio-Sirmione. In questa zona si osserva poi la caratteristica precipua del lago di Garda: l'esistenza cioè di una dorsale subacquea che, con andamento più o meno contorto e continuo, collega la penisola di Sirmione a Punta S. Vigilio (fig. 1): tale dorsale, che, in più punti, si solleva a 20 m. dalla superficie delle acque

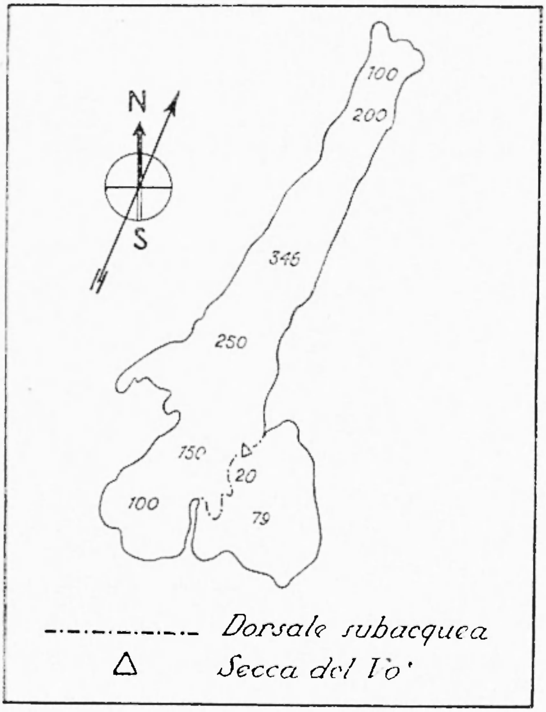

Fig. 1
Dorsale subacquea Sirmione-Punta S. Vigilio
(Da F. Maller - « Il Benaco », pag. 11)

Tabella I

Sezioni	x km (da Riva)	$S(x)$ $10^6\ cm^2$	b (x) $10^4\ cm$	v (x) $6{,}25\times10^4$ m^2	z	$\sigma(z)$ hm^3	$\frac{z^2(1-z)^2}{\sigma(z)}$ [10^{-6}]	ΔZ	$\frac{z^2(1-z)^2}{\sigma(z)} \cdot \Delta_z = M$ 10^{-2}	$M \cdot z$ 10^{-2}	$M \cdot z^2$ 10^{-2}	$M \cdot z^3$ 10^{-2}	$M \cdot z^4$ 10^{-2}
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.00000	0.0	—	—	0.0	0.0	.00000	0.00000	0.00000
2	.25	2030.0	31.1	18.6	0.00424	698.3	0.0286	.00424	0.01213	.00005	.00000	.00000	.00000
3	.60	3885.0	31.0	36.5	.00831	1204.35	.0581	.00407	.02365	.00020	.00000	.00000	.00000
4	1.10	5042.5	32.5	60.9	.01387	1638.8	.1159	.00556	.06444	.00089	.00001	.00000	.00000
5	1.6	5247.5	30.0	85.3	.01943	1574.25	.2287	.00556	.12716	.00247	.00005	.00000	.00000
6	2.1	4957.5	27.3	109.5	.02494	1353.4	.4359	.00551	.24018	.00599	.00015	.00000	.00000
7	2.6	4725.0	23.5	129.8	.02956	1110.4	.7385	.00462	.34119	.01009	.00030	.00001	.00000
8	3.1	4860.0	24.3	148.3	.03378	1181.0	.9060	.00422	.38233	.01292	.00044	.00001	.00000
9	3.6	5080.0	21.8	168.4	.03836	1259.8	1.0795	.00458	.49441	.01897	.00073	.00003	.00000
10	4.6	6020.0	26.4	209.1	.04763	1589.3	1.2962	.00927	1.20158	.05723	.00273	.00013	.00001
11	5.6	6455.0	27.0	251.2	.05721	1742.85	1.6697	.00958	1.59957	.09151	.00524	.00030	.00002
12	6.6	7230.0	29.9	305.9	.06967	2161.8	1.9128	.01246	2.42073	.16865	.01175	.00082	.00006
13	7.6	8340.0	33.5	361.9	.08213	2793.9	2.0473	.01276	2.61235	.21534	.01775	.00146	.00012
14	8.6	9285.0	39.8	422.4	.09621	3695.4	2.0158	.01378	2.81911	.27123	.02712	.00261	.00025
15	9.6	8110.0	32.8	478.1	.10896	2660.1	3.5450	.01275	4.51987	.49249	.04925	.00537	.00058
16	10.6	8165.0	31.8	529.1	.12051	2691.9	4.1718	.01155	4.81843	.58067	.06998	.00843	.00102
17	11.6	8145.0	31.9	578.7	.13181	2598.3	5.0418	.01130	5.69723	.75095	.09898	.01305	.00172
18	12.6	7855.0	30.8	628.6	.14317	2419.3	6.2208	.01136	7.06683	1.01176	.14486	.02074	.00297
19	13.6	7800.0	31.0	682.6	.15547	2652.0	6.5008	.01230	7.99598	1.24314	.19327	.03005	.00467
20	14.6	8120.0	33.8	732.7	.16688	2744.6	7.0429	.01141	8.03595	1.34104	.22379	.03735	.00623
21	15.6	7950.0	38.0	793.7	.18078	3021.0	7.2592	.01390	10.09029	1.82412	.32976	.05961	.01078
22	16.1	8070.0	36.5	827.2	.18841	2945.55	7.9374	.00763	6.05624	1.14106	.21498	.04050	.00763
23	16.6	8280.0	36.3	856.6	.19510	3005.6	8.2017	.00669	5.48894	1.07089	.20893	.04076	.00795
24	17.1	8095.0	35.0	885.6	.20171	2833.25	9.1520	.00661	6.04947	1.22021	.24613	.04965	.01001
25	17.6	8740.0	40.2	916.4	.20872	3513.5	7.7643	.00701	5.44277	1.13601	.23711	.04949	.01033
26	18.6	9655.0	37.5	978.1	.22278	3620.6	8.2804	.01406	11.64224	2.59366	.57782	.12873	.02868
27	19.6	11020.0	42.3	1041.4	.23719	4661.5	7.0235	.01441	10.12086	2.40057	.56939	.13505	.03203
28	20.6	11935.0	46.1	1112.9	.25348	5502.0	6.5085	.01629	10.60235	2.68748	.68122	.17268	.04377
29	21.1	11415.0	45.5	1151.1	.26218	5193.8	7.2017	.00870	6.26809	1.64337	.43086	.11296	.02962
30	21.6	11635.0	45.9	1186.9	.27033	5340.5	7.2858	.00815	5.93793	1.60520	.43393	.11730	.03171
31	22.6	12085.0	49.7	1263.1	.28769	6006.2	6.9911	.01736	12.13655	3.49156	1.00449	.28898	.08314
32	23.6	12825.0	51.3	1346.0	.30657	6579.2	6.8686	.01888	12.96792	3.97558	1.21879	.37364	.11455
33	24.6	13760.0	56.3	1435.5	.32696	7746.9	6.2502	.02039	12.74416	4.16683	1.36239	.44545	.14564
34	25.6	13570.0	59.2	1524.2	.34716	8033.4	6.3946	.02020	12.91709	4.48430	1.55677	.54045	.18762
35	26.6	13145.0	58.8	1622.2	.36948	7729.3	7.0213	.02232	15.67151	5.79032	2.13940	.79047	.29206
36	27.6	12920.0	57.0	1717.8	.39125	7361.4	7.7033	.02177	16.77008	6.56129	2.56714	1.00438	.39297
37	28.6	12480.0	55.7	1807.2	.41162	6951.4	8.4386	.02037	17.18913	7.07551	2.91242	1.19881	.49345
38	29.6	12370.0	58.2	1895.8	.43180	7199.3	8.3619	.02018	16.87131	7.28633	3.14623	1.35851	.58662
39	30.6	12910.0	62.9	1987.6	.45270	8120.4	7.5600	.02090	15.80040	7.15284	3.23809	1.46588	.66360
40	31.6	12210.0	62.3	2095.1	.47719	7606.8	8.1822	.02449	20.03821	9.56203	4.56290	2.17737	1.03902
41	32.6	11480.0	59.5	2189.8	.49876	6830.6	9.1500	.02157	19.73655	9.84380	4.90270	2.44876	1.22135
42	33.6	13755.0	81.3	2295.5	.52283	11182.8	5.5657	.02407	13.39664	7.00417	3.66198	1.91459	1.00101
43	34.6	13535.0	80.2	2413.8	.54978	10855.1	5.6144	.02695	15.21166	8.36307	4.59785	2.52781	1.38974
44	35.6	14480.0	91.4	2536.1	.57763	13191.3	4.5121	.02785	12.56620	7.25861	4.19279	2.42188	1.39895
45	36.6	14855.0	100.3	2679.0	.61018	14899.6	3.7974	.03255	12.36054	7.54215	4.60208	2.80810	1.71345
46	37.6	14130.0	101.5	2815.2	.64120	14765.85	3.5816	.03102	11.11913	7.12978	4.97161	2.93132	1.87956
47	38.1	13355.0	107.5	2898.1	.66015	14356.6	3.5057	.01895	6.61330	4.38557	2.89514	1.91123	1.26170
48	38.6	11165.0	98.5	2986.6	.68024	10997.5	4.3019	.02009	8.64252	5.87899	3.99912	2.72036	1.85050
49	39.1	10165.0	100.7	3072.8	.69987	10538.3	4.1866	.01963	8.21830	5.75174	4.02547	2.81731	1.97175
50	39.6	9670.0	82.3	3150.6	.71759	7958.4	5.1606	.01722	9.14158	6.56206	4.70886	3.37903	2.42476
51	40.1	9110.0	74.5	3218.0	.73295	7010.15	5.4617	.01536	8.39378	6.15222	4.50927	3.30507	2.42245
52	40.6	8625.0	68.0	3279.8	.74702	5865.0	6.0887	.01407	8.56680	6.39957	4.78061	3.57121	2.66777
53	41.1	8010.0	61.5	3333.4	.75923	4926.15	6.7812	.01221	8.28351	6.28909	4.77486	3.62522	2.75237
54	41.6	6880.0	63.5	3383.4	.77062	4368.8	7.1530	.01139	8.14727	6.27845	4.83830	3.72849	2.87325
55	42.6	6570.0	60.3	3472.8	.79098	3961.7	6.8986	.02036	14.04555	11.10975	8.78758	6.95080	5.49794
56	43.6	6560.0	62.0	3571.8	.81353	4067.2	5.6575	.02255	12.75766	10.37874	8.44341	6.86897	5.58811
57	44.6	6435.0	70.2	3680.8	.83836	4517.4	4.0665	.02483	10.09712	8.46502	7.09673	5.94961	4.98792
58	45.6	5730.0	77.0	3798.2	.86510	4112.1	3.0870	.02674	8.25461	7.14109	6.17776	5.34438	4.62342
59	46.6	4815.0	65.8	3915.2	.89171	3168.3	2.9416	.02661	7.83642	6.98805	6.23152	5.55690	4.95530
60	47.6	4950.0	71.5	4024.5	.91661	3539.25	1.6501	.02490	4.10875	3.76624	3.45229	3.16451	2.90071
61	48.1	4510.0	75.0	4081.6	.92961	3105.0	1.2570	.01300	1.63410	1.51912	1.41224	1.31287	1.22050
62	48.6	3615.0	77.5	4141.9	.94338	2821.9	1.0124	.01374	1.39104	1.31228	1.23798	1.16789	1.10176
63	49.1	2335.0	75.5	4204.9	.95773	1762.9	.9303	.01435	1.33498	1.27855	1.22451	1.17275	1.12318
64	49.6	1615.0	72.7	4261.7	.97135	1171.1	.6558	.01362	.89320	.86761	0.84275	.81861	.79515
65	50.1	980.0	44.5	4312.8	.98230	436.1	.6879	.01095	.75325	.73992	.72682	.71396	.70132
66	50.6	365.0	42.1	4345.8	.98982	153.7	.6506	.00752	.48925	.48427	.47934	.47446	.46963
67	51.45	0.0	0.0	4390.5	1.00000	0.0	—	0.01018	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
									495.30903	232.03469	135.66569	90.27715	65.02238

(Monte Cor, M. Saol, M. Croce, M. Costiol, M. S. Procol, ecc), e, in un punto, — Monte Vò — quasi affiora (2-4 m. dal livello esterno), divide praticamente il lago in due bacini, che presentano la comunicazione più profonda (60 m.) attraverso uno stretto canale fra la secca del Vò e il Monte Merlo (fig. 2). Il bacino occidentale, molto più lungo e profondo, va da Desenzano a Riva: quello orientale, che diremo di Peschiera - Garda, presenta la massima profondità di 79 metri in un punto del canale subacqueo che, con qualche soluzione di continuità collega la secca del Vò con Peschiera, mentre in una vasta zona fra la penisola di Sirmione e Peschiera lo strato di acqua è molto sottile.

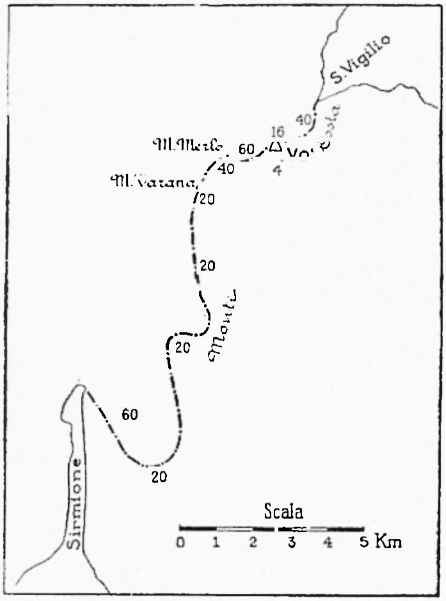

Fig. 2
Dorsale subacquea Sirmione-Punta S. Vigilio
(Da F. Maller - « Il Benaco », pag. 20)

Questi bacini possono presentare le condizioni per la coesistenza di moti liberi indipendenti. In questa parte del lavoro mi sono proposto di ricercare dette condizioni per quanto riguarda il bacino occidentale.

Gli elementi necessari al calcolo sono stati dedotti da una carta del Garda al 25.000 (Ist. Geogr. Militare), contenente le linee isobate di 25 in 25 m (esclusa l'estremità superiore del lago, per la quale supplii con una carta a scala più piccola). La parte occidentale del lago, limitata ad oriente, da Punta S. Vigilio a Sirmione, dalla così detta linea dei monti subacquei (vedi fig. 3), è stata suddivisa in 67 sezioni trasversali, perpendicolarmente alla linea di valle Riva-Desenzano. Fu escluso dal computo il piccolo bacino compreso fra l'Isola del Garda, gli Scogli dell'Altare, l'Isola S. Biagio e Punta S. Fedele e da qui lungo la costa occidentale, fino a Punta S. Fermo, di fronte all'Isola del Garda: il fondo di tale bacino, della profondità di ca. 50 m, nella parte orientale si solleva fino ad affiorare in superficie nelle scogliere fra l'Isola di S. Biagio e l'Isola del Garda (che lo

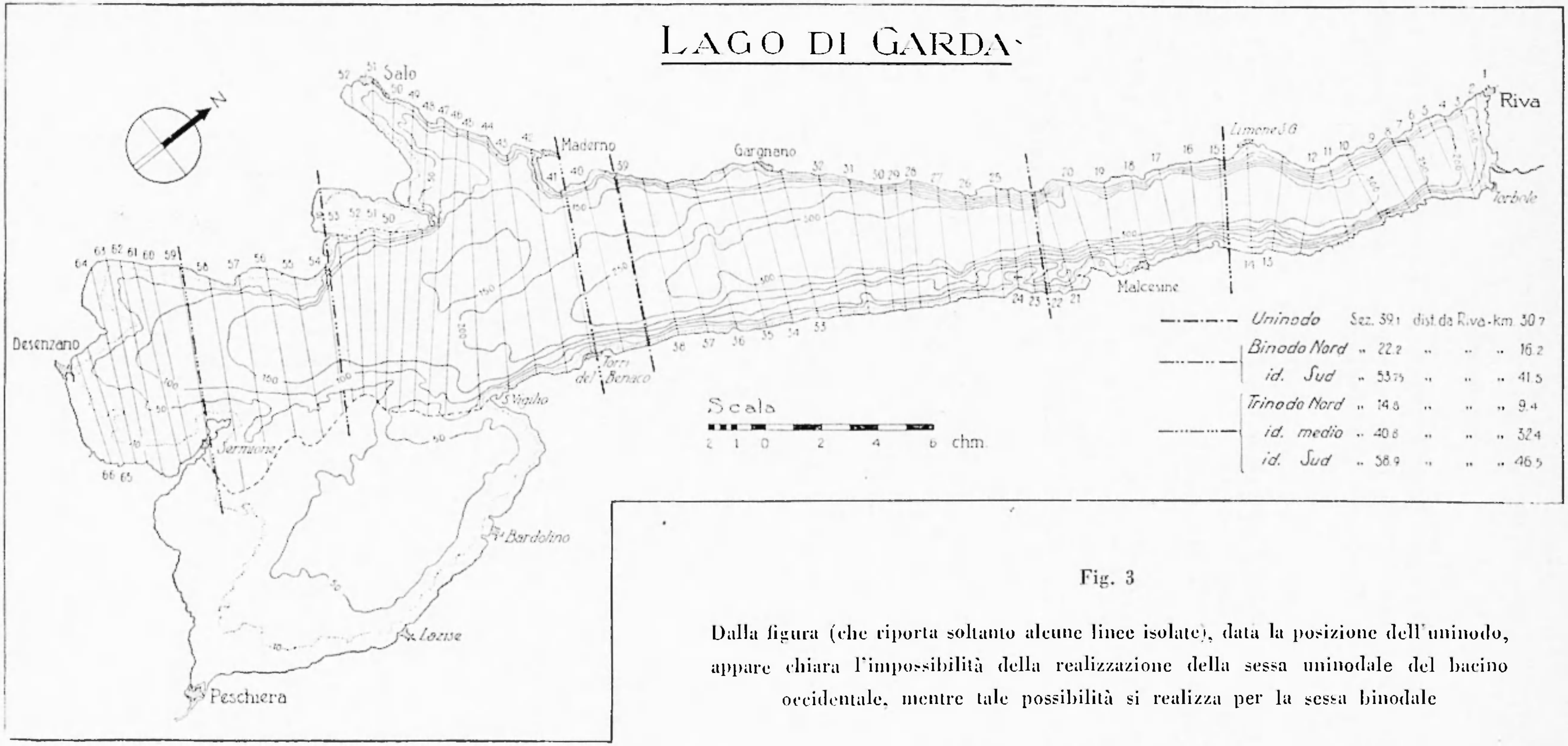

Fig. 3

Dalla figura (che riporta soltanto alcune linee isolate), data la posizione dell'uninodo, appare chiara l'impossibilità della realizzazione della sessa uninodale del bacino occidentale, mentre tale possibilità si realizza per la sessa binodale limita a Nord) formando praticamente un laghetto a sè. L'area delle sezioni trasversali $S(x)$ e delle superficie parziali $v(x)$ furono determinate con un planimetro. I risultati delle misure sono riportati nella tabella 1.

L'applicazione del metodo di Hidaka fu limitata al caso $m=2$: si ritenne superflua l'estensione $m=3$ elaborata nel lavoro precedente. La tabella I contiene i risultati dei calcoli. Anche in questo caso si è dovuto ricorrere all'integrazione numerica, data la complessità della

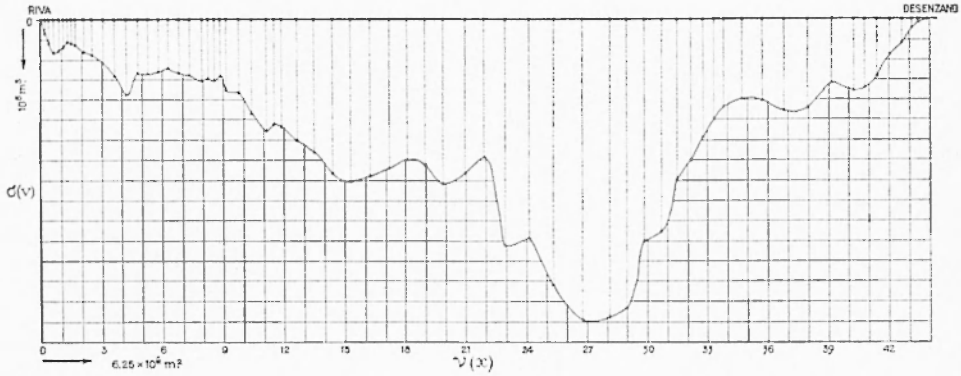

Fig. 4
Curva normale del bacino occidentale del Garda

curva normale relativa al bacino occidentale del Garda (fig. 4). Gli integrali risultano avere i seguenti valori:

$$I_0 = 4{,}9530903 \quad ; \quad I_1 = 2{,}3203469 \quad ; \quad I_2 = 1{,}3566569 \quad ;$$

$$I_3 = \cdot 9027715 \quad ; \quad I_4 = \cdot 6502238.$$

Periodi. — Trascurando il caso $m=0$, per $m=1$ e per la [22] della nota precedente, si ha

$$(I_0 I_2 - \overset{2}{I_1})\,\lambda^2 - \left(\frac{2}{15} I_0 - \frac{1}{3} I_1 + \frac{1}{3} I_2\right)\lambda + \frac{1}{60} = 0,$$

e quindi

$$1335634\ \lambda^2 - 339182\ \lambda + 16667 = 0$$

$$\lambda_1 = \cdot 066611 \quad , \quad \lambda_2 = \cdot 187337:$$

e poiché la superficie totale del bacino occidentale (esclusa la porzione S. Biagio - Isola del Garda) è $a = 274406250$ m^2, avremo

$$T_1 = \frac{2\pi a}{\sqrt{\lambda_1 g}} = 35^{m},55 \quad , \quad T_2 = 21^{m},2.$$

Per $m=2$, dalla [23] della Nota precedente

$$\left(I_0 I_2 I_4 - I_0 I_3^2 - I_1^2 I_4 + 2 I_1 I_2 I_3 - I_2^3\right)\lambda^3 - \left[\frac{3}{35}\left(I_0 I_2 - I_1^2\right) + \frac{1}{5}\left(-I_0 I_3 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + I_1 I_2 + I_1 I_3\right) + \frac{2}{15} I_0 I_4 + \frac{1}{3}\left(-I_1 I_4 - I_2^2 + I_2 I_3 + I_2 I_4 - I_3^2\right)\right]\lambda^2 +$$
$$+ \left(\frac{1}{700} I_0 - \frac{3}{350} I_1 + \frac{53}{2100} I_2 - \frac{1}{30} I_3 + \frac{1}{60} I_4\right)\lambda - \frac{1}{10500} = 0,$$

si ha

$$184545\,\lambda^3 - 123359\,\lambda^2 + 21712\,\lambda - 952,38 = 0,$$

da cui

$$\lambda_1 = \cdot 0664723 \quad , \quad \lambda_2 = \cdot 18716 \quad , \quad \lambda_3 = \cdot 41482$$

e quindi

$$T_1 = 35^{m},58 \quad , \quad T_2 = 21^{m},21 \quad , \quad T_3 = 14^{m},25,$$

che sarebbero i valori relativi alle prime tre sesse del bacino occidentale del Garda. L'esame dei nodi ci permetterà di stabilire quali di queste sesse sono dinamicamente possibili.

Nodi. — Nel caso $m=2$, e valendoci della [37] della nota precedente, per l'onda *uninodale* si ha l'equazione

$$1,2356\, z^3 - 2,6484\, z^2 + 3,1478\, z - 1 = 0,$$

essendo $z = \dfrac{v}{a}$. L'unica soluzione minore dell'unità (come il problema esige) di questa equazione è

$$_1z_1 = \cdot 45476.$$

La sezione dell'uninodo è quindi 39.084; e l'uninodo dista da Riva km 30.684.

L'onda uninodale del bacino occidentale del Garda verrebbe ad avere la linea nodale nella parte settentrionale del lago, al di fuori dell'apertura Sirmione - S. Vigilio che unisce i due bacini fra loro: *la sessa uninodale del bacino occidentale del Garda non è quindi fisicamente possibile.* Difatti le osservazioni non hanno mai fornito esempi di onde aventi tale periodo.

Il valore di λ corrispondente all'onda binodale è, per $m = 2$, $\lambda = \cdot 18716$. Si ha allora

$$\cdot 9980\, z^3 - 7{,}8345\, z^2 + 6{,}7240\, z - 1 = 0,$$

che ammette le soluzioni minori di 1

$$_2z_1 = \cdot 18959 \quad , \quad _2z_2 = \cdot 76662 .$$

La sezione del *binodo Nord* è pertanto 22,176, distante da Riva km 16,188; la sezione del *binodo Sud* è 53,75, distante da Riva km 41,475.

Il nodo meridionale della sessa binodale cade quindi (v. fig. 3) in piena zona di comunicazione dei due bacini del Garda: *la sessa bi-*

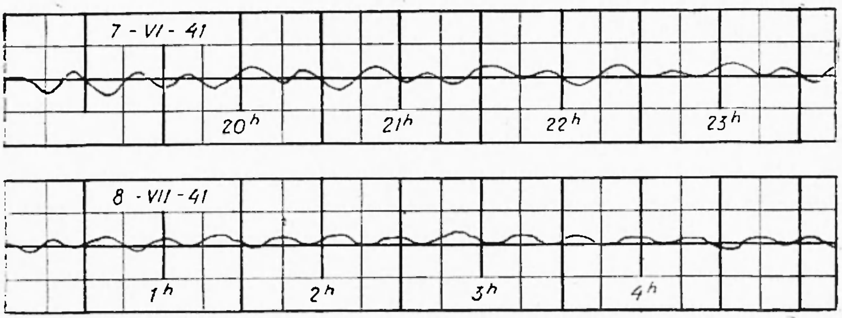

Fig. 5
Esempi di sesse binodali (registrate a Riva) interessanti il solo bacino occidentale del Garda (riduz. 1/6)

nodale del bacino occidentale è perciò fisicamente possibile. Il suo periodo teorico risulta di $21^m{,}2$, mentre il periodo calcolato per l'intero lago era di $23^m{,}66$. Resta così chiaramente spiegata la gamma piuttosto estesa dei valori osservati per la sessa binodale del Garda, ritenuta unica, valori che vanno da 20^m a 24^m: si tratta in realtà di *due sesse* binodali, con periodo diverso: ecco perché, considerata come sessa unica, la media dei valori osservati risulta leggermente inferiore alla sessa interessante l'intero lago e leggermente superiore a quella relativa al bacino occidentale (fig. 5).

Per la sessa *trinodale*, corrispondente a $\lambda = \cdot 41182$, si ha l'equazione dei nodi

$$21{,}452\, z^3 - 31{,}933\, z^2 + 12{,}562\, z - 1 = 0,$$

che ammette le soluzioni

$$_3z_1 = \cdot 10625 \quad , \quad _3z_2 = \cdot 49370 \quad , \quad _3z_3 = \cdot 88863 .$$

I nodi della sessa trinodale del bacino occidentale del Garda corrispondono quindi alle sezioni 14,787; 40.765; 58.883 e distano da Riva km 9,39; 32,365; 46,48 rispettivamente.

La sessa trinodale ha quindi qualche probabilità di effettiva realizzazione.

3. — *La sessa di 30ᵐ circa.* Questa oscillazione registrata solo a Riva (limitatamente alla parte occidentale), non può interessare che la parte settentrionale del Garda. Defant, nel suo secondo lavoro sulle sesse del Benaco, ritiene che essa riguardi il tratto Riva - Toscolano, presentando in corrispondenza di quest'ultima località la sua linea nodale, il che equivale a considerare l'intera parte settentrionale del Garda come una baia.

E' noto che l'oscillazione libera dell'acqua in una baia è uguale a quella di un lago di lunghezza doppia, tenuto conto della correzione di bocca. Perciò se l ed h denotano rispettivamente la lunghezza e la profondità di una baia rettangolare di profondità costante, il periodo T dell'oscillazione libera nella baia, avente il nodo alla sua bocca e il ventre al suo estremo, sarà dato dalla formula

$$T = \frac{4l}{\sqrt{gh}}, \qquad [11]$$

quando si trascuri la correzione dovuta alla bocca.

Una formula che dà un valore approssimato di detta correzione fu trovata da geofisici giapponesi [1], che si valsero negli sviluppi analitici delle conclusioni raggiunte da Rayleigh nello studio della reazione dell'aria sopra un pistone rettangolare vibrante, di lunghezza molto grande rispetto alla larghezza. Fatto

$$P = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{3}{2} - \gamma - lg\frac{\pi b}{4l}\right),$$

dove γ è la costante di Mascheroni ($\gamma = 0.5772...$) e b la larghezza della bocca, la correzione di bocca è data dall'espressione

$$\left(1 + 4P\frac{b}{l}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad [12]$$

per la quale il periodo va moltiplicato.

Il problema di cercare il periodo d'oscillazione in baie di forma irregolare è riducibile a quello delle sesse in un lago a forma irregolare. Per un lago la cui forma non differisca molto da quella di un bacino rettangolare, i citati scienziati giapponesi hanno svolto una teoria che conduce alla formula

$$T_i = \frac{2l}{i\sqrt{gh_0}} \left\{ 1 + \frac{1}{2lb_0} \int_0^l \Delta b(x) \cos\frac{2i\pi x}{l}\, dx + \frac{1}{2lS_0} \int_0^l \Delta S(x) \cos\frac{2i\pi x}{l}\, dx \right\}, \qquad [13]$$

dove l indica la lunghezza dell'intero bacino, misurata lungo una linea parallela alla linea di valle: x la distanza da uno degli estremi del bacino; $b(x)$ la larghezza e $S(x)$ la superficie della sezione trasversale condotta normalmente alla linea di valle alla distanza x; b_0 la larghezza media, S_0 la sezione media e h_0 la profondità media dell'intero bacino; infine è

$$\Delta b(x) = b(x) - b_0 \quad , \quad \Delta S(x) = S(x) - S_0 .$$

Nella parentesi, la prima espressione seguente l'unità indica la correzione per la larghezza, la seconda la correzione per il volume; nell'insieme, costituiscono la correzione totale della semplice formula, detta di Merian,

$$T_i = \frac{2l}{i\sqrt{gh_0}} \text{ (*)} .$$

Applicando la [13] al caso di una baia, basta considerare un lago la cui forma sia simmetrica rispetto al piano verticale attraverso la linea di bocca, e cercare il periodo delle sesse di tale lago. Questo periodo, corretto dall'azione della bocca, è il richiesto periodo d'oscillazione della baia.

Feci, in questo senso, una prima applicazione della [13] nella validità dell'ipotesi di Defant, considerando come bocca della baia la sezione all'altezza di Toscolano. I calcoli però, tenuto conto della correzione di bocca, portarono, com'era da prevedere, ad un valore del

---

(*) Sterneck ([6]) nell'applicazione di questo metodo al Mar Nero, per una svista, in corrispondenza della linea centrale del mare, in luogo di -1 (valore di $\cos \frac{2\pi}{l} .x$), pone 0; le correzioni della formula di Merian da lui determinate ($-.067$, $-.094$) vanno sostituite rispettivamente con $-.065$ e $-.101$ e il periodo del Mar Nero risulta pertanto di $4^h,94$ anzichè di $4^h,98$.

periodo troppo elevato, dell'ordine di 45^m. La sessa di 30^m non interessa quindi l'intera parte settentrionale del lago.

Riapplicai la [13] e la [12] al tratto che da Riva va alla sezione distante 21.1 km, corrispondente alla zona più profonda del lago.

I dati per il calcolo della sessa uninodale ($i=1$) sono contenuti nella tabella N. 2.

Poiché

$$\frac{l}{2}=21{,}1\quad b_0=3{,}34\,km,\ S_0=\cdot 7752\,km^2,\ h_0=232{,}1\,m$$

consegue

$$\frac{1}{lb_0}\int_0^{\frac{l}{2}} \Delta\, b(x)\cos 2\pi\frac{x}{l}\,dx=-\cdot 05741\ ;$$

$$\frac{1}{lS_0}\int_0^{\frac{l}{2}} \Delta\, S(x)\cos 2\pi\frac{x}{l}\,dx=-\cdot 08026\ ;\ T=\frac{2l}{\sqrt{gh_0}}\times\cdot 86233=25^m{,}41.$$

TABELLA N. 2

SEZIONI	x km	$b(x)$ 10^4cm	$\Delta b(x)$	$S(x)$ km^2	$\Delta S(x)$	$\cos 2\pi\frac{x}{l}$
1	·0	0·0	—33·4	0·0	—·7752	+1·0000
2	·6	31·0	— 2·4	·3885	—·3867	+ ·9960
3	1·6	30·0	— 3·4	·5248	—·2504	+ ·9718
4	2·6	23·5	— 9·9	·4725	—·3027	+ ·9260
5	3·6	24·8	— 8·6	·5080	—·2672	+ ·8598
6	4·6	26·4	— 7·0	·6020	—·1732	+ ·7745
7	5·6	27·0	— 6·4	·6455	—·1297	+ ·6721
8	6·6	29·9	— 3·5	·7230	—·0522	+ ·5548
9	7·6	33·5	+ ·1	·8340	+·0588	+ ·4251
10	8·6	39·8	+ 6·4	·9285	+·1533	+ ·2862
11	9·6	32·8	— ·6	·8110	+·0358	+ ·1409
12	10·6	31·8	— 1·6	·8445	+·0713	— ·0075
13	11·6	31·9	— 1·5	·8145	+·0393	— ·15575
14	12·6	30·8	— 2·6	·7855	+·0103	— ·3007
15	13·6	34·0	+ ·6	·7800	+·0048	— ·4386
16	14·6	33·8	+ ·4	·8120	+·0368	— ·5673
17	15·6	38·0	+ 4·6	·7950	+·0198	— ·6834
18	16·1	36·5	+ 3·1	·8070	+·0318	— ·7354
19	16·6	36·3	+ 2·9	·8280	+·0528	— ·7839
20	17·1	35·0	+ 1·6	·8095	+·0343	— ·8278
21	17·6	40·2	+ 6·8	·8740	+·0988	— ·8674
22	18·6	37·5	+ 4·1	·9655	+·1903	— ·9316
23	19·6	42·3	+ 8·9	1·1020	+·3268	— ·9752
24	20·6	46·1	+12·7	1·1935	+·4183	— ·9973
25	21·1	45·5	+12·1	1·1415	+·3663	—1·0000

La correzione di bocca essendo dell'ordine di 1.17, il periodo corretto diviene

$$T = 29^m,7.$$

Circa le due integrazioni numeriche va osservato che, a motivo della simmetria del supposto lago, basta limitare l'integrazione all'intervallo $0 \div l/_2$, poiché

$$\frac{1}{2lh_0}\int_0^l = \frac{1}{lh_0}\int_0^{\frac{l}{2}},$$

ed anche i valori di $\cos \frac{2\pi x}{l}$, per valori di x simmetricamente disposti nei due tratti $\frac{l}{2}$, sono uguali tra loro. La sessa di circa 30^m osservata talvolta a Riva dovrebbe quindi interessare la parte settentrionale del Garda, limitata a sud dalla zona più profonda del lago.

4. — *Golfo di Desenzano.* Nel golfo di Desenzano possono presentarsi almeno due tipi di movimenti: sesse dovute allo zoccolo subacqueo prossimo alla costa e sesse dovute al golfo preso nel suo complesso e limitato a nord della linea Punta di Sermione-Punta S. Sevino.

Per quanto riguarda il primo tipo di sesse (« shelf-seiches » dei Giapponesi) valgono i profili da *a* a *p*. La media dei primi sette profili (fig. 6) dà una distanza dello zoccolo dalla riva di $l = 500$ m con una profondità media di $h = 4$ m. Il periodo della sessa corrispondente sarà pertanto

$$T = \frac{4l}{\sqrt{gh}} = 5^m,3.$$

La media dei profili da *h* a *p* (fig. 6) dà una distanza dello zoccolo dalla riva di 2000 m, con una profondità media di m 16; è allora

$$T = 10^m,65.$$

I profili da *d* a *o* danno in media i seguenti valori: $l = m550$, $h = 4,4$. Consegue

$$T = 5^m,6.$$

Le sesse dovute allo zoccolo del lago registrate a Desenzano dovrebbero avere quindi un periodo di ca. 6^m. Le sesse di questo periodo effettivamente registrate a Desenzano sono quindi da attribursi, più che a sesse multinodali interessanti l'intero lago (cosa molto improbabile), allo zoccolo del golfo. A Rivoltella, che trovasi proprio alla base del golfo stesso, le sesse dovute allo zoccolo dovrebbero avere periodi dell'ordine di 11^m.

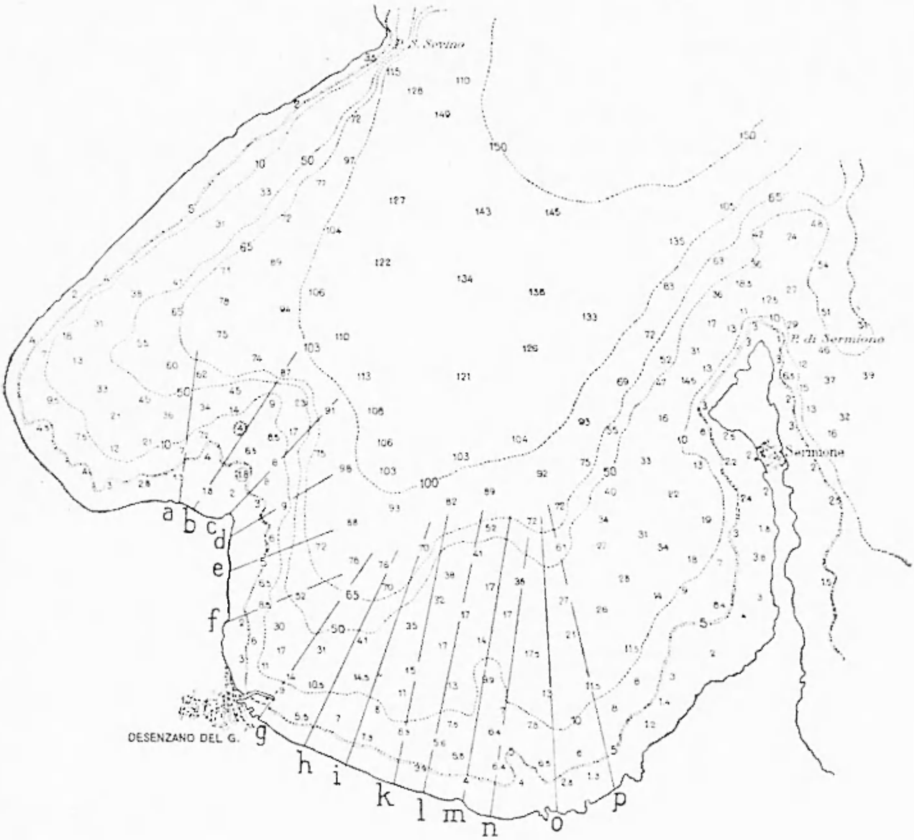

Fig. 6

Veniamo ora alle sesse interessanti l'intero golfo. Ho applicato dapprima il metodo che si sintetizza nella [13]. Le sezioni, prese normalmente alla linea di valle di cui già ci siamo serviti, sono praticamente quelle che si riferiscono al golfo di Desenzano nella trattazione relativa al bacino occidentale del Garda, salvo qualche modifica per le sezioni di bocca e l'aggiunta di una sezione sul fondo. La tabella N. 3 contiene i dati e i risultati del calcolo.

La correzione di bocca, calcolata con la [12] — dove va fatto $\frac{b}{l}=\cdot 76$ —, è dell'ordine di 1,302. Il periodo corretto sarà pertanto

$$T=18^{m},5 .$$

Questo valore può ritenersi di prima approssimazione. Un valore meno approssimativo possiamo ottenerlo applicando il metodo di Goldberg, che riguarda appunto le sesse dei golfi.

Uno dei metodi d'integrazione numerica più usati nel problema delle sesse fu dedotto da Defant da una trasformazione introdotta da R. von Sterneck nell'equazione del moto e in quella di continuità (la 1 e la 2 della precedente Nota). Lo spostamento orizzontale ξ e il dislivello η, per un determinato periodo T, abbiano l'espressione

$$\xi=\xi_{v} \cos \frac{2\pi}{T} \quad , \quad \eta=\eta_{v} \cos \frac{2\pi}{T} ,$$

dove ξ_v, η_v rappresentano i massimi valori di queste grandezze, indipendenti dal tempo, nel posto $x=x_v$. Introducendo questi valori

TABELLA N. 3

SEZIONI	x km	$b(x)$ 10^4cm	$S(x)$ 10^6cm²	$\Delta b(x)$ km	$\Delta S(x)$ km²	$\cos 2\pi \frac{x}{l}$
1	0	0	0	−5·58	−·2992	+1·0000
2	·35	34·5	200	−2·13	−·2792	+ ·9818
3	·85	42·1	365	−1·37	−·2627	+ ·9114
4	1·35	44·5	980	−1·13	−·2012	− ·7819
5	1·85	72·7	1615	+1·69	−·1377	+ ·6039
6	2·35	75·5	2335	+1·97	−·0657	+ ·3886
7	2·85	77·5	3615	+2·17	+·0653	+ ·1490
8	3·35	75·0	4540	+1·92	+·1548	− ·0996
9	3·85	71·5	4950	+1·57	+·1958	− ·3123
10	4·35	67·5	5175	+1·17	+·2483	− 56305
11	4·85	65·8	4815	+1·00	+·1823	− ·7497
12	5·60	50·6	4975	− ·52	+·1983	− ·9396
13	6·3	47·8	5000	− ·80	+·2008	−1·0000

$$l=12,6\ km \ , \ h_0=m\ 53,6 \ , \ T_0=18^{m},3 \ ;$$

$$\frac{1}{l b_0}\int_0^{\frac{l}{2}} \Delta b(x) \cos 2\pi \frac{x}{l}\, dx=-\cdot 0126 \ ; \ \frac{1}{l S_0}\int_0^{\frac{l}{2}} \Delta S(x) \cos 2\pi \frac{x}{l}\, dx=-\cdot 2132$$

$$T=18,3\times\cdot 7742=14^{m},2$$

nelle equazioni di moto e di continuità sopra ricordate, prescindendo dal fattore tempo, si ottiene per i valori massimi ξ_ν, η_ν le relazioni

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{4\pi^2}{T^2}\,\xi_\nu = g\,\frac{d\eta}{dx}\,, \\ &\eta_\nu = -\frac{1}{b(x)}\,\frac{d}{dx}\left[S(x_\nu)\,.\,\xi_\nu\right]. \end{aligned}\right. \qquad [14]$$

Per l'integrazione delle [14] vale il metodo di Defant. Il bacino venga suddiviso in n parti, mediante n sezioni trasversali S_ν, praticate nei punti $x = x_\nu$, $\nu = 1, 2,\dots\, n$; Δx_ν, Δv_ν siano le parti dell'asse x e le porzioni di superficie libera comprese fra due sezioni S_ν e $S_{\nu-1}$, rispettivamente; m_ν sia il volume d'acqua che nel tempo $T/4$, fra la quiete e l'estremo spostamento di una particella, passa attraverso la sezione S_ν. Poichè per onde lunghe η varia molto lentamente con x, Defant suppone costante il valore del dislivello per ogni superficie parziale Δv_ν; il suo ammontare sia $\eta_{\nu-1}$. In tal modo, la superficie libera in oscillazione viene sostituita da n gradini. L'integrazione numerica in un lago s'inizia con un arbitrario valore η_0 del dislivello, in corrispondenza del ventre all'estremo $x=o$ dell'asse; vengono quindi, di suddivisione in suddivisione, calcolate le grandezze m, ξ_ν, η_ν secondo lo schema

$$\left\{\begin{aligned} &m_\nu = -\sum_1^n \eta_{\nu-1}\,\Delta v_\nu \;\; ; \quad \xi_\nu = \frac{m_\nu}{S_\nu}\,, \\ &\Delta\eta_\nu = \frac{4\pi^2}{g T^2}\cdot\xi_\nu\cdot\Delta x_\nu,\; \eta_\nu = \eta_{\nu-1} + \Delta\eta_\nu. \end{aligned}\right. \qquad [15]$$

Posto $m_\nu = S_\nu\cdot\xi_\nu$, la 1ª delle [15] deriva dalla 2ª delle [14]: la terza consegue dalla 1ª delle [14], sostituendo i differenziai $d\eta_\nu$, dx con le differenze $\Delta\eta_\nu$, Δx_ν.

La scelta corretta del periodo T comporta all'altro estremo chiuso del lago ($x = x_n$), dove $\xi = 0$, l'annullarsi del volume del liquido

$$m_n = -\sum_1^n \eta_{\nu-1}\cdot\Delta v_\nu = 0.$$

Se rimane un « resto » $m_n > 0$ (per $\eta_0 > 0$, periodo troppo piccolo) o $m_n < 0$ (per $\eta_0 < 0$, periodo troppo grande), il calcolo va ripetuto, con periodo opportunamente modificato. Interpolazioni lineari tra valori troppo grandi e troppo piccoli conducono al risultato finale più rapidamente.

Il metodo esposto può servire anche per golfi, applicando lo schema [15] a partire dall'estremità chiusa, con l'avvertenza che la condizione al contorno esige che sia all'estremità aperta del golfo $\eta_n = 0$.

Un altro metodo relativo ai golfi è, come si è detto, quello di J. Goldberg, il quale prende le mosse dalla bocca del golfo ($\eta_0 = 0$), supponendo arbitraria la massa d'acqua m_0 che attraversa la sezione di bocca S_0 nel tempo $T/4$.

La massa d'acqua m_0 determina i massimi spostamenti orizzontali ξ_ν e dislivelli η_ν nell'interno del golfo. La 1ª delle [14], scritta nella forma

$$\frac{d\eta_\nu}{dx} = \frac{4\pi^2}{gT^2}\,\xi_\nu,$$

dà l'inclinazione della tangente al profilo longitudinale della superficie libera oscillante del golfo. Poiché questa inclinazione viene supposta costante per ogni suddivisione, ciò che equivale a ritenere trascurabile il piccolissimo ammontare di $\frac{d^2\eta}{dx^2}$ in tutti i casi di bacini naturali, il profilo longitudinale del golfo in oscillazione viene approssimato in una linea spezzata, i cui tratti corrono parallelamente alla tangente di profilo. Ora è

$$\Delta\,\eta_{\nu+1} = \frac{d\eta_\nu}{dx}\,\Delta x_{\nu+1}$$

e lo schema di calcolo per l'integrazione numerica diviene:

$$\xi_\nu = \frac{m_\nu}{S_\nu}\,,\quad \frac{d\eta_\nu}{dx} = \frac{4\pi^2}{gT^2}\,\xi_\nu,$$

$$\eta_{\nu+1} = \eta_\nu + \frac{d\eta_\nu}{dx}\,\Delta\,x_{\nu+1}\,,\quad m_{\nu+1} = m_\nu - \frac{\eta_\nu + \eta_{\nu+1}}{2}\,\Delta v_{\nu+1}\,. \qquad [16]$$

L'ultima delle [16] esprime che l'eccedenza dell'acqua entrante da S_ν su quella uscente da $S_{\nu+1}$ determina il dislivello sulla superficie $\Delta v_{\nu+1}$ che intercede fra queste sezioni.

La relazione sul contorno per l'estremo chiuso del golfo dà ora nuovamente

$$m_n = m_0 - \sum_{1}^{n-1}{}_{n}\,\frac{\eta_\nu + \eta_{\nu+1}}{2}\,\Delta\,v_{\nu+1} = 0. \qquad [17]$$

L'applicazione del metodo di Goldberg al golfo di Desenzano, con i periodi 14^m; $15^m,0$; $15^m,2$ ha dato per m_n i valori —'081, —'049, —'031 rispettivamente che non soddisfano la [17]. Il valore $T = 15^m,5$ portò invece ad un m_n pressochè nullo.

La tabella N. 4 contiene i dati e l'andamento del calcolo.

Tabella N. 4

Sezioni	S_v $10^4 m^2$	Δx_v m	Δv_v $10^4 m^2$	$T = 15^m.5$ ξ_v m	η_v m	m_v $10^7 m^3$
0	50·00	0	0	20·0	0	1·000
1	49·75	700	343	19·9	·065	·989
2	48·15	750	394	19·7	·134	·950
3	54·75	500	316	16·4	·180	·900
4	49·50	500	347	16·8	218	831
5	45·40	500	357	16·4	·257	·746
6	36·45	500	377	17·6	295	·642
7	23·35	500	394	22·2	·336	·518
8	16·15	500	374	23·7	·388	383
9	9·80	500	301	26·3	·443	·258
10	3·65	500	206	43·8	·504	·160
11	2·00	500	166	34·0	·606	·068
12	0·00	350	113		661	—·004

Corretto il periodo dall'effetto di bocca, si ottiene in definitiva

$$T = 20^m,2$$

La fig. 7 dà l'andamento degli spostamenti verticali provocati dalla sessa.

Il periodo della sessa del golfo di Desenzano risulta quindi prossimo a quello della sessa binodale del bacino occidentale del Garda: nelle registrazioni però dovrebbe essere facilmente individuabile poi-

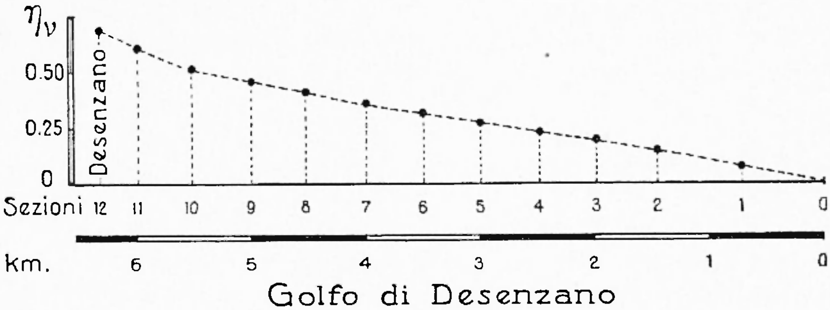

Fig. 7

ché, com'è noto, le sesse dei golfi o delle baie sono notevolmente smorzate. In forza di questo smorzamento, anzi, il periodo della sessa del golfo potrebbe risultare lievemente maggiore; l'azione prolungatrice dello smorzamento potrà però essere dedotta solo dalle osservazioni.

5. — *Golfo di Salò.* Il golfo di Salò presenta caratteristiche morfologiche adatte all'amplificazione dei moti liberi e forzati delle sue acque. La bocca del golfo può pensarsi costituita dalla sezione verticale che dalla punta orientale dell'isola di Garda va alla punta di Fasano. Il golfo (fig. 8) è stato suddiviso in 15 sezioni mediante piani trasversali, normali alla linea di valle. I dati necessari al calcolo sono contenuti parte nella tabella N. 5 e parte nella tabella N. 6.

Un primo valore approssimato della sessa uninodale interessante l'intero golfo fu ottenuto applicando la [13].

La tabella N. 5 contiene i dati e i risultati del calcolo relativo.

TABELLA N. 5

SEZIONI	x km	$b(x)$ km	$S(x)$ km²	$\Delta b(x)$ km	$\Delta S(x)$ km²	$\cos 2\pi \frac{x}{l}$
1	0	0	0	—2·05	—·144	1·0000
2	·25	·55	·018	—1·50	—·126	·9910
3	·65	·90	·011	—1·15	—·103	·9411
4	1·07	1·00	·051	—1·05	—·093	·8431
5	1·18	·93	·053	—1·12	—·091	·7071
6	1·88	1·15	·068	— ·90	—·076	·5122
7	2·28	1·37	·087	— ·68	—·057	·3529
8	2·65	1·45	·100	— ·60	—·044	·1639
9	3·03	1·50	·102	— ·55	—·042	— ·0369
10	3·43	3·00	·118	+ ·95	—·026	— ·2467
11	3·85	3·37	·161	+1·32	+·020	— ·4550
12	4·22	3·30	·233	+1·25	+·089	— ·6198
13	4·62	3·33	·256	+1·28	+·112	— ·7713
14	5·00	3·50	·294	+1·45	+·150	— ·8832
15	5·48	3·67	·333	+1·62	+·189	— ·9728
16	5·92	3·75	·382	+1·70	+·238	—1·0000

$$l = 11{,}84\ km \quad , \quad h_0 = 70{,}2\ m,$$

$$\frac{1}{l b_0} \int_0^{\frac{l}{2}} \Delta b(x) \cos 2\pi \frac{x}{l}\, dx = -\cdot 199 \quad ; \quad \frac{1}{l S_0} \int_0^{\frac{l}{2}} \Delta S(x) \cos 2\pi \frac{x}{l}\, dx = -\cdot 267$$

Poiché $T_0 = \frac{2l}{\sqrt{g h_0}} = 15^m{,}03$ consegue

$$T = T_0 (1 - \cdot 199 - \cdot 267) = 8^m.03 .$$

Inoltre, tenuto conto che $\frac{b}{l} = \cdot 6334$ si ha, per la correzione di bocca, 1,286 per cui, il periodo corretto sarà

$$T = 10^m.3.$$

Un valore più approssimato dà l'applicazione del metodo di Goldberg. Il valore $T = 9^m$ essendo risultato troppo piccolo, furono fatte

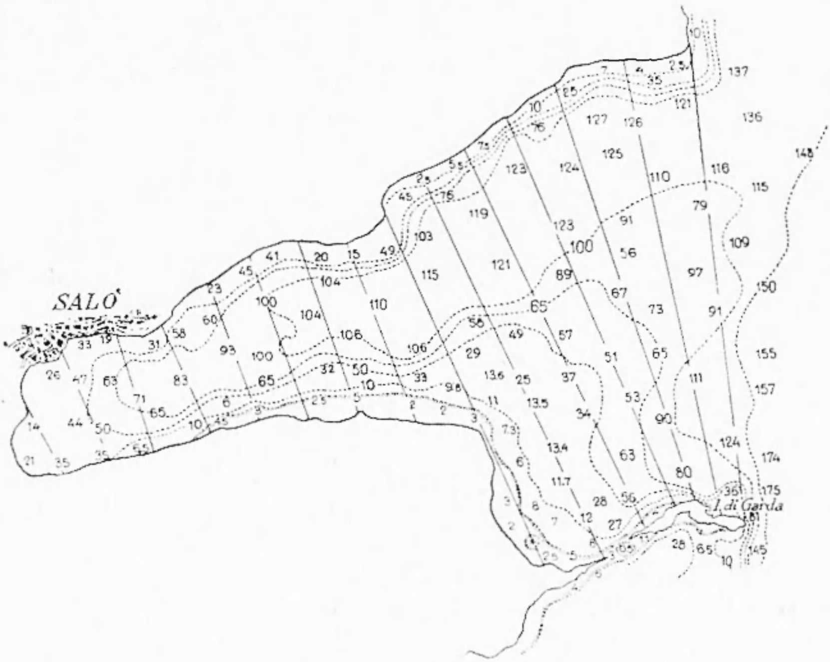

Fig. 8

ulteriori applicazioni con i valori $T = 10^m$ e $T = 10^m,4$. Quest'ultimo soddisfa pienamente alle condizioni del metodo. La tabella N. 6 contiene i dati e i risultati dell'elaborazione. Ricordando la correzione di bocca, consegue per il periodo della sessa uninodale del golfo di Salò il valore

$$T = 13^m.37.$$

La fig. 9 dà l'andamento della componente verticale della sessa lungo tutto il golfo. Riesce interessante il suo confronto con l'analogo andamento per la sessa del golfo di Desenzano. Dalle tabelle risulta che la sezione di bocca del golfo di Salò è circa ·76 volte quella del golfo di Desenzano; dagli spostamenti massimi calcolati per gli estremi dei

TABELLA N. 6

SEZIONI	S_v $10^4 m^2$	Δx_v m	Δv_v $10^4 m^2$	$T = 10^m,4$ ξ_v m	η_v m	m_v $10^7 m^3$
0	38·2	0	0	26·2	0	1·000
1	33·3	410	140	29·8	·119	·992
2	29·4	480	137	32·9	·267	·966
3	25·6	380	108	36·3	396	·930
4	23·3	400	117	37·6	·516	·875
5	16·4	370	133	48·4	·690	·793
6	11·8	420	140	57·8	·900	682
7	10·2	400	80	58·8	1·139	·600
8	10·0	380	55	53·1	1·370	·531
9	8·7	370	52	52·2	1·573	·451
10	6·8	400	50	51·1	1·789	·370
11	5·3	100	43	51·3	2·014	·288
12	5·1	410	37	41·0	2·244	·209
13	4·1	420	35	31·0	2·422	·127
14	1·8	400	40	15·6	2·550	·028
15	0·0	250	9		2·590	·005

due golfi si deduce che l'ampiezza della sessa a Salò è circa tre volte quella dell'analoga a Desenzano.

Il golfo di Salò, come risulta dalla fig. 8, all'altezza di Barbarano si restringe bruscamente e sensibilmente, dando luogo ad un golfo meno esteso, che può essere, a sua volta, sede di moti stazionari liberi. Ho determinato pertanto il periodo della sessa uninodale relativa a questo golfo ristretto. Mi sono valso di 9 sezioni, dalla bocca

TABELLA N. 7

SEZIONI	S_v $10^4 m^2$	Δx_v m	Δv_v $10^4 m^2$	$T = 7^m,5$ ξ_v m	η_v m	m_v $10^6 m^3$	$T = 7,^m8$ ξ_v m	η_v m	m_v $10^6 m^3$
0	11·5	0	0	8·7	0	1·000	8·7	0	1·000
1	10·2	400	62	9·6	069	·979	9·6	·064	980
2	10·0	380	55	9·2	·142	·921	9·3	131	926
3	8·7	370	52	9·5	210	·829	9·7	·194	841
4	6·8	400	50	10·4	286	·705	10·7	·265	·726
5	5·3	400	43	10·6	369	561	11·2	344	·595
6	5·1	410	37	8·4	·455	·412	8·9	·428	452
7	4·1	420	35	5·9	·523	·211	7·4	·497	290
8	1·8	400	40	1·2	·570	022	4·5	549	·081
9	0·0	250	9		·576	— ·030		570	031

al fondo del golfo. I dati relativi e i risultati definitivi del calcolo (fatti dapprima con i valori $7^m.5$ e $7^m.8$ per il periodo) sono contenuti nella tabella N. 7.

In questo caso il fattore della correzione di bocca risulta pari a 1.2724, per cui il periodo corretto è

$$T = 9^m,7.$$

Terminati i calcoli, ho avuto a disposizione le registrazioni di

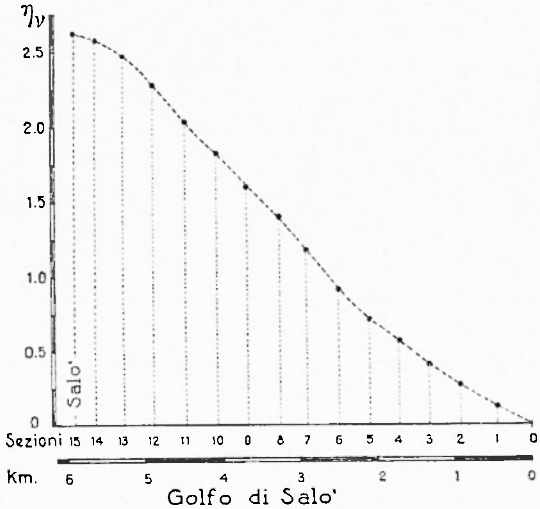

Fig. 9

Salò, dalle quali risulta che, in effetti, a Salò vengono registrate *esclusivamente* (almeno nei due anni 1910-11 dei quali ho potuto usufruire) le due sesse sopra calcolate, con prevalenza del tipo relativo al golfo ridotto. Riporto qui alcuni esempi di registrazione (fig. 10 a pag. seguente).

Le conclusioni generali saranno dedotte dopo lo studio della parte orientale del lago (Peschiera-Garda) e l'esame delle registrazioni.

Roma — Istituto Nazionale di Geofisica — marzo 1947.

RIASSUNTO

Si riferiscono i risultati della seconda parte di una ricerca sulle sesse del Benaco. Dopo aver corretto i valori ottenuti da Defant nel suo primo lavoro sullo stesso argomento, si prova che la sessa di 30^m *ca.*

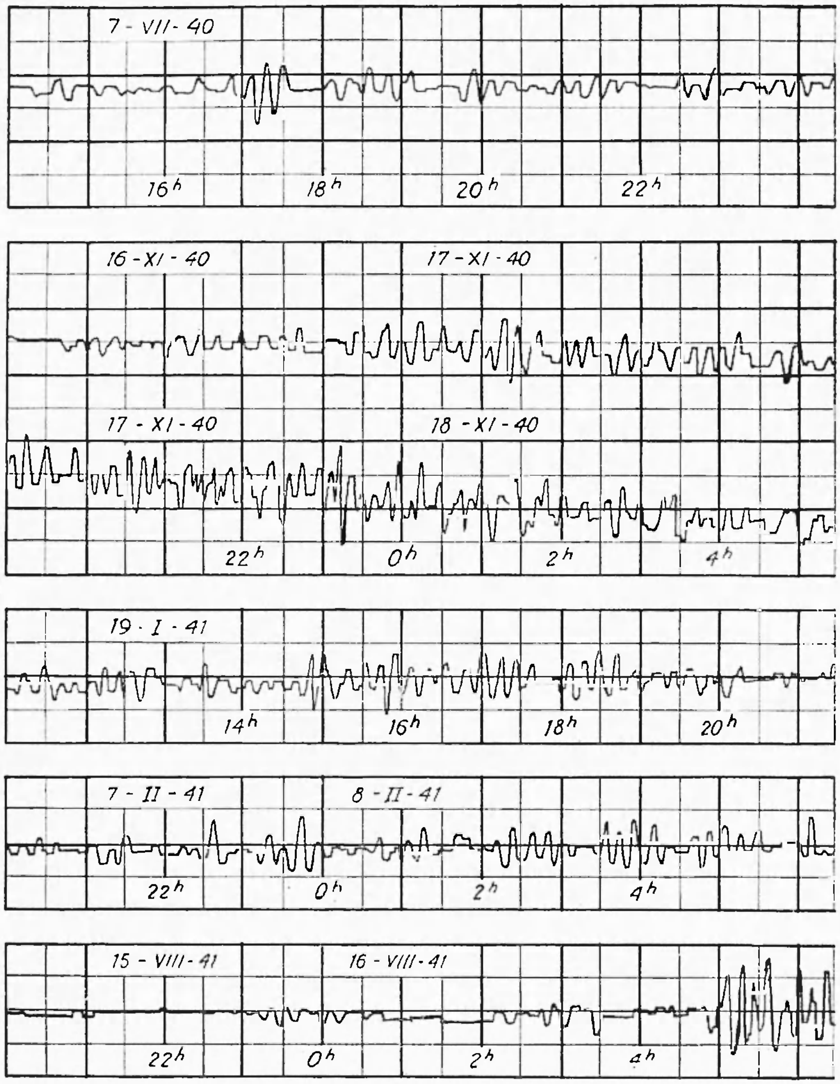

Fig. 10

Esempi di sesse del Golfo di Salò $\left(\text{riduz. ca } \frac{1}{6}\right)$

registrata a Riva, interessa solo la parte settentrionale del Garda. Si calcolano quindi le sesse della parte occidentale del lago (Desenzano-Riva), mettendo in evidenza che solo la binodale soddisfa alle condizioni fisiche richieste per la sua realizzazione. Si determinano infine *le sesse e le "shelf-seiches" del Golfo di Desenzano e le sesse del Golfo di Salò.*

BIBLIOGRAFIA

(1) CALOI P.: *Le sesse del lago di Garda - Parte Prima* - Ann. di Geof., I, 1 (1948).

(2) DEFANT A.: *Ueber die stehenden Seespiegelschwankungen (Seiches) in Riva am Gardasee* - Sitzungsberichte der K. Akademie der Wissenschaften, Wien, Mathematisch. - Naturwiss. Klasse, CXVII Band, Abteilung II, 1908.

(3) DEFANT A.: *Neue Methode zur Ermittlung der Eigenschwingungen (Seiches) von abgeschlossenen Wassermassen (Seen, Buchten usw.)* - Annalen der Hydrographie u.s.w., 46, 1918. Heft II.

(4) NAKAMURA S. e HONDA K.: *Seiches in Some Lakes of Japan* - The journal of the College of Science, Imperial University of Tokyo, XXVIII, 1910.

(5) HONDA K., TERADA T., YOSHIDA Y. e ISITANI D.: *An Investigation on the secondary undulations of oceanic tides* - The journal of the College of Science, XXIV, 1908.

(6) STERNECK R.: *Zur Theorie der Gezeiten des Mittelmeeres* - Sitzungsb. d. Ak. d. Wiss., CXXII, Abt. II, 1913.

(7) GOLDBERG J. und KEMPNI K.: *Ueber die Schwingungen der Bucht von Bakar und das allgemeine Problem der Seiches von Buchten* - Académie Jougo-slave des Sciences et des Beaux - Arts, Zagreb, 1937.