

DAS VERHALTEN VON BLATTFEDERSEISMOGRAPHEN BEI FREIER UND ERZWUNGENER SCHWINGUNG

VON O. FÖRTSCH

Einleitung. — In der geophysikalischen Literatur findet man eine grosse Anzahl von Arbeiten, die sich theoretisch und experimentell mit dem Verhalten von Erschütterungsmessern jeder Art und mit der Diskussion der von diese erhaltenen Aufzeichnungen befassen. Bei theoretischen Betrachtungen wird der Ansatz der Kräfte so gestaltet, dass er auf die Schwingungsdifferentialgleichung, d. h. dass er auf eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten führt. M. Rössiger^(1, 2) zeigte jedoch durch Rechnung und Experiment, dass ein Blattfederseismograph oder, um es noch allgemeiner auszudrücken, eine von einer Blattfeder einseitig gehaltene Masse nicht den Voraussetzungen genügt, die zu einer Differentialgleichung obigen Types führen. Er beschränkte sich darauf, nachzuweisen, dass eine derartig aufgehängte Masse nicht, wie es sich aus der Schwingungsdifferentialgleichung ergibt, eine, sondern zwei Eigenschwingungen besitzt. Die Richtigkeit seiner Überlegungen konnte er an Modellversuchen nachweisen.

Bei der Anwendung der Formeln von Rössiger auf die transportablen Blattfederseismographen, wie sie nach den Angaben von Wiechert und Angenheister^(3, 4) gebaut worden sind, ergaben sich für die zweite Eigenschwingung Werte, die weit ausserhalb des Bereiches lagen, der für die Seismik von Interesse ist. Danach konnte man auch weiterhin diese Erschütterungsmesser als einfache Schwingungssysteme betrachten. Genauere Untersuchungen zeigten jedoch, dass das Verhalten dieser Instrumente doch merklich von dem abweicht, was nach der gewöhnlichen Schwingungsdifferentialgleichung zu erwarten ist. Dies äusserte sich besonders bei den Eichungen auf Schütteltischen im Bereich der höheren Frequenzen. Diese Diskrepanz veranlasste den Verfasser, das Verhalten dieser Seismographen näher zu studieren. In dieser Abhandlung soll über die Untersuchungsergebnisse berichtet werden. Im ersten Teil wird die Theorie der Blattfederseismographen dargestellt werden. Sie stützt sich auf

den Kräfteansatz, den Rössiger in seinen Arbeiten als Ausgangspunkt aufgestellt hat. Er wird hier jedoch durch Hinzufügung eines Dämpfungsgliedes und bei Vertikalseismographen durch Berücksichtigung des von der Spiralfeder herrührenden Anteiles der Direktionskraft erweitert. Im zweiten Teil wird im Rahmen der Erörterung der experimentellen Ergebnisse vor allem der Einfluss der Klemmung der Blattfedern auf das Verhalten der Seismographen dargelegt. Der Einspannwert und seine Abhängigkeit vom Material der Klemmung wird untersucht.

I. TEIL. DIE THEORIE DER BLATTFEDERSEISMOGRAPHEN.

1. *Aufstellung der Differentialgleichungen.* — Sie gründet sich, wie schon erwähnt, auf den Gedankengang von Rössiger. Um gleich den allgemeinen Fall zu behandeln, wird die Theorie des Vertikalseismographen, dessen Masse von einer Spiralfeder gehalten wird, dargestellt. Die Theorie des Horizontalseismographen kann dann als ein Spezialfall aufgefasst werden. Fig. 1 zeigt das Schema des Vertikalseismographen. In die Figur ist ein Achsenkreuz so hineingelegt, dass dessen Ursprung in die Klemmstelle der Blattfeder am Stativ

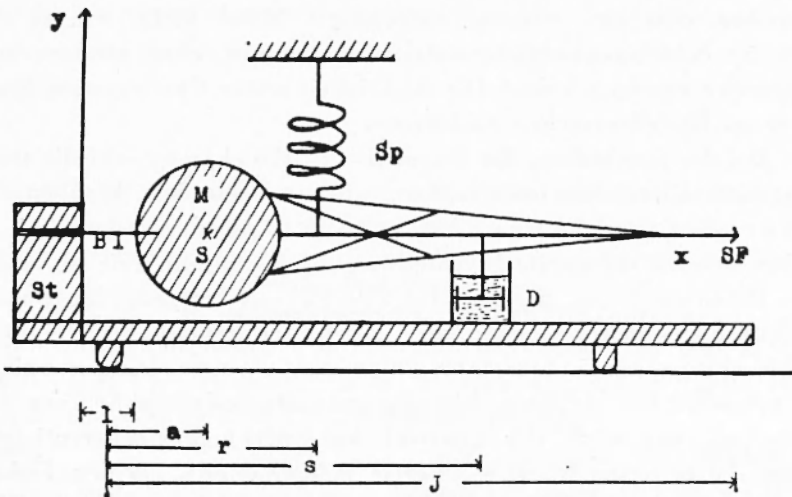


Fig. 1. Schema eines Vertikalseismographen. *St* = Stativ mit Klemmvorrichtung für die Blattfeder; *M* = Masse des Seismographen; *S* = deren Schwerpunkt; *Sp* = Spiralfeder; *D* = Dämpfung; *SF* = Schreibfeder bzw. Ende des an der Masse befestigten starren Hebels; *Bl* = Blattfeder; *l* = freie Länge der Blattfeder; *a* = Abstand Blattfedermitte-Schwerpunkt; *r* = Abstand Blattfedermitte-Angriffspunkt der Spiralfeder; *s* = Abstand Blattfedermitte-Angriffspunkt der Dämpfung; *J* = Abstand Blattfedermitte-Schreibfeder.

fällt. Die x -Achse verläuft horizontal und fällt mit der Nulllage des Systems zusammen. Die y -Achse steht senkrecht darauf und weist nach oben.

Bei einer Auslenkung des Apparates aus seiner Gleichgewichtslage wird, solange es sich um kleine Beträge handelt, die y -Koordinate eines Punktes $x > l$ durch die Beziehung gegeben:

$$y = y_1 + (x - l) \varphi,$$

wobei y_1 die Auslenkung des Blattfederendes $x_1 = l$ und φ der Winkel ist, den die Tangente an das Blattfederende mit der x -Achse bildet.

Vernachlässigt man die Masse der Blattfeder gegenüber der des Seismographen, was hier ohne Bedenken immer erlaubt ist, so ist bei einer Biegung der Blattfeder nach den Lehren der Elastizitätstheorie das Moment der Normalspannung an irgendeiner Stelle $x < l$ gleich der Summe der Momente der äusseren Kräfte. Es gilt folgende Beziehung:

$$+N = -B \frac{d^2 y}{dx^2} = +\Sigma M \quad [1]$$

B bedeutet hierbei die Steifigkeit der Blattfeder. Sie ist das Produkt aus dem Elastizitätsmodul E und dem äquatorialen Trägheitsmoment I . $B = E \cdot I$. Für eine Feder rechteckigen Querschnittes ist $I = d^3 h / 12$ ($d =$ Dicke, $h =$ Breite der Feder). Das Minuszeichen muss in Gl. [1] gesetzt werden, da einer positiven Krümmung ein negatives Moment entspricht. Die Bedeutung der in den folgenden Ausführungen benutzten Buchstaben l , a , r , s und J ist aus der Fig. 1 zu ersehen. Die Momente der angreifenden Kräfte sind:

a) Das Moment der Trägheitskraft der Masse des Schwingungssystems gegenüber Drehung.

$$M_{tr} = K_0 \frac{d^2 \varphi}{dt^2};$$

K_0 stellt das Trägheitsmoment der Seismographenmasse bezogen auf den Schwerpunkt dar. Die Gesamtmasse des Schwingungssystems wollen wir mit M bezeichnen.

b) Das Trägheitsmoment der Masse gegenüber Translation.

$$M_{tr} = M \frac{d^2 y_a}{dt^2} \left(a + \frac{l}{2} - x \right) = M \left(\frac{d^2 y_1}{dt^2} + \left(a - \frac{l}{2} \right) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right) \left(a + \frac{l}{2} - x \right);$$

c) Das Moment der Dämpfungskraft.

$$M_d = 2\varrho \frac{dy_s}{dt} \left(s + \frac{l}{2} - x \right) = 2\varrho \left(\frac{dy_1}{dt} + \left(s - \frac{l}{2} \right) \frac{d\varphi}{dt} \right) \left(s + \frac{l}{2} - x \right);$$

Hierbei bedeutet 2ϱ die Kraft, die nötig ist, um den Dämpfungskolben mit der Geschwindigkeit 1 cm/s zu bewegen.

d) Das Moment der Rückstellkraft der Spiralfeder.

$$M_c = cy_r \left(r + \frac{l}{2} - x \right) = c \left(y_1 + \left(r - \frac{l}{2} \right) \varphi \right) \left(r + \frac{l}{2} - x \right);$$

c ist die Rückstellkraft, die einer Federverlängerung von 1 cm entspricht.

e) Das Moment, das von Kräften hervorgerufen wird, die von aussen am Schwingungssystem angreifen. In den meisten Fällen sind diese Kräfte Trägheitskräfte, die bei Erschütterungen des Bodens, und damit auch des Stativs des Seismographen, im Schwerpunkt der Masse M angreifen. (Hier ist vorausgesetzt, dass das Koordinatensystem im Stativ verankert ist und daher die Erschütterungen mitmacht). Wird mit $\eta(t)$ der Amplitudenverlauf der Erschütterung bezeichnet, so erhält man für das Moment der äusseren Kräfte $f(t)$:

$$f(t) = M \left(a + \frac{l}{2} - x \right) \frac{d^2\eta}{dt^2};$$

Durch Einsetzen der Ausdrücke a. bis e. in Gl. [1] erhalten wir:

$$\begin{aligned} -B \frac{d^2y}{dx^2} = & K_s \frac{d^2\varphi}{dt^2} + M \left(\frac{d^2y_1}{dt^2} + \left(a - \frac{l}{2} \right) \frac{d^2\varphi}{dt^2} \right) \left(a + \frac{l}{2} - x \right) + 2\varrho \left(\frac{dy_1}{dt} \right. \\ & \left. + \left(s - \frac{l}{2} \right) \frac{d\varphi}{dt} \right) \left(s + \frac{l}{2} - x \right) + c \left(y_1 + \left(r - \frac{l}{2} \right) \varphi \right) \left(r + \frac{l}{2} - x \right) + \\ & + M \left(a + \frac{l}{2} - x \right) \frac{d^2\eta}{dt^2}; \quad [1a] \end{aligned}$$

Durch Ordnen der Glieder geht Gl. [1a] über in:

$$\begin{aligned} -B \frac{d^2y}{dx^2} = & \left[K_s + M \left(a - \frac{l}{2} \right) \left(a + \frac{l}{2} - x \right) \right] \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\varrho \left(s - \frac{l}{2} \right) \left(s + \frac{l}{2} - \right. \\ & \left. - x \right) \frac{d\varphi}{dt} + c \left(r - \frac{l}{2} \right) \left(r + \frac{l}{2} - x \right) \varphi + M \left(a + \frac{l}{2} - x \right) \frac{d^2y_1}{dt^2} + 2\varrho \left(s + \right. \\ & \left. + \frac{l}{2} - x \right) \frac{dy_1}{dt} + c \left(r + \frac{l}{2} - x \right) y_1 + M \left(a + \frac{l}{2} - x \right) \frac{d^2\eta}{dt^2}; \quad [1b] \end{aligned}$$

Um die Werte für y_1 und φ , die gesucht sind, ermitteln zu können, muss Gl. [1b] ein- und zweimal nach x integriert werden.

$$\begin{aligned}
 -B \frac{dy}{dx} = & \left[K_0 + M \left(a - \frac{l}{2} \right) \left(a + \frac{l}{2} - \frac{x}{2} \right) \right] x \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2Q \left(s - \frac{l}{2} \right) \\
 & \left(s + \frac{l}{2} - \frac{x}{2} \right) x \frac{d\varphi}{dt} + c \left(r - \frac{l}{2} \right) \left(r + \frac{l}{2} - \frac{x}{2} \right) x \varphi + M \left(a + \frac{l}{2} - \right. \\
 & \left. - \frac{x}{2} \right) x \frac{d^2 y_1}{dt^2} + 2Q \left(s + \frac{l}{2} - \frac{x}{2} \right) x \frac{dy_1}{dt} + c \left(r + \frac{l}{2} - \frac{x}{2} \right) x y_1 \\
 & + M \left(a + \frac{l}{2} - \frac{x}{2} \right) x \frac{d^2 \eta}{dt^2} + C_1; \qquad [2a]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -By = & \left[K_0 + M \left(a - \frac{l}{2} \right) \left(a + \frac{l}{2} - \frac{x}{3} \right) \right] \frac{x^2}{2} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2Q \left(s - \frac{l}{2} \right) \\
 & \left(s + \frac{l}{2} - \frac{x}{3} \right) \frac{x^2}{2} \frac{d\varphi}{dt} + c \left(r - \frac{l}{2} \right) \left(r + \frac{l}{2} - \frac{x}{3} \right) \frac{x^2}{2} \varphi + M \left(a + \frac{l}{2} - \right. \\
 & \left. - \frac{x}{3} \right) \frac{x^2}{2} \frac{d^2 y_1}{dt^2} + 2Q \left(s + \frac{l}{2} - \frac{x}{3} \right) \frac{x^2}{2} \frac{dy_1}{dt} + c \left(r + \frac{l}{2} - \frac{x}{3} \right) \frac{x^2}{2} y_1 \\
 & + M \left(a + \frac{l}{2} - \frac{x}{3} \right) \frac{x^2}{2} \frac{d^2 \eta}{dt^2} + C_1 x + C_2; \qquad [2b]
 \end{aligned}$$

Die Konstanten C_1 und C_2 lassen sich aus den Randbedingungen bestimmen. Für den am Stativ eingeklemmten Blattfederanfang muss gelten:

$$\text{für } x = 0 : \frac{dy}{dx} = 0 \text{ und } y = 0 ;$$

Daraus ergibt sich:

$$C_1 = 0 \text{ und } C_2 = 0 ;$$

Um die Werte $\varphi = \frac{dy}{dx}_{x=l}$ und y_1 zu erhalten, ist in Gl. [2a]

und [2b] für $x = l$ einzusetzen. In den folgenden Gleichungen sind beide Seiten gegenüber Gl. [2a] und [2b] durch l bzw. $l^2/2$ dividiert worden.

$$\begin{aligned}
 -\frac{B}{l} \varphi = & \left[K_0 + M \left(a - \frac{l}{2} \right) a \right] \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2Q \left(s - \frac{l}{2} \right) s \frac{d\varphi}{dt} + c \left(r - \frac{l}{2} \right) r \varphi \\
 & + Ma \frac{d^2 y_1}{dt^2} + 2Q s \frac{dy_1}{dt} + c r y_1 + Ma \frac{d^2 \eta}{dt^2} ; \qquad [3a]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{2B}{l^2} y_1 = & \left[K_0 + M \left(a - \frac{l}{2} \right) \left(a + \frac{l}{6} \right) \right] \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2Q \left(s - \frac{l}{2} \right) \left(s + \frac{l}{6} \right) \frac{d\varphi}{dt} + \\
 & + c \left(r - \frac{l}{2} \right) \left(r + \frac{l}{6} \right) \varphi + M \left(a + \frac{l}{6} \right) \frac{d^2 y_1}{dt^2} + 2Q \left(s + \frac{l}{6} \right) \frac{dy_1}{dt} + \\
 & + c \left(r + \frac{l}{6} \right) y_1 + M \left(a + \frac{l}{6} \right) \frac{d^2 \eta}{dt^2}; \quad [3b]
 \end{aligned}$$

Durch Zusammenziehen der Glieder erhalten wir die endgültigen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}
 \left[K_0 + M \left(a - \frac{l}{2} \right) a \right] \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2Q \left(s - \frac{l}{2} \right) s \frac{d\varphi}{dt} + \left[\frac{B}{l} + c \left(r - \frac{l}{2} \right) r \right] \varphi + \\
 + M a \frac{d^2 y_1}{dt^2} + 2Q s \frac{dy_1}{dt} + c r y_1 = -M a \frac{d^2 \eta}{dt^2}; \quad [4a]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left[K_0 + M \left(a - \frac{l}{2} \right) \left(a + \frac{l}{6} \right) \right] \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2Q \left(s - \frac{l}{2} \right) \left(s + \frac{l}{6} \right) \frac{d\varphi}{dt} + c \left(r - \frac{l}{2} \right) \\
 \left(r + \frac{l}{6} \right) \varphi + M \left(a + \frac{l}{6} \right) \frac{d^2 y_1}{dt^2} + 2Q \left(s + \frac{l}{6} \right) \frac{dy_1}{dt} + \left[\frac{2B}{l} + c \left(r + \frac{l}{6} \right) \right] y_1 \\
 = -M \left(a + \frac{l}{6} \right) \frac{d^2 \eta}{dt^2}; \quad [4b]
 \end{aligned}$$

Der wesentliche Inhalt dieser Gleichungen tritt deutlicher in Erscheinung, wenn man folgende Koordinatentransformation einführt:

$$y_1 = y' + \frac{l}{2} \varphi;$$

Die Bewegungen des Schwingungssystems werden damit durch die Bewegungen y' des zum starren System gehörigen Punktes mit der Abszisse $x = l/2$ und den Tangentenwinkel φ beschrieben.

$$\begin{aligned}
 (K_0 + M a^2) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2Q s^2 \frac{d\varphi}{dt} + \left(\frac{B}{l} + c r^2 \right) \varphi + M a \frac{d^2 y'}{dt^2} + 2Q s \frac{dy'}{dt} + \\
 + c r y' = -M a \frac{d^2 \eta}{dt^2}; \quad [5a]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M a \frac{d^3 \varphi}{dt^3} + 2Q s \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + c r \varphi + M \frac{d^2 y'}{dt^2} + 2Q \frac{dy'}{dt} + \left(\frac{12B}{l^2} + c \right) y' = -M \frac{d^2 \eta}{dt^2}; \quad [5b]
 \end{aligned}$$

Die Gl. [5a] und [5b] stellen die Differentialgleichungen zweier gekoppelter Schwingungssysteme in der allgemeinsten Form dar. Das eine ist ein Drehschwingungssystem. Die Drehungen erfolgen um den

Punkt mit den Koordinaten $x = l/2$ und $y = 0$. Das andere System vollführt Translationsschwingungen. Ein Blattfederseismograph kann als ein schwingungsfähiges Gehilde mit zwei Freiheitsgraden und daher auch mit zwei Eigenschwingungen angesehen werden. Diese beiden sind jedoch durch die Masse, die Dämpfung und die Spiralfeder sehr stark miteinander gekoppelt. Daher treten die Eigenschwingungen nie in Erscheinung. Es kommt ihnen keine praktische Bedeutung zu. Bedeutungsvoll sind nur die Koppelfrequenzen.

In den folgenden Abschnitten soll die Lösung der Differentialgleichungen [5] für den homogenen Fall ($\eta = 0$) und für den inhomogenen Fall einer periodischen Anregung behandelt werden. Die Lösungen lassen sich hier wegen der grossen Ähnlichkeit der sich entsprechenden Koeffizienten ohne grosse Mühe finden.

2. Lösung der homogenen Differentialgleichungen. — Die Ausgangsgleichungen erhalten wir aus Gl. [5a] und [5b] indem wir $\eta = 0$ setzen. Gl. [6a] entsteht durch Subtraktion der mit a multiplizierten Gl. [5b] von Gl. [5a].

$$K_0 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2\varrho s(s-a) \frac{d\varphi}{dt} + \left(\frac{B}{l} + cr(r-a) \right) \varphi + 2\varrho(s-a) \frac{dy'}{dt} + \left(c(r-a) - \frac{12Ba}{l^3} \right) y' = 0; \quad [6a]$$

$$Ma \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2\varrho s \frac{d\varphi}{dt} + cr\varphi + M \frac{d^2 y'}{dt^2} + 2\varrho \frac{dy'}{dt} + \left(\frac{12B}{l^3} + c \right) y' = 0; \quad [6b]$$

Die Lösungen setzen wir wie üblich in der Form $\varphi = \Phi e^{\lambda t}$ und $y_1 = Y e^{\lambda t}$ an. Nach Bildung der ersten und zweiten Ableitungen dieser Ausdrücke nach der Zeit t , Einsetzen derselben in Gl. [6a] und [6b] und nach Division mit $e^{\lambda t}$ ergeben sich:

$$\Phi \left[K_0 \lambda^2 + 2\varrho s(s-a) \lambda + \left(\frac{B}{l} + cr(r-a) \right) \right] + Y \left[2\varrho(s-a) \lambda + \left(c(r-a) - \frac{12Ba}{l^3} \right) \right] = 0 \quad [7a]$$

$$\Phi \left[Ma \lambda^2 + 2\varrho s \lambda + cr \right] + Y \left[M \lambda^2 + 2\varrho \lambda + \left(\frac{12B}{l^3} + c \right) \right] = 0 \quad [7b]$$

Sieht man von den trivialen Lösungen $\Phi = 0$ und $Y = 0$ ab, so

können die Gl. [7a] und [7b] nur befriedigt werden, wenn der Wert der Koeffizientendeterminante verschwindet. Aus dieser Bedingung lässt sich λ berechnen. Gleichzeitig folgt aber noch, dass Φ und Y keine von einander unabhängige Grössen sein können. Darauf greifen wir später wieder zurück.

Die Ausrechnung der Determinante führt auf eine Gleichung vierten Grades in λ .

$$\begin{aligned}
 MK_0 \lambda^4 + 2Q \left(K_0 + M(s-a)^2 \right) \lambda^3 + \frac{12B}{l^3} \left[K_0 \left(1 + \frac{cl^3}{12B} \right) + M \left(a^2 + \frac{l^2}{12} + \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{cl^3}{12B} (r-a)^2 \right) \right] \lambda^2 + 2Q \frac{12B}{l^3} \left[s^2 + \frac{l^2}{12} + \frac{cl^3}{12B} (r-s)^2 \right] \lambda + \frac{12B}{l^3} \left(\frac{B}{l} + \right. \\
 \left. + c \left(r^2 + \frac{l^2}{12} \right) \right) = 0 \quad [8']
 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
 \lambda^4 + 2Q \frac{K_0 + M(s-a)^2}{MK_0} \lambda^3 + \frac{12B}{l^3 MK_0} \left[K_0 \left(1 + \frac{cl^3}{12B} \right) + M \left(a^2 + \frac{l^2}{12} + \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{cl^3}{12B} (r-a)^2 \right) \right] \lambda^2 + 2Q \frac{12B}{l^3 MK_0} \left(s^2 + \frac{l^2}{12} + \frac{cl^3}{12B} (r-s)^2 \right) \lambda + \frac{12B}{l^3} \\
 \left(\frac{B}{l} + c \left(r^2 + \frac{l^2}{12} \right) \right) = 0 \quad [8'']
 \end{aligned}$$

In Gl. [8''] führen wir gleich einige Vereinfachungen durch, indem wir praktisch bedeutungslose Glieder weglassen. Bei allen Seismographen ist $l/\sqrt{12}$ klein gegen a , s und r . Das Verhältnis ist im allgemeinen kleiner als 1:50. Ungünstigenfalls wird es 1:10. Daher kann bedenkenlos $l^2/12$ als Summand in den Koeffizienten von Gl. [8''] gestrichen werden. Gewöhnlich ist auch $cl^3/12B$ klein gegen 1. Bei allen Horizontalpendeln, die ohne Spiralfeder arbeiten, ist c von vorneherein Null. Bei den Vertikalapparaten mit Spiralfeder ist man aus technischen Gründen gezwungen die Grössen B , l und c so zu wählen, dass $cl^3/12B$ klein gegen 1 wird. Einerseits muss nämlich B so gross und l so klein gemacht werden, dass die Masse des Seismographen eine sichere Führung hat. Andererseits darf c ein bestimmtes Mass nicht überschreiten, da die Spiralfeder nur zuverlässig arbeiten kann, wenn sie durch die Masse merklich gereckt wird. Im allgemeinen liegt der Wert von $cl^3/12B$ zwischen 10^{-3} und 10^{-5} . Um daher die Übersichtlichkeit der Formeln durch praktisch bedeutungslose

Ausdrücke nicht zu stören, werden in Gl. [8''] auch die Summanden $cl^2/12B$ vernachlässigt. Damit geht die Gleichung über in:

$$\lambda^4 + 2\varrho \frac{K_0 + M(s-a)^2}{MK_0} \lambda^3 + \frac{12B}{l^3 MK_0} (K_0 + Ma^2) \lambda^2 + 2\varrho \frac{12B}{l^3 MK_0} s^2 \lambda + \frac{12B}{l^3 MK_0} \left(\frac{B}{l} + cr^2 \right) = 0 \quad [8]$$

Eine exakte Bestimmung der Wurzeln von Gl. [8] lässt sich schwerlich herbeiführen. Zu praktisch ausreichenden Näherungslösungen kommt man aber, wenn man berücksichtigt, dass der Ausdruck $12B(K_0 + Ma^2)/l^3 MK_0$ sehr gross gegen 1 ist. Sein Wert liegt bei den gebräuchlichen Seismographen wohl immer über 10^4 . Dies bedeutet, dass die Absolutbeträge von zwei Wurzeln der Gl. [8] gross sein müssen gegenüber denen der beiden anderen Wurzeln.

Da in Gl. [8] sämtliche Koeffizienten positiv sind, sind die Lösungen alle komplex. Wir setzen sie in der für Schwingungsprobleme allgemein üblichen Form an:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\delta_1 + i \sqrt{\omega_1^2 - \delta_1^2} \quad ; \quad \lambda_2 = -\delta_1 - i \sqrt{\omega_1^2 - \delta_1^2} \quad ; \\ \lambda_3 &= -\delta_2 + i \sqrt{\omega_2^2 - \delta_2^2} \quad ; \quad \lambda_4 = -\delta_2 - i \sqrt{\omega_2^2 - \delta_2^2} \quad ; \end{aligned} \quad [9]$$

Da $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4) = 0$ sein muss, ergibt sich durch Ausmultiplizieren:

$$\begin{aligned} \lambda^4 + 2(\delta_1 + \delta_2)\lambda^3 + (\omega_1^2 + \omega_2^2 + 4\delta_1\delta_2)\lambda^2 + 2(\delta_1\omega_2^2 + \delta_2\omega_1^2)\lambda + \omega_1^2\omega_2^2 \\ = \lambda^4 + 2k_1\lambda^3 + k_2\lambda^2 + 2k_3\lambda + k_4 = 0 \end{aligned} \quad [10]$$

Die Koeffizienten k_1, k_2, k_3 und k_4 werden nur der kürzeren Schreibweise wegen vorübergehend eingeführt. Sind, wie in Gl. [8], k_2, k_3 und k_4 gross gegen 1 und k_1 , so muss ω_2^2 gross gegen ω_1^2, δ_1 und δ_2 sein. Man kann also in k_2, k_3 und k_4 die Summanden, die ω_2^2 nicht enthalten, vernachlässigen. Damit kann man die Lösungen sofort hinschreiben

$$\omega_2^2 = k_2 \quad ; \quad \delta_1 = k_3/k_2 \quad ; \quad \omega_1^2 = k_4/k_2 \quad ; \quad \delta_2 = k_1 - \delta_1 \quad ; \quad [10']$$

Durch Einsetzen der entsprechenden Werte aus Gl. [8] erhalten wir:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \sqrt{\frac{B/l + cr^2}{K_0 + Ma^2}} & \delta_1 &= \frac{\varrho s^2}{K_0 + Ma^2} \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{12B(K_0 + Ma^2)}{l^3 MK_0}} & \delta_2 &= \frac{\varrho(K_0 + M(s-a)^2)}{MK_0} - \frac{\varrho s^2}{K_0 + Ma^2}\end{aligned}\quad [11]$$

Damit sind die Differentialgleichungen [6a] und [6b] näherungsweise gelöst. Die Ausdrücke für φ und y_1 setzen sich aus den vier Partillösungen folgendermassen zusammen:

$$\begin{aligned}\varphi &= \Phi_1 e^{(-\delta_1 + i\sqrt{\omega_1^2 - \delta_1^2})t} + \Phi_2 e^{(-\delta_1 - i\sqrt{\omega_1^2 - \delta_1^2})t} \\ &+ \Phi_3 e^{(-\delta_2 + i\sqrt{\omega_2^2 - \delta_2^2})t} + \Phi_4 e^{(-\delta_2 - i\sqrt{\omega_2^2 - \delta_2^2})t}; [11a'] \\ y_1 &= Y_1 e^{(-\delta_1 + i\sqrt{\omega_1^2 - \delta_1^2})t} + Y_2 e^{(-\delta_1 - i\sqrt{\omega_1^2 - \delta_1^2})t} \\ &+ Y_3 e^{(-\delta_2 + i\sqrt{\omega_2^2 - \delta_2^2})t} + Y_4 e^{(-\delta_2 - i\sqrt{\omega_2^2 - \delta_2^2})t}; [11b']\end{aligned}$$

Die Koeffizienten Φ_n und Y_n sind konstante Amplitudenwerte. Es wurde oben bereits bemerkt, dass sie voneinander abhängig sind. Ihre Verknüpfung wird durch Gl. [7b] festgelegt zu:

$$Y_n = -\frac{Ma\lambda_n^2 + 2\varrho s\lambda_n + cr}{M\lambda_n^2 + 2\varrho\lambda_n + (12B/l^3 + c)} \Phi_n = -\alpha_n \Phi_n \quad ; \quad (n=1,2,3,4)\quad [12]$$

In Gl. [12] ist in der Klammer in Nenner c als Summand gegenüber $12B/l^3$ vernachlässigbar.

Durch Einsetzen der Werte λ_n ergeben sich für α_n folgende Ausdrücke:

$$\alpha_1 = +\frac{Ma(2\delta_1^2 - \omega_1^2) - 2\varrho s\delta_1 + r - 2i\sqrt{\omega_1^2 - \delta_1^2}(Ma\delta_1 - \varrho s)}{M(2\delta_1^2 - \omega_1^2) - 2\varrho\delta_1 + 12B/l^3 - 2i\sqrt{\omega_1^2 - \delta_1^2}(M\delta_1 - \varrho)} \cong 0 \quad ;\quad [13a]$$

$$z_2 = + \frac{Ma(2\delta_1^2 - \omega_1^2) - 2\varrho s\delta_1 + cr + 2i\sqrt{\omega_1^2 - \delta_1^2}(Ma\delta_1 - \varrho s)}{M(2\delta_1^2 - \omega_1^2) - 2\varrho\delta_1 + 12B/l^3 + 2i\sqrt{\omega_1^2 - \delta_1^2}(M\delta_1 - \varrho)} \cong 0; \quad [13h]$$

$$z_3 = + \frac{Ma(2\delta_2^2 - \omega_2^2) - 2\varrho s\delta_2 + cr - 2i\sqrt{\omega_2^2 - \delta_2^2}(Ma\delta_2 - \varrho s)}{M(2\delta_2^2 - \omega_2^2) - 2\varrho\delta_2 + 12B/l^3 - 2i\sqrt{\omega_2^2 - \delta_2^2}(M\delta_2 - \varrho)} \cong +a\left(1 + \frac{K_0}{Ma^2}\right); \quad [13c]$$

$$z_4 = + \frac{Ma(2\delta_2^2 - \omega_2^2) - 2\varrho s\delta_2 + cr + 2i\sqrt{\omega_2^2 - \delta_2^2}(Ma\delta_2 - \varrho s)}{M(2\delta_2^2 - \omega_2^2) - 2\varrho\delta_2 + 12B/l^3 + 2i\sqrt{\omega_2^2 - \delta_2^2}(M\delta_2 - \varrho)} \cong +a\left(1 + \frac{K_0}{Ma^2}\right); \quad [13d]$$

Das Auftreten von imaginären Gliedern in den Ausdrücken für die z -Werte besagt, dass in den Partillösungen die y -Schwingung eine Phasenverschiebung gegenüber der u -Schwingung besitzt. Die Koeffizienten der Imaginärteile sind aber klein gegenüber den Absolutbeträgen. Die Phasenverschiebungen sind daher ebenfalls klein. Ihnen kommt keine praktische Bedeutung zu. Sie können weggelassen werden. Der Wert der Gl. [13a] und [13b] wird hauptsächlich durch Glieder, die B als Faktor enthalten, bestimmt. Dasselbe gilt für Gl. [13c] und [13d]. Zu berücksichtigen ist nur, dass B im Ausdruck für ω_2^2 auftritt. Durch Einsetzen ergeben sich nach leichten Umformungen die angegebenen Näherungswerte. Die z -Werte haben die Dimension einer Länge. Auf ihre Bedeutung kommen wir später noch zurück.

Die Gl. [11a'] und [11b'] lassen sich folgendermassen umformen:

$$\begin{aligned} \varphi = & e^{-\delta_1 t} \left(f_1 \cos \sqrt{\omega_1^2 - \delta_1^2} t - i g_1 \sin \sqrt{\omega_1^2 - \delta_1^2} t \right) \\ & + e^{-\delta_2 t} \left(f_2 \cos \sqrt{\omega_2^2 - \delta_2^2} t - i g_2 \sin \sqrt{\omega_2^2 - \delta_2^2} t \right); \end{aligned} \quad [11a'']$$

oder

$$\varphi = C_1 e^{-\delta_1 t} \cos \left(\sqrt{\omega_1^2 - \delta_1^2} t + \gamma_1 \right) + C_2 e^{-\delta_2 t} \cos \left(\sqrt{\omega_2^2 - \delta_2^2} t + \gamma_2 \right); \quad [11a]$$

Hierbei sind:

$$f_1 = \Phi_1 + \Phi_2; \quad g_1 = \Phi_1 - \Phi_2; \quad f_2 = \Phi_3 + \Phi_4; \quad g_2 = \Phi_3 - \Phi_4; \quad [14a]$$

$$C_1 = \sqrt{f_1^2 - g_1^2} = 2\sqrt{\Phi_1\Phi_2}; \quad tg\gamma_1 = ig_1/f_1;$$

$$C_2 = \sqrt{f_2^2 - g_2^2} = 2\sqrt{\Phi_3\Phi_4}; \quad tg\gamma_2 = ig_2/f_2;$$

Für y' gilt das Entsprechende:

$$y' = e^{-\delta_1 t} (f'_1 \cos \sqrt{\omega_1^2 - \delta_1^2} t - ig'_1 \sin \sqrt{\omega_1^2 - \delta_1^2} t) \\ + e^{-\delta_2 t} (f'_2 \cos \sqrt{\omega_2^2 - \delta_2^2} t - ig'_2 \sin \sqrt{\omega_2^2 - \delta_2^2} t); \quad [11b'']$$

oder

$$y' = C'_1 e^{-\delta_1 t} \cos(\sqrt{\omega_1^2 - \delta_1^2} t + \gamma'_1) + C'_2 e^{-\delta_2 t} \cos(\sqrt{\omega_2^2 - \delta_2^2} t + \gamma'_2); \quad [11b]$$

Es bedeuten:

$$f'_1 = -\ddot{\Psi}_1 \kappa_1 - \ddot{\Psi}_2 \kappa_2 \cong \ddot{v}; \quad g'_1 = -\Phi_1 \kappa_1 + \Phi_2 \kappa_2 \cong 0;$$

$$C'_1 = -\sqrt{f_1'^2 - g_1'^2} \cong 0; \quad tg\gamma'_1 = ig'_1/f'_1; \quad \gamma'_1 = \gamma_1;$$

$$f'_2 = -\Phi_3 \kappa_3 - \Phi_4 \kappa_4 = -f_2 a (1 + \frac{K_0}{Ma^2}); \quad g'_2 = -\Phi_3 \kappa_3 + \Phi_4 \kappa_4 = -g_2 a (1 + \frac{K_0}{Ma^2});$$

$$C'_2 = -\sqrt{f_2'^2 - g_2'^2} = -C_2 a (1 + \frac{K_0}{Ma^2}); \quad tg\gamma'_2 = ig'_2/f'_2; \quad \gamma'_2 = \gamma_2; \quad [14b]$$

Damit sind alle Koeffizienten bis auf vier, nämlich C_1 , C_2 , γ_1 und γ_2 , die aus den jeweiligen Anfangsbedingungen zu berechnen sind, gegeben. Die homogenen Differentialgleichungen sind gelöst. Für die Bewegung eines Punktes des Schwingungssystems mit der Abszisse x lautet die Gleichung:

$$y_x = (x - \frac{l}{2}) \varphi + y' = C_1 (x - \frac{l}{2}) e^{-\delta_1 t} \cos(\sqrt{\omega_1^2 - \delta_1^2} t + \gamma_1) \\ + C_2 (x - \frac{l}{2} - a (1 + \frac{K_0}{Ma^2})) e^{-\delta_2 t} \cos(\sqrt{\omega_2^2 - \delta_2^2} t + \gamma_2); \quad [15]$$

Bei einem Anstoß der Masse des Seismographen führt dieser zwei Drehschwingungen aus. Die Drehachse der niederfrequenten Schwingung liegt in der Mitte der freien Länge der Blattfeder, $x = l/2$. Die Eigenfrequenz $\nu_1 = \omega_1/2\pi$ hängt ab 1. von der Summe der Drehmo-

mente, die von den Direktionskräften der Blatt- und der Spiralfeder erzeugt werden, bezogen auf die Drehachse und 2. von dem Trägheitsmoment der Seismographenmasse ebenfalls auf die Drehachse $x = l/2$ bezogen. Die zweite Drehschwingung hat als Drehachse den Punkt $x = a(1 + K_0/Ma^2) + l/2 = -z_3 + l/2$, $y = O$. Der Punkt $x = l/2$ erfährt keine Auslenkung durch die erste und der Punkt $x = a(1 + K_0/Ma^2) + l/2$ keine durch die zweite Schwingung. Dies hat schon Rössiger gefunden. Die z -Werte sind ungefähr gleich den mit dem richtigen Vorzeichen versehenen Abständen der Drehachsen von dem Abszissenpunkt, auf welchen sich die q - und y -Werte beziehen. In unserem Falle ist dies der Punkt $x = l/2$, da zu ihm die Werte y' gehören. Deshalb ist auch $z_1 \cong z_2 \cong 0$. z_3 und z_4 sind ungefähr gleich dem Abstand der beiden Drehachsen. Die Frequenz $\nu_2 = \omega_2/2\pi$ kann man sich hier dargestellt denken als das Produkt aus der Eigenfrequenz der Translationschwingung des Apparates und einem dimensionslosen Faktor, der von der Gestalt der Masse und der freien Länge der Blattfeder abhängt.

$$\nu_2 = \nu_T \sqrt[1 + \frac{Ma^2}{K_0}] = \frac{1}{2\pi} \sqrt[12B/l^3 M]} \sqrt[1 + \frac{Ma^2}{K_0}];$$

Die Direktionskraft für ν_2 wird praktisch nur durch die Blattfeder bestimmt. Für diese Schwingung ist sie $12B/l^3$, also $12/l^2$ mal grösser als der entsprechende Anteil an ν_1 . Die Direktionskraft der Spiralfeder c ist bei den üblichen Dimensionen der Seismographen gegenüber $12B/l^3$ verschwindend klein. Die Spiralfeder hat auf ν_2 keinen Einfluss. Die Dreibeigenschwingung und ν_1 sind praktisch identisch, für sie wird der Faktor ungefähr 1. Es sei hier nochmals betont, dass ν_1 und ν_2 keine Eigenfrequenzen, sondern Koppelfrequenzen sind.

M. Rössiger hat sich für den vereinfachten Fall des Seismographen ohne Dämpfung $\rho = 0$ und ohne Spiralfeder $c = 0$ mit der Berechnung der Drehachsen und der Koppelfrequenzen begnügt. Seine Ergebnisse, zu denen er auf einem anderen Wege der Berechnung gelangt ist, sind mit den obigen identisch. Es braucht daher bezüglich der sich daraus abzuleitenden Folgerungen nur auf die Veröffentlichungen von Rössiger verwiesen werden. Auf weitere Einzelheiten werden wir am Ende dieses Teiles der vorliegenden Abhandlung eingehen.

3. *Der Einschwingvorgang.* — Der Einschwingvorgang ist bei

einem gekoppelten Schwingungsgebilde noch viel verwickelter als er schon bei einem einfachen System ist. Um die Rechnungen nicht zu weitschweifend werden zu lassen, wollen wir uns auf den einfachsten Fall beschränken und führen in Gedanken folgenden Versuch aus:

Am Schwerpunkt des Seismographensystems greife eine konstante Kraft P an. Sie lenkt dieses aus seiner Nulllage aus. Zur Zeit $t = 0$ soll dann die Kraft verschwinden. Wir wollen nun die dadurch verursachte Bewegung des Seismographen untersuchen.

Zur Beschreibung der Bewegung des Systems bedienen wir uns wieder der Grössen φ und y' . Solange die Kraft P wirkt, sind beide konstant. Sie lassen sich aus dem Kräfteansatz berechnen.

$$+ B \frac{d^2 y}{dx^2} = P(a + \frac{l}{2} - x) - c(y' + r\varphi)(r + \frac{l}{2} - x);$$

Durch Integration erhalten wir:

$$B \frac{dy}{dx} = P(a + \frac{l}{2} - \frac{x}{2})x - c(y' + r\varphi)(r + \frac{l}{2} - \frac{x}{2})x;$$

$$By = P(a + \frac{l}{2} - \frac{x}{3})\frac{x^2}{2} - c(y' + r\varphi)(r + \frac{l}{2} - \frac{x}{3})\frac{x^2}{2};$$

Es interessieren wieder die Werte φ und y für $x = l$. Für dy/dx wird φ und für y wird $y_1 = y' + \varphi l/2$ in obigen Gleichungen eingesetzt, während gleichzeitig x durch l ersetzt wird. Subtrahiert man dann noch die obere Gleichung von der unteren und dividiert durch $l/6$, so bekommt man folgende Bestimmungsgleichungen für φ und y' :

$$\left(\frac{B}{l} + cr^2\right)\varphi + cry' = Pa;$$

$$cr\varphi + \left(\frac{12B}{l^3} + c\right)y' = P;$$

Daraus berechnen sich φ und y' , wenn man die oben diskutierten Vernachlässigungen macht, zu:

$$\varphi = \frac{Pa}{B/l + cr^2}; \quad y' = \frac{Pl^3}{12B} \left(1 - \frac{cra}{B/l + cr^2}\right) \cong 0;$$

Diese beiden Beziehungen müssen bis $t = 0$ einschliesslich gelten. Das Gleiche muss für die folgenden beiden der Fall sein.

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0; \quad \frac{dy'}{dt} = 0;$$

Diese vier Anfangshedingungen dienen zur Berechnung der Konstanten der Gl. [15]. Aus Gl. [11a''], [11b''], [14a] und [14b] erhalten wir für $t = 0$:

$$\varphi = f_1 + f_2 ;$$

$$y' = -a (1 + K_0/Ma^2) f_2 ;$$

$$0 = \delta_1 f_1 + i \sqrt{\omega_1^2 - \delta_1^2} g_1 + \delta_2 f_2 + i \sqrt{\omega_2^2 - \delta_2^2} g_2 ;$$

$$0 = -a \delta_2 (1 + K_0/Ma^2) f_2 - \sqrt{\omega_2^2 - \delta_2^2} a (1 + K_0/Ma^2) i g_2 ;$$

$$\delta_2 f_2 + \sqrt{\omega_2^2 - \delta_2^2} i g_2 = 0 ;$$

$$\text{damit ist auch: } \delta_1 f_1 + \sqrt{\omega_1^2 - \delta_1^2} i g_1 = 0 ;$$

Die Koeffizienten berechnen sich daraus, wenn man noch folgende Abkürzungen benutzt,

$$L = a (1 + K_0/Ma^2); \quad \varphi_a = -y'/L;$$

zu:

$$f_1 = \varphi - \varphi_a ; \quad f_2 = +\varphi_a ; \quad i g_1 = -(\varphi - \varphi_a) \delta_1 / \sqrt{\omega_1^2 - \delta_1^2} ;$$

$$i g_2 = -\varphi_a \delta_2 / \sqrt{\omega_2^2 - \delta_2^2} ;$$

$$C_1 = \frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2 - \delta_1^2}} (\varphi - \varphi_a) ; \quad C_2 = \frac{\omega_2}{\sqrt{\omega_2^2 - \delta_2^2}} \varphi_a ;$$

$$i g(-\gamma_1) = \frac{\delta_1}{\sqrt{\omega_1^2 - \delta_1^2}} ; \quad i g \gamma_2 = \frac{-\delta_2}{\sqrt{\omega_2^2 - \delta_2^2}} .$$

φ_a ist der Winkel, unter dem man von der Drehachse der zweiten Schwingung aus die Ordinate y' sieht. Die Schreibfeder, hezw. der Endpunkt des mit der Masse starr verbundenen Hebels der Registrier-einrichtung führt folgende Bewegung aus:

$$y_j = (\varphi - \varphi_a) \frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2 - \delta_1^2}} J e^{-\delta_1 t} \cos \left(\sqrt{\omega_1^2 - \delta_1^2} t - \arctg \frac{\delta_1}{\sqrt{\omega_1^2 - \delta_1^2}} \right) \\ + \varphi_a (J - L) e^{-\delta_2 t} \cos \left(\sqrt{\omega_2^2 - \delta_2^2} t - \arctg \frac{\delta_2}{\sqrt{\omega_2^2 - \delta_2^2}} \right) ;$$

In dieser Gleichung ist $\omega_2/\sqrt{\omega_2^2 - \delta_2^2} = 1$ gesetzt worden, da der Wert des Quotienten doch nur wenig davon abweicht. $\varphi - \varphi_a$ ist der maximale Auslenkungswinkel der ersten und φ_a der der zweiten Schwingung. Das Verhältnis der beiden Winkel ($\varphi_a/\varphi - \varphi_a$) ist im allgemeinen klein. Sie verhalten sich grössenordnungsmässig umgekehrt wie die Quadrate der Frequenzen. Daher tritt die hochfrequente Schwingung in den Registrierungen nicht in Erscheinung, zumindest nicht nennenswert.

4. Lösung der inhomogenen Differentialgleichungen. Die erzwungenen Schwingungen. — Als Ausgangsgleichungen dienen wieder die Gl. [5a] und [5b]. Die sinusförmige Bewegung des Bodens setzen wir in der Form an:

$$\eta = F \cos \omega t ;$$

Die Differentialgleichungen lauten somit:

$$(K_0 + Ma^2) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2\varrho s^2 \frac{d\varphi}{dt} + \left(\frac{B}{l} + cr^2\right) \varphi + Ma \frac{d^2 y'}{dt^2} + 2\varrho s \frac{dy'}{dt} + c y' = MaF \omega^2 \cos \omega t ; \quad [17a]$$

$$Ma \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2\varrho s \frac{d\varphi}{dt} + cr \varphi + M \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\varrho \frac{dy}{dt} + \left(\frac{12B}{l^3} + c\right) y = MF \omega^2 \cos \omega t ; \quad [17b]$$

Die Lösungen setzen wir wie üblich in der Form an:

$$\varphi = p_1 \cos \omega t + q_1 \sin \omega t ; y' = p_2 \cos \omega t + q_2 \sin \omega t ; [18]$$

Nach Bildung der ersten und zweiten Differentialquotienten von Gl. [18] und Einsetzen derselben in Gl. [17] erhält man für p_1 , q_1 , p_2 und q_2 aus der Bedingung, dass in Gl. [17a] und [17b] die Koeffizienten der cos- wie die der sin-Glieder verschwinden müssen, folgende Bestimmungsgleichungen:

$$\left(\frac{B}{l} + cr^2 - (K_0 + Ma^2)\omega^2\right) p_1 + 2\varrho s^2 \omega q_1 + (cr - Ma\omega^2) p_2 + 2\varrho s \omega q_2 = MaF \omega^2 ; \quad [19a]$$

$$-2\varrho s^2 \omega p_1 + \left(\frac{R}{l} + cr^2 - (K_0 + Ma^2)\omega^2\right) q_1 - 2\varrho s \omega p_2 + (cr - Ma\omega^2) q_2 = 0 ; \quad [19b]$$

$$(cr - Ma\omega^2) p_1 + 2\varrho s \omega q_1 + \left(\frac{12B}{l^3} + c - M\omega^2\right) p_2 + 2\varrho q_2 = MF \omega^2 ; \quad [19c]$$

$$-2\varrho s\omega p_1 + (cr - Ma\omega^2)q_1 - 2\varrho p_2 + \left(\frac{12B}{l^3} + c - M\omega^2\right)q_2 = 0; \quad [19d]$$

Die Auflösung dieses Gleichungssystems nach den Grössen p_1 , p_2 , q_1 und q_2 macht bei der speziellen Gestalt der Koeffizienten keine grosse Mühe. Zweckmässigerweise führt man folgende Abkürzungen ein, wobei bereits die früher besprochenen Vernachlässigungen gemacht werden:

$$R = \frac{B/l + cr^2}{K_0 + Ma^2} \frac{1}{\omega^2} - 1 + \frac{l^3 MK_0}{12B (K_0 + Ma^2)} \omega^2 + \frac{cl^3}{12B} \left(\frac{B/l}{K_0 + Ma^2} \frac{1}{\omega^2} - 1 \right) - \frac{l^3 M (B/l + cr^2 - 2cra)}{12B (K_0 + Ma^2)} \cong \frac{\omega_1^2}{\omega^2} - 1 + \frac{\omega^2}{\omega_2^2};$$

$$S = \frac{2\varrho s^2}{K_0 + Ma^2} \left(1 + \frac{l^2}{12s^2} + \frac{cl^3}{12B} \frac{(r-s)^2}{s^2} - \frac{l^3 \omega 2\varrho (K_0 + M(a-s)^2)}{12B (K_0 + Ma^2)} \right) = \frac{2\delta_1}{\omega} - \frac{2(\delta_1 + \delta_2)\omega}{\omega_0^2};$$

$$U_1 = \frac{2\varrho (a-s)l^3}{12B (K_0 + Ma^2)\omega} = \frac{2\delta_1 (a-s)l^3}{12Bs^2\omega} \cong 0;$$

$$V_1 = \frac{a}{K_0 + Ma^2} \frac{1}{\omega^2} \left(1 + \frac{cl^3}{12B} \left(1 - \frac{r}{a} \right) \right) \cong \frac{a}{K_0 + Ma^2} \frac{1}{\omega^2};$$

$$U_2 = \frac{2\varrho s(a-s)l^3}{12B (K_0 + Ma^2)\omega} = \frac{2\delta_1 (a-s)l^3}{12Bs\omega} \cong 0;$$

$$V_2 = \frac{l^3}{12B (K_0 + Ma^2) \omega^2} (B/l + cr(r-1) - K_0\omega^2) \cong 0;$$

$$L = a \left(1 + \frac{K_0}{Ma^2} \right);$$

Damit lassen sich die Ausdrücke für p_1 , q_1 , p_2 und q_2 einfach darstellen.

$$p_1 = \frac{U_1 S + V_1 R}{R^2 + S^2} MF \omega^2 = \frac{F}{L} \frac{R}{R^2 + S^2};$$

$$q_1 = \frac{V_1 S - U_1 R}{R^2 + S^2} MF \omega^2 = \frac{F}{L} \frac{S}{R^2 + S^2}; \quad [20]$$

$$p_2 = \frac{-U_2 S + V_2 R}{R^2 + S^2} MF \omega^2 \cong 0; \quad q_2 = \frac{V_2 S + U_2 R}{R^2 + S^2} MF \omega^2 \cong 0;$$

Setzt man nun diese Grössen in Gl. [18] ein, so ergibt sich:

$$\varphi = \frac{F}{L} V_d \cos(\omega t - \gamma) ; y' \cong 0 \quad [18']$$

wobei $V_d = 1/\sqrt{R^2 + S^2}$; und $\operatorname{tg}\gamma = S/R$;

Für die vom Seismographen aufgeschriebene Kurve erhalten wir folgende Gleichung:

$$y_j = J\varphi + y' = \frac{F}{L} J V_d \cos(\omega t - \gamma) ;$$

Damit ist die inhomogene Differentialgleichung auch völlig gelöst. Im Falle sinusförmiger erzwungener Schwingungen bleibt bei einem Seismographen mit Blattfederaufhängung die Drehachse der schnelleren Koppelschwingung im Raume in Ruhe, zumindest ist ihre Bewegung so klein, dass sie praktisch keine Rolle spielt. Die statische Vergrößerung eines Apparates V_s ist das Verhältnis der Indikatorlänge J (Abstand zwischen Blattfedermittle und Ende des Indikators) zum Abstand der Drehachsen der beiden Koppelschwingungen L . Die dynamische Vergrößerung V_d zeigt das Verhalten eines gekoppelten Schwingungsgebildes mit zwei entfernt voneinander liegenden Koppelfrequenzen. Bei diesen treten Resonanzstellen auf. Bei kleinen Frequenzen beginnt die Resonanzkurve mit dem Wert 0 und steigt zur ersten Resonanzstelle an, die allerdings durch die Dämpfungsvorrichtung unterdrückt werden kann. Zwischen den beiden Resonanzstellen erreicht die dynamische Vergrößerung den Wert 1 . Die zweite Resonanz bei ν_2 wird durch die üblichen, für die hohen Frequenzen zu schwach arbeitenden Dämpfungen kaum beeinflusst. Nach noch höheren Frequenzen hin sinkt die Vergrößerung der Seismographen wieder auf den Wert 0 ab. In Fig. 2 ist die Resonanzkurve und die Phasenverschiebungskurve für ein Beispiel eingetragen. Die beiden Koppelfrequenzen wurden zu $\nu_1 = 1 \text{ Hz}$ und $\nu_2 = 40 \text{ Hz}$ angenommen. Die Kurve (a) stellt den dämpfungsfreien Fall ($\rho = 0$) dar. Bei der Kurve (b) wurde aperiodische Dämpfung für ν_1 angenommen ($\delta_1 = \omega_1$) und $\delta_2 = 2\delta_1$ gesetzt. Die Phasen werden durch jede Resonanzstelle um π verschoben.

5. *Zusammenfassung und Folgerungen.* — Es soll hier nochmals kurz der Inhalt der vorstehenden Abschnitte zusammengefasst werden, um daran die Folgerungen für den Apparatebau abzuleiten. Wir haben gesehen, dass ein einseitig eingespannter Blattfederseismograph

kein einfaches Schwingungsgebilde, sondern ein aus zwei gekoppelten Eigenfrequenzen bestehendes System ist. Die eine Eigenschwingung ist eine Drehschwingung der Masse um einen Punkt, der um die Hälfte

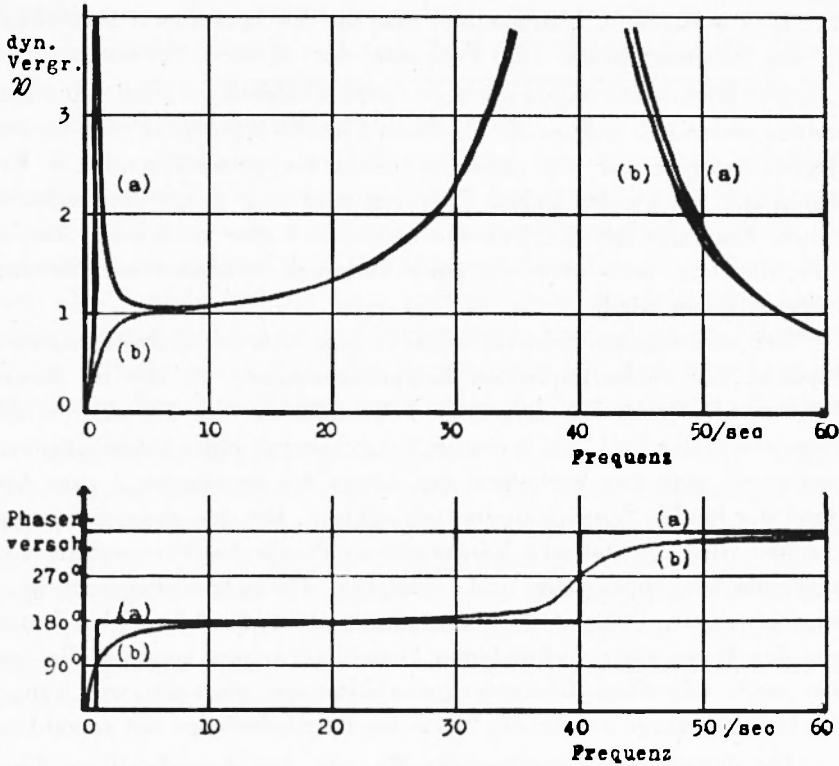


Fig. 2 - Die Abhängigkeit der dynamischen Vergrößerung und der Phasenverschiebung eines Blattfederseismographen bei erzwungenen Schwingungen von der Frequenz der Bodenbewegung. Der Berechnung wurden für die beiden Koppelfrequenzen des Apparates die Werte $\nu_1 = 1/s$ und $\nu_2 = 40/s$ zu Grunde gelegt. Kurve (a) gilt für den dämpfungs freien Fall ($Q = 0$). Kurve (b) gilt für den Fall aperiodischer Dämpfung für ν_1 ($\delta_1 = \omega_1$; $\delta_2 = 2\omega_1$).

der Blattfederlänge vom Einklemmpunkt am Stativ entfernt ist. Die Frequenz beträgt $\nu_\varphi = \sqrt{(B/l + cr^2)/4\pi^2 (K_0 + Ma^2)}$. Die zweite Eigenschwingung ist eine Translationsschwingung des Systems. Hier ist die Frequenz $\nu_\tau = \sqrt{12 B/4 \pi^2 l^3 M}$. Diese beiden Schwingungen sind stark miteinander gekoppelt. Es wird daher nur in Ausnahmefällen möglich sein, eine von beiden rein zu erhalten. Durch die Kopplung entstehen aus den Eigenfrequenzen zwei Koppelschwingungen, die sich alle beide als Drehschwingungen erweisen. Die erste unterscheidet sich von der Dreheigenschwingung nur um kleine, vernachlässigbare Grös-

sen. Die Drehachsen und die Frequenzen fallen praktisch zusammen. Die zweite Koppelschwingung hat ihre Drehachse im Schwingungsmittelpunkt der ersten und umgekehrt. Der Abstand der beiden ist $L = a (1 + K_0/Ma^2)$. L bezeichnet man als die äquivalente Pendellänge des Seismographen. Die Frequenz der zweiten Schwingung ist $v_2 = \sqrt{12 B (1 + Ma^2/K_0)/4\pi^2 l^3 M} = v_1 \sqrt{1 + Ma^2/K_0}$. v_2 ist im allgemeinen wesentlich grösser als v_1 . Beim Einschwingvorgang tritt in den Registrierungen nur die niederfrequente Koppelschwingung in Erscheinung. Infolge der hohen Frequenz und dem damit verbundenen hohen Energiegehalt erreicht die zweite nie eine merkliche Amplitude, die dann auch noch mit einer kleineren Indikatorvergrößerung aufgeschrieben wird.

Bei erzwungenen Schwingungen erweist sich der Schwingungsmittelpunkt der niederfrequenten Koppelschwingung als die im Raum feststehende Drehachse derselben. Jedenfalls ist dies bei den hohen Frequenzen der Fall. Als statische Vergrößerung eines Seismographen bezeichnet man das Verhältnis der Länge des Indikators J zum Abstand der beiden Schwingungsmittelpunkte L . Bei den meisten Seismographen wird die statische Vergrößerung durch die Verwendung von mechanischen, optischen und sonstigen Übersetzungsvorrichtungen sehr gesteigert. Unter J darf man dann nicht die Länge des ersten mit der Masse starr verbundenen Hebels verstehen, sondern die mit den noch folgenden Übersetzungsverhältnissen multiplizierte Länge. Die Indikatorlänge ist von der Mitte der Blattfederlänge aus zu zählen.

Die dynamische Vergrößerung V_d zeigt den doppelwelligen Charakter, wie er von der Theorie der Koppelschwingungen her bekannt ist. Während die niederfrequente Resonanzstelle durch die Dämpfungseinrichtung weggedämpft werden kann, ist dies bei der zweiten nicht möglich. Die Phasenverschiebung wächst von den niedrigen zu den hohen Frequenzen hin von 0 bis 2π .

Für den Bau von Seismographen ergeben sich daraus wichtige Folgerungen. 1. Um eine möglichst wahrheitsgetreue Aufzeichnung der Bodenbewegungen zu erhalten, sind die beiden Koppelfrequenzen möglichst so zu legen, dass die erste am unteren Ende des Bereiches liegt, in welchen die hauptsächlichsten Frequenzen der aufzeichnenden Bodenbewegungen fallen, während die zweite weit nach oben zu schieben ist. Da man die Apparate nicht unnötig schwer machen will, wird die träge Masse nicht grösser gewählt als es notwendig ist. Ihre Grösse, bezw. die Grösse der Trägheitskräfte, muss ausrei-

chen, um die am System angreifenden Reibungskräfte zu überwinden. Die Frequenz der ersten Koppelschwingung kann man durch Wahl der Direktionskräfte von Blatt- und Spiralfeder geeignet legen. Die Frequenz der zweiten Koppelschwingung wird gross, wenn die freie Länge der Blattfeder l und R , der Trägheitsradius der Masse, klein wird. R ist definiert durch $R = \sqrt{K_0/M}$, ν_0 wird aber durch l wesentlich stärker beeinflusst als durch R .

2. Im allgemeinen möchte man ein Instrument mit möglichst grosser statischer Vergrösserung haben. Dies erreicht man durch eine grosse Indikatorlänge J und einen möglichst kleinen Abstand der Schwingungsmittelpunkte L . Durch die notwendige träge Masse lässt sich aber L nicht beliebig klein machen. Unter der Bedingung gleich grosser Masse wird bei quaderförmiger Gestalt derselben ein Minimum für L erreicht, wenn die Höhe des Quaders 1,15 mal grösser ist als die Breite. Bei zylindrischer Masse liegen die Verhältnisse ungünstiger.

6. *Blattfederseismographen anderer Bauart.* — Die vorstehenden Rechnungen und Überlegungen gelten für Blattfederseismographen, deren Konstruktion dem Schema der Fig. 1 entsprechen. Die Endformeln ändern sich jedoch sehr wenig, wenn die Konstruktion anders durchgeführt ist. Dies soll am wichtigsten Beispiel, dem Vertikalseismographen nach *Angenheister* gezeigt werden. Fig. 3 stellt das Schema der Bauart dar. Für das Moment der Dämpfungskraft ist zu setzen:

$$M_d = 2\varrho s^2 \frac{d\varphi}{dt} ;$$

Danach fallen in den Gleichungen [4] und [5] die Glieder mit dy_1/dt bzw. dy'/dt weg. Die Ausdrücke für die Frequenzen ändern sich dadurch nicht. Geringfügige Abweichungen treten nur bei den Ausdrücken für die Dämpfungen auf. Während sich derjenige für die niedrige Frequenz formal nicht ändert, vereinfacht sich der für die höhere. Sie lauten:

$$\delta_1 = \frac{\varrho s^2}{K_0 + Ma^2} ; \quad \delta_2 = \frac{\varrho s^2}{K_0} - \frac{\varrho s^2}{K_0 + Ma^2} = \frac{\varrho s^2}{K_0 + Ma^2} \frac{Ma^2}{K_0} ;$$

Auch die Formeln für die Resonanzkurve bleiben hestehen.

Durch eine andersartige Anordnung der Einzelteile der Seismographen wird ihr Verhalten nur wenig beeinflusst. Es ist daher nicht nötig, alle Möglichkeiten einzeln durchzudiskutieren, zumal im zwei-

ten, im experimentellen, Teil der Arbeit auf eine weitere Bauart näher eingegangen wird.

II. TEIL. EXPERIMENTELLE UNTERSUCHUNGEN AN BLATTFEDERSEISMOGRAPHEN.

Die Anregungen zu den obigen theoretischen Darlegungen ist durch experimentelle Untersuchungen von Blattfederseismographen

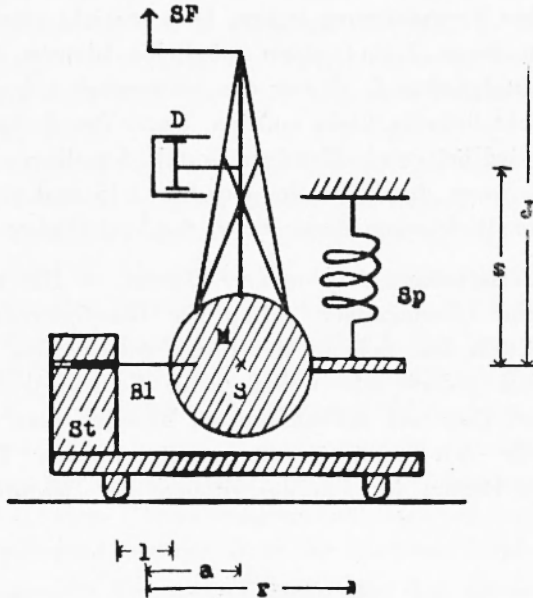


Fig. 3 - Schema des Vertikalseismographen nach Angenheister. *St* = Stativ mit Klemmvorrichtung für die Blattfeder. *M* = Masse des Seismographen. *S* = deren Schwerpunkt. *Sp* = Spiralfeder. *D* = Dämpfung. *SF* = Schreibfeder bzw. Ende des an der Masse befestigten starren Hebels. *Bl* = Blattfeder. *l* = freie Länge der Blattfeder. *a* = Abstand Blattfedermitte-Schwerpunkt. *r* = Abstand Blattfedermitte-Angriffspunkt der Spiralfeder. *s* = Abstand Blattfeder-Angriffspunkt der Dämpfung. *J* = Abstand Blattfeder-Schreibfeder.

auf Schütteltischen gegeben worden. In diesem Teil der Abhandlung soll gezeigt werden, wie weit die theoretischen und die experimentellen Ergebnisse übereinstimmen und welche Nebenumstände noch einen grossen Einfluss auf die Arbeitsweise eines solchen Apparates haben können.

1. *Untersuchungen am transportablen Wiechertschen Horizontalseismographen.* — Es handelt sich hierbei um einen der ersten trans-

portablen Seismographen (*). Der schematische Aufbau des Gerätes ist in Fig. 4 dargestellt. Die Masse ist an zwei Kreuzfederpaaren befestigt. Ihr Schwerpunkt liegt senkrecht über der Verbindungslinie der Kreuzungspunkte der Federn. Die Direktionkraft der Schwingungen dieses Systems setzt sich aus zwei Komponenten zusammen. Die eine wird von den Blattfedern geliefert, während die andere von der Wirkung der Schwerkraft auf die Masse des Seismographen geliefert wird. In der normalen Aufstellung, wie sie Fig. 4 zeigt, wirken beide Kräfte einander entgegen. Dreht man das Gerät um, so dass die Masse an den Blattfedern hängt, dann addieren sich die Kräfte. Bei diesem

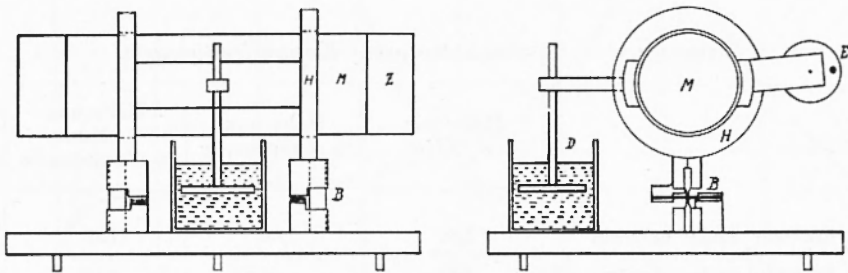


Fig. 4 - Schema des Horizontalseismographen nach Wiechert im Seiten- und Aufriss. *M* = Masse des Seismographen. *H* = Halterung derselben. *B* = Blattfederkreuz. *Z* = Zusatzmasse aus Blei. *D* = Dämpfungsvorrichtung (Öldämpfung). *E* = Exzenterrädchen.

Apparat lässt sich die Masse leicht verändern. Man kann auf diese Weise den Einfluss der einzelnen Elemente auf die erste Koppelfrequenz prüfen. Die Resonanzkurve und die Lage der zweiten Koppelschwingung im Frequenzhand wurde nach der von R. Köhler (5) angegebenen Methode mit Hilfe eines Schwungrädchens untersucht.

a) Die erste Koppelfrequenz. Die Formel für die erste Koppelfrequenz lautet:

$$v = \sqrt{\frac{B/l \pm Mga}{K_0 + Ma^2}} ;$$

Das positive Vorzeichen im Zähler des Ausdruckes gilt für hängende, das negative für aufrechtstehende Masse. Durch eine Änderung

(*) Eine gute Abbildung des Apparates ist auf dem Bild von E. WIECHFERT zu sehen. Zeitschr. f. Geophysik, Bd. IV (1928) S. 49.

der Masse wird sowohl der Zähler wie der Nenner unter der Wurzel beeinflusst. Bei diesem Gerät kann die zylinderförmige Masse leicht aus ihrer Halterung entfernt werden. Ausserdem kann sie durch das Anschrauben von Zusatzmassen aus Blei vergrössert werden. Die Gewichte und Trägheitsmomente der Einzelmassen bezogen auf den Kreuzungspunkt der Blattfederpaare sind bestimmt worden. Die Eigenperioden des Schwingungssystems sind bei verschiedenen Kombinationen der Einzelmassen in aufrechtstehender wie in hängender Lage gemessen worden. Bei den meisten Versuchen sind die waagrecht liegenden Federn der Kreuzfederpaare abgenommen worden. Tabelle I bringt die Messergebnisse.

TABELLE I — *Beobachtete erste Koppelfrequenzen*

| | Halterung + Masse | Halterung + Zusatzmasse | Halterung + Masse + Zusatzmasse |
|-------------------------|----------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| Einfache Feder aufrecht | 1,62 | 2,99 | 1,25 |
| Einfache Feder abwärts | 2,87 | — | 2,67 |
| Kreuzfeder | — | — | 2,63 |

An Hand der Dimensionen der Einzelteile des Schwingungssystems lassen sich nach obiger Formel die einzelnen Frequenzen auch berechnen. Beim Vergleich der berechneten Werte mit den gemessenen zeigt sich, dass sich bei einer Änderung der Masse die Frequenzen so ändern, wie es die Theorie erfordert. Die Versuche ergaben darüber hinaus weiterhin, dass die Direktionskraft der Blattfedern nicht, wie zunächst zu erwarten wäre, konstant bleibt, sondern eine gewisse Abhängigkeit von der Vorbelastung zeigt. Bei aufrechtstehendem System wird durch die Druckbelastung der rund 5 kg schweren Masse die Direktionskraft der vertikalen Blattfedern, deren Querschnitte aus Fig. 4 zu ersehen ist, um 8,6% vermindert. Bei hängender Masse ist sie um denselben Betrag grösser. Mit abnehmender Grösse der Masse wird der Prozentsatz geringer. Genauere Angaben über die Gesetzmässigkeit dieser Erscheinung lassen sich aus den wenigen Werten nicht ableiten. Bei Kreuzfedern wird die Direktionskraft der Schwingungen mehr als vervierfacht, obwohl die Biegesteifigkeit der waagrecht liegenden Federn geringer ist als die der senkrechten.

b) Die zweite Koppelfrequenz und die Resonanzkurve. Es wur-

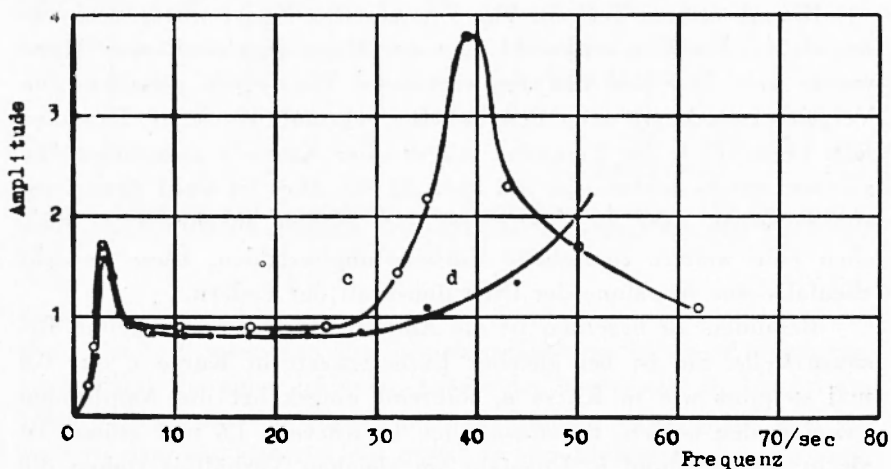
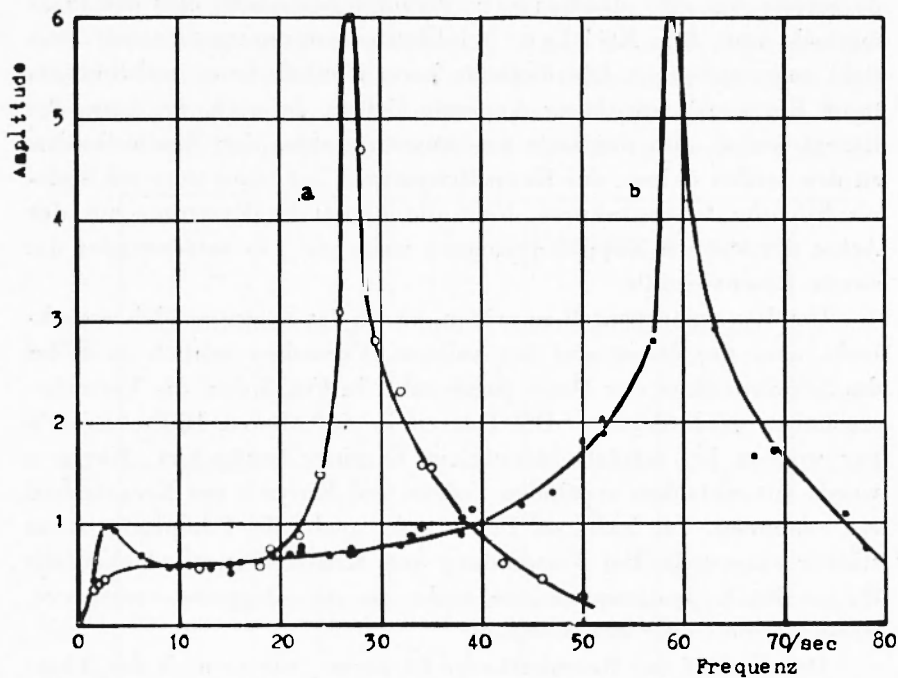


Fig. 5 - Resonanzkurven des Horizontalseismographens nach Wiechert aufgenommen mit der Schwungradmethode. Die Amplituden sind in willkürlichen Einheiten aufgetragen. Bei Kurve a und b befand sich das Schwungrad seitlich vom Schwerpunkt der Masse, bei Kurve c und d senkrecht darüber. Kurve a und c wurden bei einfachen, vertikalen Blattfedern, Kurve b und d bei Kreuzfedern aufgenommen.

de bereits von M. Rössiger darauf hingewiesen, dass die Prüfmethode von R. Köhler bei Blattfederseismographen mit Vorsicht anzuwenden ist. Die Methode kann nämlich keine wahrheitsgetreue Resonanzkurve dieser Apparate liefern. Je nach der Lage der Exzenterachse, also der Lage des Angriffspunktes der Wechselkräfte, zu den beiden Achsen der Koppelfrequenzen bekommt man ein anderes Bild der Resonanzkurve. Fällt die Achse des Exzenter mit der Achse der zweiten Koppelschwingung zusammen, so verschwindet die zweite Resonanzstelle.

Um dies experimentell zu prüfen, wurde das Exzenterädchen senkrecht über der Masse und bei anderen Versuchen seitlich in Höhe des Schwerpunktes der Masse angebracht. In Fig. 5 sind die Versuchsergebnisse wiedergegeben. Die Kurven in der oberen Hälfte der Figur wurden bei seitlich befestigtem Exzenter beobachtet. Kurve *a* wurde mit einfachen vertikalen Federn und Kurve *b* mit Kreuzfedern aufgenommen. Im letzteren Fall wurde auch die Dämpfung etwas stärker eingestellt. Bei Verwendung von Kreuzfedern wird ebenfalls die zweite Koppelfrequenz um mehr als das Doppelte vergrößert, sie steigt von 27 Hz auf 60 Hz an.

Der Verlauf der Resonanzkurve ist derart, wie er nach der Theorie zu erwarten ist. Vorallem sinkt die Vergrößerung nach der zweiten Resonanz wieder auf Null ab.

Die im unteren Teil der Fig. 5 dargestellte Kurve wurde beobachtet, als das Rädchen senkrecht über der Masse angebracht war. Diese wurde auch hier nur von den vertikalen Blattfedern gehalten. Die Vergrößerungskurve zeigt den üblichen Verlauf. Die erste Resonanz fällt hinsichtlich der Frequenz mit der der Kurve *a* zusammen. Die zweiten unterscheiden sich um etwa 22 Hz. Dies ist wohl darauf zurückzuführen, dass die Blattfedern bei seitlich angebrachtem Rädchen eine weitere zusätzliche Vorbelastung erleiden. Diese bewirkt ebenfalls eine Abnahme der Direktionskraft der Federn.

Besonders zu beachten ist die Amplitudengrösse der zweiten Resonanzstelle. Sie ist bei gleicher Exzenterkraft in Kurve *c* nur 0,6 mal so gross wie in Kurve *a*, während umgekehrt die Amplituden zwischen den beiden Resonanzstellen in Kurve *c* 1,6 mal grösser ist als in Kurve *a* und *b*. Ungefähr im gleichen Verhältnis stehen die Abstände der Exzenterachse von den Achsen der Koppelfrequenzen.

2. *Untersuchungen an Vertikalseismographen nach Angenheister. Der Einfluss der Einklemmung der Blattfedern auf das*

Verhalten der Seismographen. — In einer weiteren Versuchsserie wurden Vertikalseismographen der Bauart *Angenheister* näher untersucht. Dabei ergaben sich erhebliche Differenzen zwischen den theoretisch berechneten und den durch Experimente gefundenen Werten der Koppelfrequenzen. Der Grund hierfür ist in der Einklem-

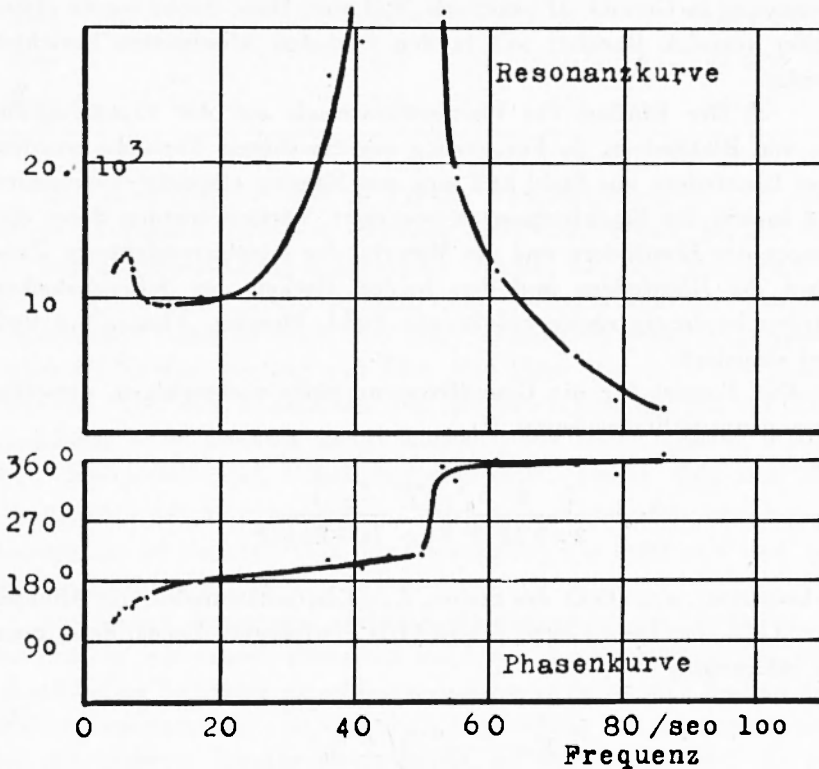


Fig. 6 - Resonanz- und Phasenkurve des Vertikalseismographen Z12. Die Blattfedern waren zwischen ausgeglichte Messingbacken geklemmt. Die freie Länge der Blattfedern betrug 0,02 cm.

mung der Blattfedern zu suchen. Der Einfluss der Einklemmung auf die Eigenfrequenzen von einseitig eingespannten Stäben ist schon lange bekannt. In einer früheren Arbeit des Verfassers (6) konnte gezeigt werden, dass im allgemeinen die Einklemmung nicht ideal ist, sondern dass das Material des Stabes in der Einspannstelle und auch das der Klemmhaken auf die Schwingungen mit einwirkt. Um diesem Effekt in den Formeln zur Berechnung der Eigenfrequenzen Rechnung zu tragen, muss man in ihnen statt der freien Stablänge l seine wirksame einsetzen. Die wirksame Länge ist bei Schwingun-

gen um den Betrag $2\Delta l$ grösser als die freie. Bei statischer Belastung ist sie nur um das Stück Δl grösser. Δl hängt vom Material des Stabes und von dem der Klemmvorrichtung ab. Bei einem in Stahlbacken eingespannten Holzstab wurde bei freien Stablängen von 0,75 — 1,00 m Δl zu etwa 1% derselben bestimmt, während bei einer Klemmung in Gummi Δl praktisch Null war. Diese Sache wurde etwas weiter verfolgt. Darüber soll in den nächsten Abschnitten berichtet werden.

a) Der Einfluss des Einspannmaterials auf die Eigenfrequenzen von Blattfedern. In Fortsetzung der erwähnten Versuche wurden zwei Blattfedern aus Stahl und eine aus Messing einseitig eingespannt und jeweils die Eigenfrequenzen bestimmt. Variiert wurden dabei die Längen der Blattfedern und das Material der Klemmvorrichtung. Zwischen die Blattfedern und den beiden Backen des Schraubstockes wurden beidseitig ebene Stücke aus Stahl, Messing, Aluminium und Blei eingelegt.

Die Formel für die Grundfrequenz eines rechteckigen, einseitig eingespannten Stabes lautet (7).

$$v_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{a}{\sqrt{12}} \frac{\beta_0^2}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{1}{(1+2\Delta l/l)^2} ;$$

Es bedeuten: a = Dicke des Stabes, E = Elastizitätsmodul, ρ = Dichte, $\beta_0 = 1,875$, l = freie Länge, $l(1+2\Delta l/l)$ = wirksame Länge. Setzt man zur Abkürzung

$$K = \frac{1}{2\pi} \frac{a}{\sqrt{12}} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \beta_0^2 ,$$

so erhält man für Δl aus

$$v_0 = K \left(\frac{1}{l(1+2\Delta l/l)} \right)^2 : \Delta l = \frac{l}{2} \left(\sqrt{\frac{K}{v_0 l^2}} - 1 \right) ;$$

K kann man berechnen, wenn man E genügend genau kennt. Die Bestimmung von E war Gegenstand weiterer Messungen. Die Blattfedern wurden dabei an den Enden auf zwei Schneiden aufgelegt und zu Biegeschwingungen angeregt. Die Frequenzen derselben wurden gemessen und daraus E und dann K berechnet. In Tabelle 2 sind die technischen Daten der Blattfedern angegeben.

TABELLE 2
Technische Daten der Blattfedern

| Blattfeder aus | Dicke a cm | Breite b cm | K cm ² /s |
|-------------------|---------------|----------------|-------------------------|
| Stahl | 0,04 | 2,5 | 3,05.10 ³ |
| Stahl | 0,01 | 1,5 | 0,855.10 ³ |
| Messing | 0,10 | 1,95 | 5,67.10 ³ |

Die Messergebnisse sind in Tabelle 3 zusammengestellt. Auf eine nähere Diskussion derselben soll hier verzichtet werden. Es soll nur auf folgende Feststellung hingewiesen werden, die auch mit den früheren Erfahrungen übereinstimmt. Als Klemmbacken für einseitig eingespannte Stäbe ist Stahl und auch Aluminium schlecht geeignet. Besser ist hierfür Messing und Blei. Für diese Metalle wird Δl am kleinsten. Von den Konstanten des Klemmaterials, die auf die Einklemmung einen Einfluss haben könnten, wie Härte, Dichte, Elastizität, Kompressibilität, Schallgeschwindigkeit, ändert sich nur die Schallgeschwindigkeit $v = \sqrt{E/\rho}$ ähnlich wie Δl . Für Stahl und Aluminium ist sie 5100 m/s, für Messing ist $v = 3400$ m/s und für Blei $v = 1300$ m/s.

Auf Grund dieser und früherer Messungen ist der Verfasser zu der Ansicht gekommen, dass man bei freien Eigenschwingungen und bei statischer Belastung einseitig eingespannter Stäbe und Balken der idealen Einklemmung ($\Delta l = 0$) bei Verwendung von Einspannmateri- al mit geringer Schallgeschwindigkeit am nächsten kommt. Es genügt hierbei, wenn man zwischen Stah und Klemmvorrichtung, Schraubstock, usw., Stücke von der Dicke weniger Millimeter aus einem solchen Stoff einlegt.

b. Der Einfluss der Klemmung auf die Koppelfrequenzen und die Resonanzkurve von Blattfederseismographen. Nach den obigen Beobachtungsergebnissen ist zu vermuten, dass die Art der Einklemmung der Blattfedern von Seismographen einen Einfluss auf deren Verhalten ausüben wird. Die Vertikalseismographen Z10, Z11 und Z12 des Geophysikalischen Institutes Göttingen dienten zur näheren Untersuchung dieses Einflusses. Die drei Apparate sind von der gleichen Bauart und nach den Angaben von *Angenheister* entwickelt worden. Sie wurden auf dem Vertikalschütteltisch des Göttinger

TABELLE 3

Der Einspannwert Δl in Abhängigkeit von der Stablänge, dem Stabmaterial und dem Einspannmaterial berechnet aus Schwingungsbeobachtungen.

| Feder aus | Stahl | | Alluminium | | Messing | | Blei | |
|---------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| | Stahl | Messing | Stahl | Messing | Stahl | Messing | Stahl | Messing |
| Stablänge l (cm) | Δl (cm) | Δl (cm) | Δl (cm) | Δl (cm) | Δl (cm) | Δl (cm) | Δl (cm) | Δl (cm) |
| 4 | 0,2 | — | 0,2 | — | 0,0 | — | 0,0 | — |
| 6 | 0,2 | — | 0,1 | — | 0,1 | — | 0,0 | — |
| 8 | 0,2 | 0,3 | — | — | 0,0 | — | 0,0 | — |
| 10 | 0,4 | 0,4 | 0,1 | 0,2 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| 12 | 0,4 | — | — | — | 0,0 | — | — | — |
| 14 | 0,5 | 0,4 | 0,2 | — | 0,0 | — | 0,1 | — |
| 16 | 0,5 | — | — | — | 0,0 | — | — | — |
| 18 | 0,6 | 0,4 | 0,2 | 0,3 | 0,0 | 0,1 | 0,0 | 0,1 |
| 20 | 0,6 | 0,3 | — | — | 0,0 | — | — | — |
| 22 | 0,5 | — | 0,2 | — | 0,0 | — | 0,0 | — |
| 24 | 0,7 | 0,3 | — | 0,4 | 0,1 | 0,1 | — | 0,1 |
| 26 | 0,7 | — | 0,3 | — | 0,2 | — | 0,2 | — |
| 28 | 0,9 | 0,4 | — | — | 0,5 | — | — | — |
| 30 | 1,1 | 0,3 | 0,6 | 0,3 | 0,5 | — | 0,4 | 0,1 |

Blattfeder aus Stahl $a = 0,01$ cm; $b = 1,5$ cm

| | | | | | | | | | | |
|----------------------------|------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Klemmbacken aus Stahl | 1 | 1,88 | 2,22 | 3,00 | 3,62 | 4,30 | 6,25 | | | |
| | Δl | 0,13 | 0,36 | 0,41 | 0,31 | 0,48 | 0,60 | | | |
| Klemmbacken aus Messing | 1 | 1,45 | 1,92 | 2,35 | 2,90 | 3,48 | 4,27 | 5,12 | 5,83 | 6,10 |
| | Δl | 0,09 | 0,13 | 0,14 | 0,13 | 0,15 | 0,18 | 0,20 | 0,26 | 0,31 |

ger Institutes hinsichtlich ihrer Vergrößerungs- und Phasenverschiebungskurve geprüft. Bei Z10 waren die Blattfedern zwischen Stahl- bzw. Aluminiumbacken geklemmt, bei Z11 zwischen Aluminium- bzw. Messingbacken und bei Z12 zwischen Stahl- bzw. ausgeglühte Messingbacken. Ausserdem wurde bei Z12 noch die Länge der Blattfedern variiert. In Fig. 6-9 sind einige der aufgenommen Resonanz- und Phasenkurven wiedergegeben. Bei den Resonanzkurven ist als Ordinate die Gesamtvergrößerung $V_s V_d$ aufgetragen.

Die Resonanz- und Phasenkurven zeigen im grossen und ganzen den für Blattfederseismographen charakteristischen Verlauf. In den Einzelheiten treten noch allerlei Abweichungen auf. Darauf soll jedoch hier nicht näher eingegangen werden, da sie meist nebensächli-

cher Natur sind. Es sollen nur die wesentlichen Punkte hervorgehoben werden.

Für die statische Vergrößerung ergibt sich bei diesen Seismographen aus den Versuchen rund der Wert 10.000. (Der kleinste Wert, den die Resonanzkurve zwischen den beiden Koppelfrequenzen bei nicht zu starker Dämpfung erreicht, ist die statische Vergrößerung).

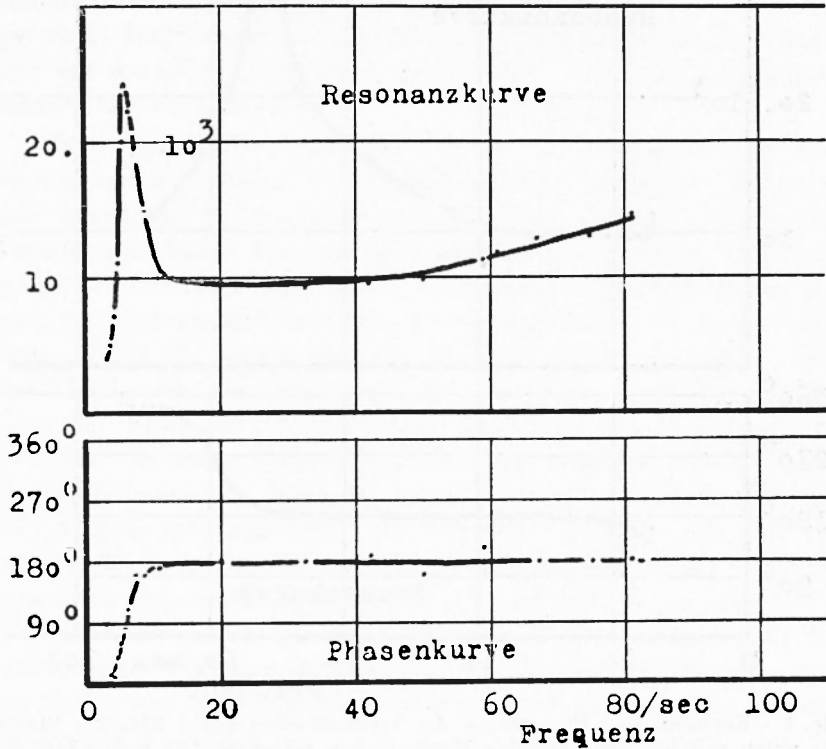


Fig. 7 - Resonanz- und Phasenkurve des Vertikalseismographen Z12. Die Blattfedern waren zwischen Stahlbacken geklemmt. Die freie Länge der Blattfedern betrug 0,02 cm.

Da die optische Vergrößerung durch die Drehspiegelachse bei 1 m Lichtweg 4000 fach ist, (auf diese Registrierentfernung sind alle Resonanzkurven bezogen), bleibt für die mechanische Vergrößerung durch den ersten Hebelarm der Wert 2,5. Die Länge des Hebelarmes beträgt $J_1 = 11,5$ cm. Für den Abstand der Achsen der beiden Koppelschwingungen ergibt sich daraus $L = J/V = 11,5/2,5 = 4,6$ cm. Theoretisch berechnet man aus den Daten der zylinderförmigen Seismographenmasse ohne Berücksichtigung der Dämpfungs- und Regi-

striereinrichtung für L die Zahl 2,7 cm. Die Achse der zweiten Koppelschwingung, um die sich der Seismograph bei der erzwungenen Schwingung dreht, rückt also wahrscheinlich durch die erwähnten Einrichtungen um ein beachtliches Stück über den theoretisch zu erwartenden Abstand hinaus von den Blattfedern weg.

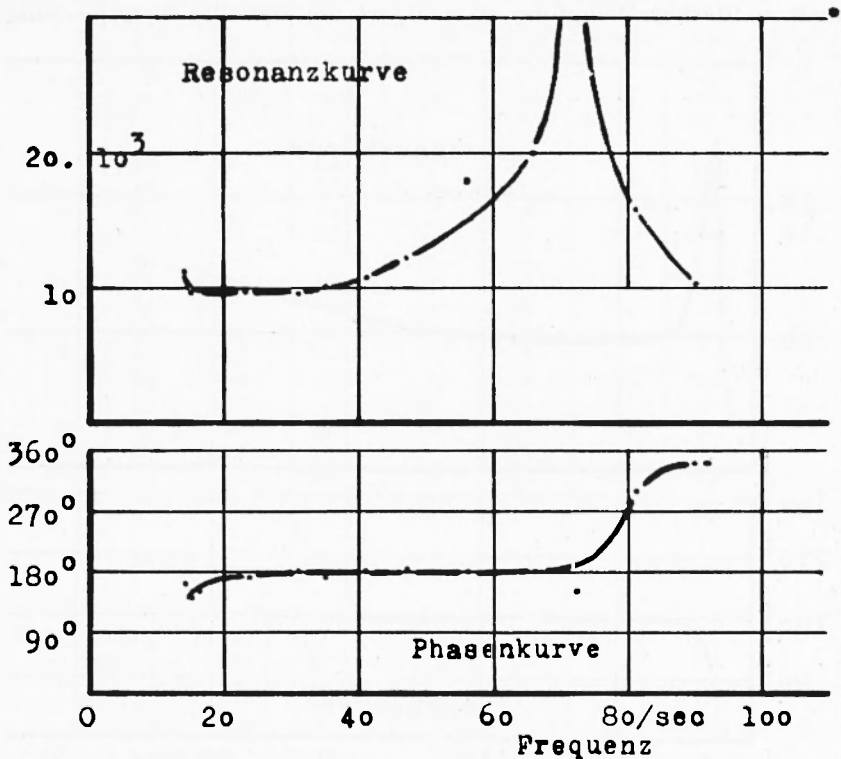


Fig. 8 - Resonanz- und Phasenkurve des Vertikalseismographen Z11. Die Blattfedern waren zwischen nicht geglühten Messingbacken geklemmt. Die freie Länge der Blattfedern betrug 0,02 cm.

Von besonderem Interesse bei Blattfederseismographen ist die zweite Koppelfrequenz. Nach der theoretischen Berechnung auf Grund der Formeln, die im ersten Teil der Arbeit abgeleitet worden sind, müsste sie für die drei untersuchten, gleichgebauten Apparate ungefähr 300 Hz sein. In Wirklichkeit ist sie aber wesentlich geringer. Meist ist sie sogar geringer als 100 Hz. Die Ursache hierfür ist nach den Versuchsergebnissen in der Einspannung der Blattfedern zu suchen. Allerdings ist es hier so, dass man mit Klemmböcken aus Stahl und Aluminium eine bessere Annäherung an die theoretischen Werte

bekommt als mit solchen aus ungeglühtem Messing. Die Verhältnisse liegen, soweit sich dies aus den Messungen schliessen lässt, gerade umgekehrt wie bei den freien Eigenschwingungen von einseitig eingespannten Stäben und Blattfedern. Während bei diesen Blei- und Messingklemmbacken geeigneter sind als solche aus Aluminium und Stahl, ist bei erzwungenen Schwingungen die zweite Koppelfrequenz von Blattfederseismographen am grössten bei einer Klemmvorrichtung aus Stahl. Ungünstiger ist Aluminium und Messing im Normalzustand und am wenigsten geeignet ist nach obigen Versuchen ausgeglühtes Messing als Klemmbacken.

Dieser qualitativen Abschätzung des Einspannwertes soll kurz eine quantitative folgen. Die freie Länge der Blattfeder beträgt bei den benutzten Seismographen, falls nichts anderes erwähnt ist, $l = 0,02$ cm. Damit bei idealer Einspannung die zweite Koppelfrequenz bei $n = 70\text{Hz}$ liegt, müsste die Blattfeder ungefähr 0,2 cm lang sein. Im vorhergehenden Abschnitt wurde für die wirksame Federlänge $(l + 2\Delta l)$ gesetzt. Bei den Seismographen haben wir ausser der Klemmstelle am Stativ noch eine zweite an der Masse. Dadurch kann der Einspannwert vergrössert, möglicherweise verdoppelt werden. Die wirksame Federlänge kann also zwischen $(l + 2\Delta l)$ und $(l + 4\Delta l)$ liegen. Da diese zu 0,2 cm berechnet wurde, ergibt sich für Δl ganz roh abgeschätzt der Wert 0,05 cm. Führt man die entsprechende Rechnung für die erste Koppelfrequenz, die bei den untersuchten Apparaten um $v_1 = 4\text{Hz}$ schwankt, durch, so erhält man für Δl nur etwa 1/10 des obigen Wertes. Es scheint, als ob Δl mit zunehmender Frequenz ebenfalls zunimmt. Da mit der Frequenz auch die Kräfte und Energien des Schwingungssystems zunehmen, ist dieser Befund erklärlich.

Aus der Resonanzkurve und der Lage der beiden Koppelfrequenzen ergibt sich, dass der Frequenzbereich, in welchem die geprüften Vertikalseismographen brauchbar arbeiten, zwischen 1H und 80Hz liegt, sofern es allerdings gelingt, die zweite Koppelfrequenz durch geeignete Klemmung bis über 100Hz hinaus zu verschieben. Dazwischen gibt es bei richtiger Einstellung der Dämpfung einen weiten Bereich, in welchem die Apparate mit praktisch konstanter Vergrösserung arbeiten. Dadurch sind sie in der Lage, die meisten künstlich erregten Bodenerschütterungen, wie solche, die durch grosse und kleine Sprengungen, durch Maschinen und Verkehr erzeugt werden, ziemlich wahrheitsgetreu aufzuschreiben.

3. Zusammenfassung der experimentellen Untersuchungen.

Die Prüfungen der untersuchten Blattfederseismographen haben ergeben, dass sich diese so verhalten, wie es die im ersten Teil entwickelte Theorie verlangt. Die Vergrößerungskurve besitzt zwei Maxima, zwei Resonanzstellen, die den beiden Koppelfrequenzen entsprechen.

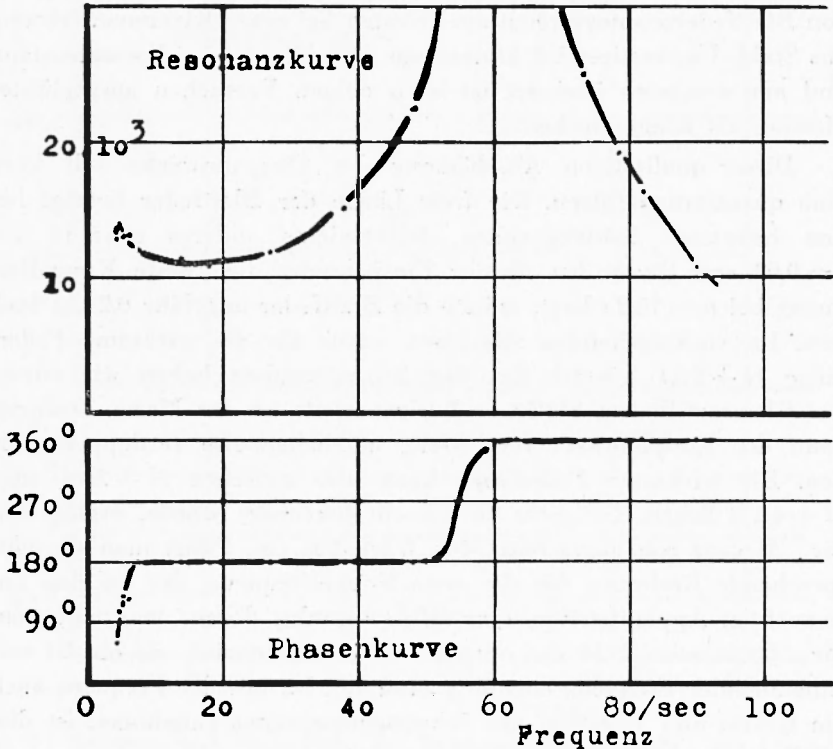


Fig. 9 - Resonanz- und Phasenkurve des Vertikalseismographen Z10. Die Blattfedern waren zwischen Aluminiumbacken geklemmt. Die freie Länge der Blattfeder betrug 0,02 cm.

chen. Bei diesen Frequenzen springt die Phasenkurve jeweils um 180° . Bei den Frequenzen der Koppelschwingungen treten häufig erhebliche Differenzen zwischen den theoretisch zu erwartenden und den experimentell gemessenen Werten auf. Diese Differenzen werden teils durch irgendwelche Vorbelastungen der Blattfedern verursacht, die zu einer Herabsetzung der Biegesteifigkeit führen, teils rühren sie von der nie völlig idealen Einklemmung der Blattfedern her. Diese macht sich besonders bei der zweiten Koppelfrequenz unangenehm bemerkbar, da die unvollkommene Einspannung eine relativ grosse

wirksame Länge der Blattfedern bewirkt, wodurch wiederum die Frequenz der zweiten Koppelschwingung soweit herabgedrückt wird, dass sie in den Arbeitsbereich der Seismographen fällt. Die Versuche haben ergeben, dass man für die Klemmbacken der Blattfedern ein Material mit möglichst hoher Schallgeschwindigkeit, wie Stahl, verwenden soll, um die zweite Koppelfrequenz nach relativ hohen Werten zu verschieben. Um bei statischer Belastung oder bei freien Eigenschwingungen von eingespannten Stäben und Balken der ideal festen Einspannung am nächsten zu kommen, muss man umgekehrt als Klemmbacken ein Material möglichst niedriger Schallgeschwindigkeit, wie etwa Blei, wählen.

ZUSAMMENFASSUNG

In Weiterführung einer Arbeit von Rössiger wird sowohl durch theoretische Berechnung wie durch Untersuchungen nachgewiesen, dass Blattfederseismographen keine einfachen Schwingungsbilde sind, sondern zwei Freiheitsgrade, und damit auch zwei Eigenfrequenzen besitzen, die sehr stark miteinander gekoppelt sind. Dadurch entstehen aus den Eigenfrequenzen zwei Koppelfrequenzen. Die Resonanzkurve weist zwei Resonanzstellen auf, von denen nur die erste durch die üblichen Dämpfungsvorrichtungen weggedämpft werden kann.

Die Untersuchungen haben ergeben, dass das Verhalten von Blattfederseismographen sehr stark durch irgendwelche Vorbelastungen und durch die Art der Einklemmung beeinflusst wird. Durch die Vorbelastung kann die Direktionskraft erhöht und erniedrigt werden. Der idealen Einklemmung von Blattfedern und Stäben kommt man am nächsten, wenn man bei der Untersuchung von Eigenschwingungen und statischer Belastung Klemmaterial mit möglichst geringer Schallgeschwindigkeit benutzt. Umgekehrt wird die zweite Koppelfrequenz bei Verwendung von Klemmaterial möglichst hoher Schallgeschwindigkeit weit nach höheren Frequenzen hin verschoben, was anzustreben ist.

SUMMARY

In continuing a work of Rössiger it is demonstrated as well by theory as by experiment that plate-spring seismographs are no sim-

ple vibration-system, but have two degrees of freedom and therefore two free vibrations that are very strongly coupled together. Thereby two coupled frequencies result of the free vibration-periods. The resonance-curve shows two resonance-points at these frequencies of which only the first one can be damped by the damping apparatus. The experiments have demonstrated that the behaviour of the plate-spring seismograph is strongly influenced by any other charge und by the kind of fastening. By other charge the directive force can be increased or decreased. We approach us best to the ideal fastening of plate-springs and bars, if we use at the analysis of free vibrations and static deflection fastening material with a velocity of sound as low as possible. Opposite, if there is used a fastening material of a velocity of sound as high as possible, the second coupled frequency is widely displaced to higher frequencies what should be wanted.

LITERATURVERZEICHNIS

- (1) RÖSSIGER M., *Die elastischen Schwingungen einer Masse, die durch eine Blattfeder gehalten wird.* Annalen d. Physik, 5. Folge, 15. Bd. (1932), Nr. 6 S. 735.
- (2) RÖSSIGER M., *Beitrag zur Theorie des Blattfederseismographen.* Zeitschr. f. Geophysik, Bd. VIII (1932), S. 470.
- (3) ANGENHEISTER G., *Bodenschwingungen.* Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften, Bd. XV (1936), S. 310.
- (4) SCHULZE G. A. und FÖRTSCH O., *Die seismischen Beobachtungen bei der Sprengung auf Helgoland am 18. April 1947 zur Erforschung des tieferen Untergrundes.* Geologisches Jahrbuch 64, Hannover-Celle 1950. S. 204.
- (5) KOHLER R., *Eine neue Methode der Seismographenprüfung.* Zeitschr. f. Geophysik, Bd. VIII (1932), S. 74.
- (6) FÖRTSCH O., *Das Verhalten noch freistehender Brückenpfeiler bei Schwingungen und deren Abhängigkeit vom Untergrund.* Zeitschr. f. Geophysik, Bd. XIV (1938), S. 173.
- (7) «Hütte», des Ingenieurs Taschenbuch I, 27. Aufl. (1949), S. 236.