

# VARIAZIONE DIURNA DELLA GRAVITA' IN EUROPA

NOTA 2<sup>a</sup> - *Fondamenti teorici*

CARLO MORELLI

4. *Premessa.* — In una nota precedente (5) abbiamo mostrato come la variazione diurna della gravità, calcolata per la latitudine di 45° e per un punto centrale dell'Europa, possa essere valida per una regione abbastanza ampia attorno al punto stesso, e come possa essere trasformata per estenderne la validità alle regioni viciniori.

Vogliamo qui discutere il problema dal punto di vista teorico, per fissare anche su questa base i limiti di validità sopraddetti; e soprattutto per arrivare ad una soluzione finale pratica del problema.

5. *Componenti della variazione diurna.* — Sostituendo la [2] della nota precedente nella [1], la variazione diurna della gravità diventa in forma esplicita:

$$\partial g = K \left( \text{sen}^2 \varphi \text{sen}^2 \delta + \text{cos}^2 \varphi \text{cos}^2 \delta \text{cos}^2 \tau + \frac{1}{2} \text{sen} 2 \varphi \text{sen} 2 \delta \text{cos} \tau - \frac{1}{3} \right) \quad [4]$$

alla quale con semplici sostituzioni si può dare la forma solita (6):

$$\begin{aligned} \delta g = & \frac{K}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \text{sen}^2 \varphi \right) \left( \frac{2}{3} - 2 \text{sen}^2 \delta \right) + \\ & + \frac{K}{2} \text{sen} 2 \varphi \text{sen} 2 \delta \text{cos}^2 \tau + \\ & + \frac{K}{2} \text{cos}^2 \varphi \text{cos}^2 \delta \text{cos} 2 \tau . \end{aligned} \quad [5]$$

In questa formula:

a) il 1° termine è indipendente da  $\tau$ , cioè dalla rotazione della Terra, ma dipende invece dalle variazioni di  $D$  e di  $\delta$ : esso racchiude quindi le *componenti a lungo periodo*, cioè periodi talvolta maggiori di 24<sup>h</sup>, ma in generale superiori a mezzo mese e più;

b) *il 2° termine* racchiude le *componenti diurne*, con periodi prossimi al giorno lunare; queste saranno nulle quando  $\delta = 0$ ;

c) *il 3° termine* racchiude le *componenti semidiurne*; queste saranno massime quando  $\delta = 0$ .

Inoltre:

d) i tre termini hanno lo stesso coefficiente;

e) *i tre termini dipendono tutti da  $\varphi$* : ma ognuno di essi ha un fattore di latitudine differente. La variazione del coefficiente di latitudine per ciascuno di essi è riportata nella fig. 10.

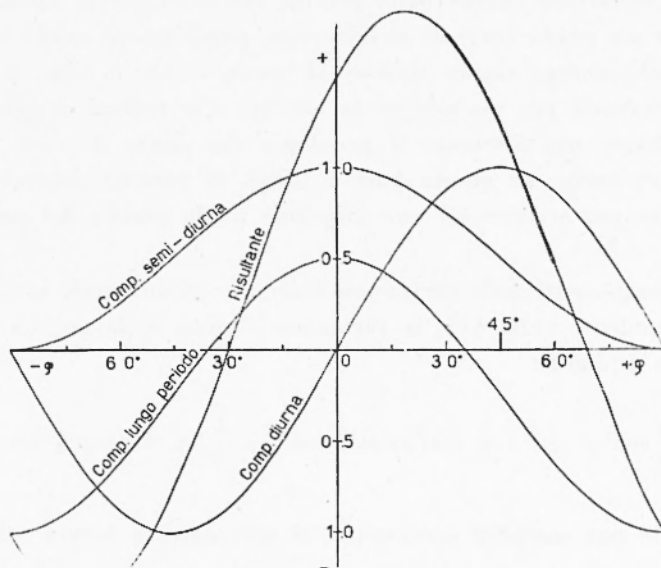


Fig. 10 - Variazioni del coefficiente di latitudine per ciascuno dei tre termini, e risultante

Come si vede, per le componenti a lungo periodo e per quelle semidiurne si hanno due sinusoidi aventi lo stesso periodo e la stessa fase, mentre per le componenti diurne il periodo è ancora lo stesso, ma la fase è spostata di  $\pi/4$ . La risultante è quindi ancora una sinusoidale, avente lo stesso periodo, e la cui fase dipende dall'ampiezza relativa delle tre componenti: poiché queste, come risulta dai fattori in  $\delta$  della [5], variano relativamente poco (e lentamente) sia per la Luna che per il Sole, vediamo già così che attorno alla latitudine di  $45^\circ$  N il ramo discendente sarà sempre molto prossimo ad una retta.

6. *Variazione in funzione della latitudine.* — Volendo ora esaminare analiticamente il comportamento della variazione diurna della gravità  $\partial g$  in funzione della latitudine, potremo scrivere:

$$\partial g_{\varphi} = \partial g_{\varphi_0} + \Delta \varphi \cdot \left( \frac{\partial g}{\partial \varphi} \right)_0 + \frac{(\Delta \varphi)^2}{2} \cdot \left( \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} \right)_0 + \dots \quad [6]$$

dove abbiamo posto:

$$\Delta \varphi = \varphi - \varphi_0.$$

Da questa si ricava, per la [5]:

$$\begin{aligned} \partial g_{\varphi} - \partial g_{\varphi_0} = & -\Delta \varphi \cdot \frac{3K}{4} \cdot \text{sen } 2\varphi_0 \left( \frac{2}{3} - 2 \text{sen}^2 \delta \right) + \\ & + \Delta \varphi \cdot K \cos 2\varphi_0 \cdot \text{sen } 2\delta \cos \tau - \\ & - \Delta \varphi \cdot \frac{K}{2} \text{sen } 2\varphi_0 \cdot \cos^2 \delta \cos 2\tau - \\ & - \frac{(\Delta \varphi)^2}{2} \cdot \frac{3K}{2} \cos 2\varphi_0 \left( \frac{2}{3} - 2 \text{sen}^2 \delta \right) - \\ & - \frac{(\Delta \varphi)^2}{2} \cdot 2K \text{sen } 2\varphi_0 \text{sen } 2\delta \cos \tau - \\ & - \frac{(\Delta \varphi)^2}{2} \cdot K \cos 2\varphi_0 \cos^2 \delta \cos 2\tau + \dots \end{aligned}$$

Ponendo  $\varphi_0 = 45^\circ$ , questa si semplifica notevolmente:

$$\begin{aligned} \partial g_{\varphi} - \partial g_{45^\circ} = & -\frac{3}{4} K \left( \frac{2}{3} - 2 \text{sen}^2 \delta \right) \cdot \Delta \varphi - \\ & - \frac{K}{2} \cos^2 \delta \cos 2\tau \cdot \Delta \varphi - \\ & - K \text{sen } 2\delta \cos \tau \cdot (\Delta \varphi)^2 + \dots \quad [7] \end{aligned}$$

Come si vede, il termine di 1° ordine dipende ora dalle componenti a lungo periodo e da quelle semidiurne mentre il termine di 2° ordine dipende da quelle diurne.

Volendo ora cercare fino a quale valore di  $\Delta \varphi$ , positivo o negativo, il contributo dei tre termini si mantiene in valore assoluto inferiore a 0,01 mgal, basta osservare che il valore massimo del fattore

di declinazione per il termine a lungo periodo e per quello semi-diurno si ottiene per  $\delta = 0^\circ$ , per cui per questi due dovrà essere:

$$|\Delta \varphi| < 2^\circ,4 .$$

Per il termine diurno, basterà ricordare che il valore massimo

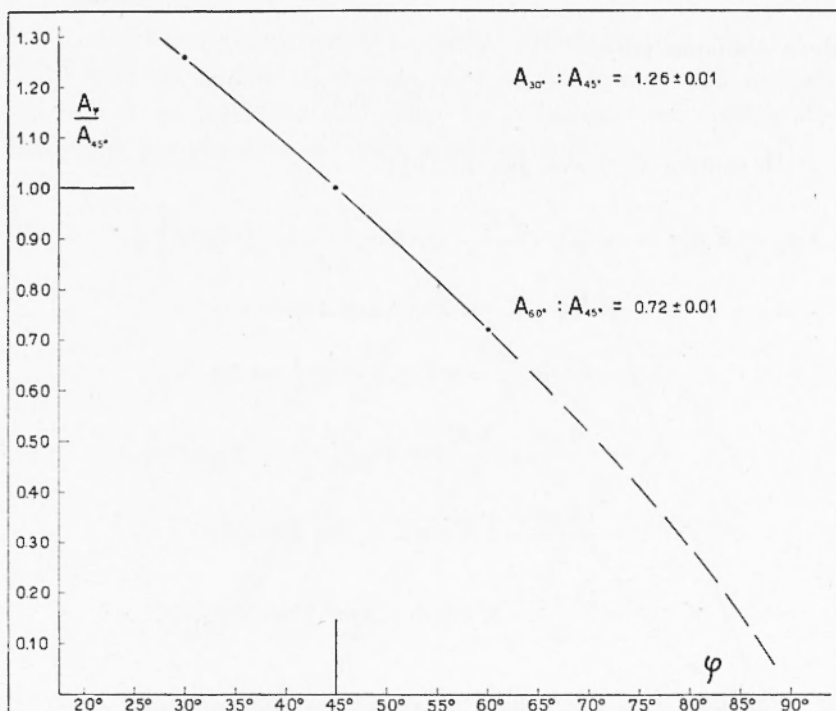


Fig. 11 - Valori del fattore correttivo  $K_\varphi$  dell'ampiezza in funzione della latitudine (ottobre 1953)

di  $\delta$  è  $28^\circ,6$  per la Luna, mentre è  $23^\circ,45$  per il Sole; sommando gli effetti si ottiene allora:

$$|\Delta \varphi| < 13^\circ,1 .$$

Dunque possiamo concludere anzitutto che:

1) i grafici della variazione diurna della gravità, calcolati per  $\varphi_0 = 45^\circ$ , si possono assumere in pratica validi senza alcuna correzione da  $43^\circ$  a  $47^\circ$ ;

2) la variazione con la latitudine del termine diurno è molto meno rapida di quella del termine semidiurno.

Invece, fra 32° e 57° di latitudine, la differenza fra la curva della variazione diurna alla latitudine  $\varphi$  e quella a 45° sarà in quest'ordine di approssimazione funzione lineare di  $\Delta\varphi$  (rappresentabile quindi con una retta) e non dipenderà dal termine diurna.

Entro questi limiti potremo quindi ammettere valida la proposta contenuta nella nota 1<sup>a</sup>: cioè, dalla curva calcolata per  $\varphi_0 = 45^\circ$  si potrà ricavare la curva per  $32^\circ < \varphi < 57^\circ$  moltiplicando le ampiezze per i fattori indicati (fig. 11).

Per latitudini esterne a questo intervallo, poiché le componenti diurne e quelle semidiurne vengono amplificate o ridotte diversamente (v. la [5]), un unico coefficiente di latitudine non è più sufficiente. Riteniamo che la cosa più semplice sia allora riportare sul diagramma della variazione diurna, oltre alla curva valida per  $\varphi_0 = 45^\circ$ , anche le due curve esterne dell'involuppo, per esempio quelle per  $\varphi = 30^\circ$  e  $\varphi = 60^\circ$ : ogni operatore può così con facilità disegnarsi per interpolazione la curva valida per la latitudine desiderata, ed ogni errore di deformazione per le cause soprannominate sarà così eliminato.

Con questi criteri abbiamo costruito le curve per il 2° semestre 1953 qui allegate (figg. 12-17).

7. *Variazioni in funzione della longitudine.* — Dalla [5] si vede che la variazione di  $\partial g$  rispetto alla longitudine, cioè rispetto a  $\tau$ , si ha attraverso le componenti diurne e semidiurne, e non attraverso il 1° termine. E quindi, poiché è:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \tau} = & -\frac{K}{2} \operatorname{sen} 2\varphi \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \tau - \\ & - K \cos^2 \varphi \cos^2 \delta \operatorname{sen} 2\tau - \end{aligned} \quad [8]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial \tau^2} = & -\frac{K}{2} \operatorname{sen} 2\varphi \operatorname{sen} 2\delta \cos \tau - \\ & - 2 K \cos^2 \varphi \cos^2 \delta \cos 2\tau \end{aligned}$$

ponendo  $\Delta\tau = \tau - \tau_0$ , e sostituendo nella

$$\partial g_\tau = \partial g_{\tau_0} + \Delta\tau \left( \frac{\partial g}{\partial \tau} \right)_0 + \frac{(\Delta\tau)^2}{2} \left( \frac{\partial^2 g}{\partial \tau^2} \right)_0 + \dots$$

si ricava:

$$\begin{aligned} \partial g_{\tau} - \partial g_{\tau_0} &= -\frac{K}{2} \operatorname{sen} 2 \varphi \operatorname{sen} 2 \delta \operatorname{sen} \tau \cdot \Delta \tau - \\ &\quad - K \cos^2 \varphi \cos^2 \delta \operatorname{sen} 2 \tau \cdot \Delta \tau - \\ &\quad - \frac{K}{2} \operatorname{sen} 2 \varphi \operatorname{sen} 2 \delta \cos \tau \cdot \frac{(\Delta \tau)^2}{2} - \\ &\quad - 2 K \cos^2 \varphi \cos^2 \delta \cos 2 \tau \frac{(\Delta \tau)^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

Per  $\varphi_0 = 45^\circ$ , la precedente si riduce alla:

$$\begin{aligned} (\partial g_{\tau} - \partial g_{\tau_0})_{45^\circ} &= -\frac{K}{2} \operatorname{sen} 2 \delta \operatorname{sen} \tau \cdot \Delta \tau - \\ &\quad - \frac{K}{2} \cos^2 \delta \operatorname{sen} 2 \tau \cdot \Delta \tau - \quad [9] \\ &\quad - \frac{K}{2} \operatorname{sen} 2 \delta \cos \tau \frac{(\Delta \tau)^2}{2} - \\ &\quad - K \cos^2 \delta \cos 2 \tau \frac{(\Delta \tau)^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

Tale differenza è quindi, come doveva essere, funzione di  $\tau$ ; e già per  $\Delta \tau = + 14,3$  diventa, per i valori massimi di  $\delta$ ,  $- 0,06$  mgal.

Quindi, anziché applicare una correzione di ampiezza funzione dell'angolo orario per gli spostamenti di longitudine, converrà nell'applicazione pratica lasciare questo invariato: cioè, diminuire o aumentare di  $1^h$  le ore lette in ascisse del diagramma di T.M.E.C., a seconda che ci si sposti verso il fuso orario adiacente ad occidente o ad oriente.

Fino a quale limite potrà essere ciò ammissibile? Evidentemente finché lo spostamento del punto considerato lungo il parallelo di un determinato arco è equivalente ad uno spostamento in tempo *identico sia per la Luna che per il Sole*. E poiché la differenza tra un giorno solare e un giorno lunare è di  $12^{\circ},2 = 48,8$  min., uno spostamento del punto considerato di  $180^\circ$  verso Est o verso Ovest comporterà una differenza di 24,4 min.: il contributo sull'ampiezza sarà allora di 0,002 mgal, cioè trascurabile.

Possiamo quindi concludere che *la curva della variazione diurna della gravità calcolata per una determinata longitudine, può essere utilizzata per una longitudine qualunque purché i tempi delle ascisse vengano corretti per la differenza di longitudine che ne consegue.*

*Istituto Naz. di Geofisica — Osserv. di Trieste — Giugno 1953.*

## RIASSUNTO

Si dimostra teoricamente che le curve della variazione diurna della gravità, calcolata per l'Italia sett. ( $\varphi_0 = 45^\circ$ ;  $\lambda_0 = 12^\circ$  Est Gr.) sono valide per una longitudine qualunque, purché i tempi delle ascisse vengano corretti per la differenza di longitudine che ne consegue.

Gli spostamenti in latitudine invece:

a) producono effetti inferiori a 0,01 mgal per  $|\Delta\varphi| < 2^\circ$ ;

b) sono compensabili moltiplicando le ampiezze per un unico fattore di latitudine, funzione di questa, per  $|\Delta\varphi| < 13^\circ$ .

Per utilizzare i grafici a  $\varphi < 32^\circ$  o  $\varphi > 57^\circ$ , si propone di completarli con curve a latitudini diverse, che consentano una facile interpolazione. Se ne fa applicazione completando le curve di variazione per il 2° semestre 1953 con quelle per  $\varphi = 30^\circ$  e  $\varphi = 60^\circ$ .

## SUMMARY

It is demonstrated teoretically that curves for diurnal variation of gravity, calculated for Northern Italy ( $\varphi_0 = 45^\circ$ ;  $\lambda_0 = 12^\circ$  Est Gr.) are applicable also for every different longitude, if times are corrected for the subsequent difference in longitude.

Differences in latitude:

a) cause effects minor of 0,01 mgal for  $|\Delta\varphi| < 2^\circ$ ;

b) can be compensated for  $|\Delta\varphi| < 13^\circ$  by multiplying the amplitudes for an unique amplitude-factor, function of these.

In order to allow utilisations of the graphs for  $\varphi < 32^\circ$  or  $\varphi > 57^\circ$ , it is proposed to complete them with curves for different latitudes, so that an ease interpolation be possible. As an instance, the curves for the 2nd half-a-year 1953 are completed with those for  $\varphi = 30^\circ$  and  $\varphi = 60^\circ$ .

## BIBLIOGRAFIA

(5) MORELLI C.: *Variazione diurna della gravità in Europa. Nota 1ª: Dati sperimentali.* Annali di Geofisica, VI, 1, Roma 1953.

(6) SCHUREMAN P.: *Manual of harmonic analysis and prediction of tides.* U. S. C. G. S. special publ. n. 98, Washington 1941.

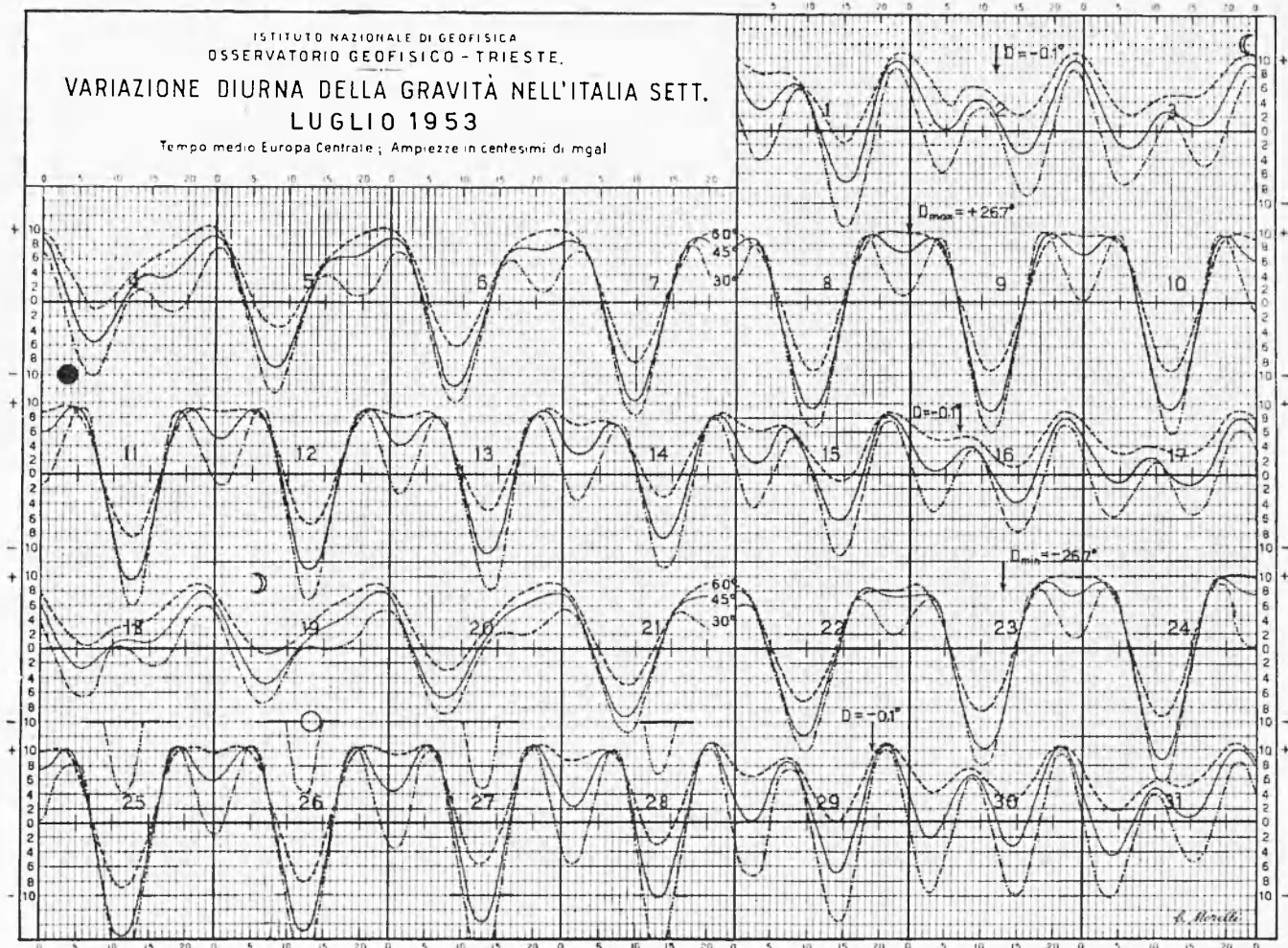
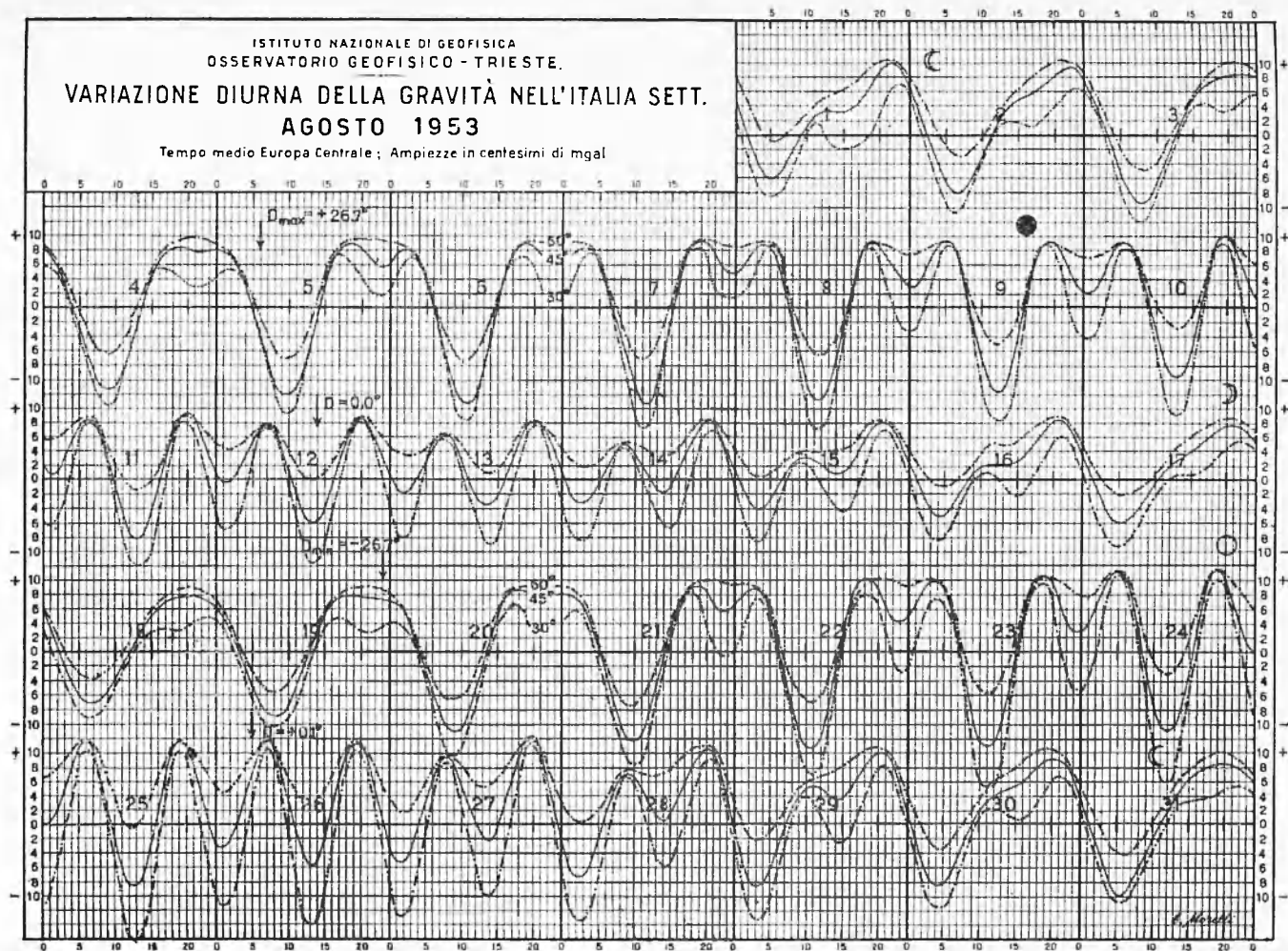


Fig. 12



ISTITUTO NAZIONALE DI GEOFISICA  
 OSSERVATORIO GEOFISICO - TRIESTE.  
**VARIAZIONE DIURNA DELLA GRAVITÀ NELL'ITALIA SETT.**  
**AGOSTO 1953**

Tempo medio Europa Centrale; Ampiezze in centesimi di mgal



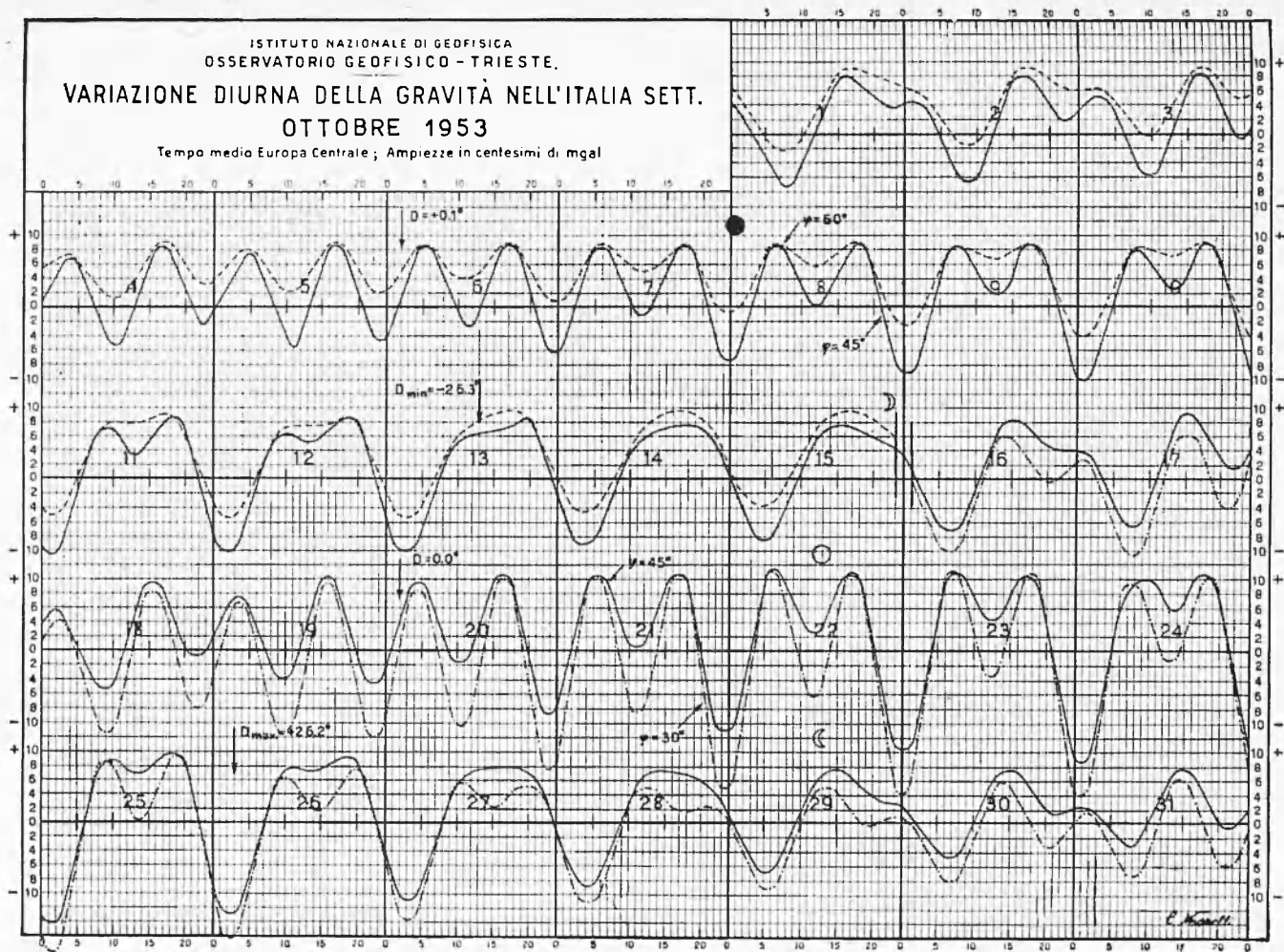
VARIAZIONE DIURNA DELLA GRAVITÀ IN EUROPA

Fig. 13



ISTITUTO NAZIONALE DI GEOFISICA  
 OSSERVATORIO GEOFISICO - TRIESTE.  
**VARIAZIONE DIURNA DELLA GRAVITÀ NELL'ITALIA SETT.**  
**OTTOBRE 1953**

Tempo medio Europa Centrale; Ampiezze in centesimi di mgal



VARIAZIONE DIURNA DELLA GRAVITÀ IN EUROPA

Fig. 15

ISTITUTO NAZIONALE DI GEOFISICA  
OSSERVATORIO GEOFISICO - TRIESTE.

# VARIAZIONE DIURNA DELLA GRAVITÀ NELL'ITALIA SETT. NOVEMBRE 1953

Tempo medio Europa Centrale; Ampiezze in centesimi di mgal

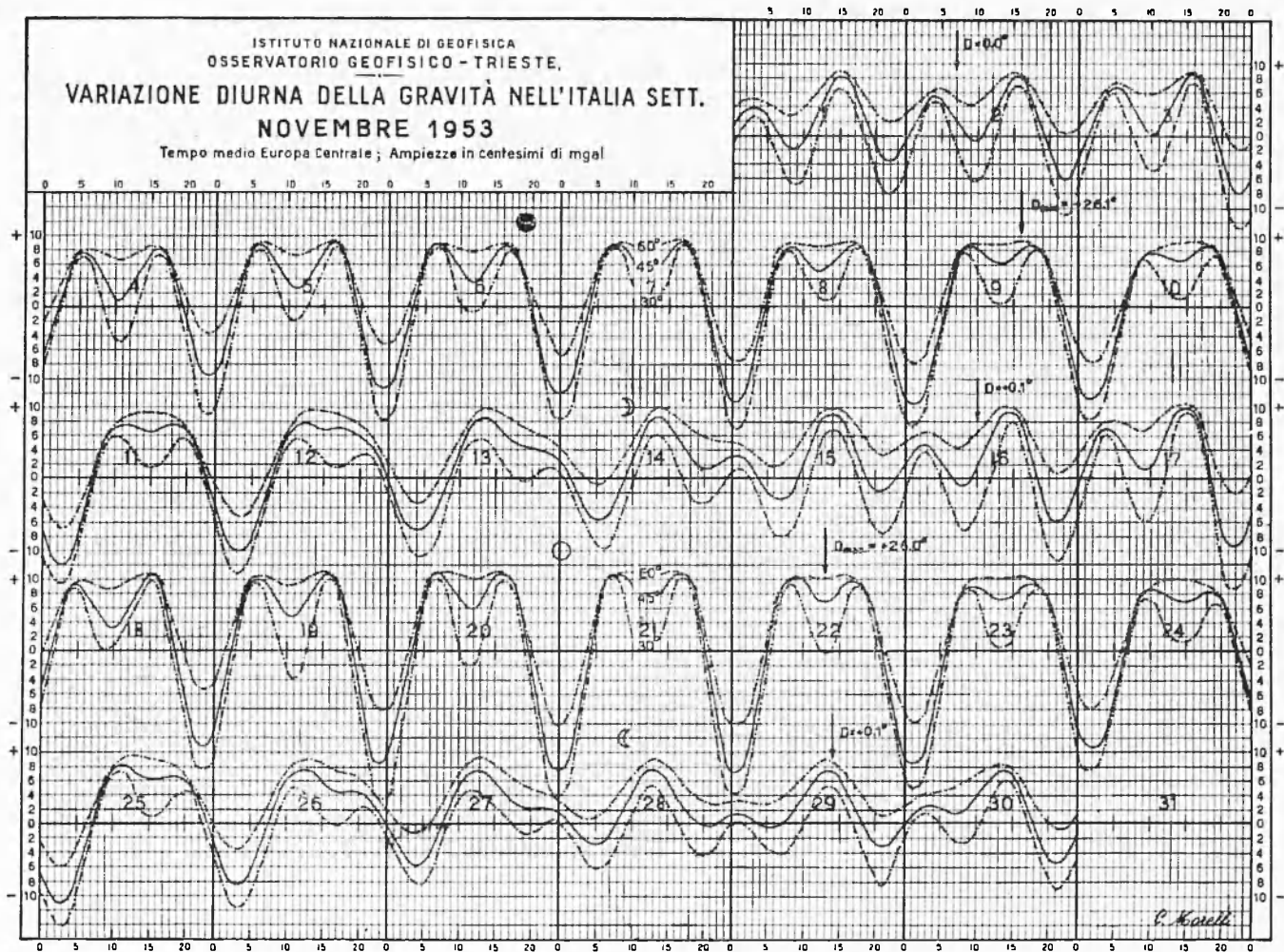


Fig. 16

ISTITUTO NAZIONALE DI GEOFISICA  
OSSERVATORIO GEOFISICO - TRIESTE.

# VARIAZIONE DIURNA DELLA GRAVITÀ NELL'ITALIA SETT. DICEMBRE 1953

Tempo medio Europa Centrale ; Ampiezze in centesimi di mgal

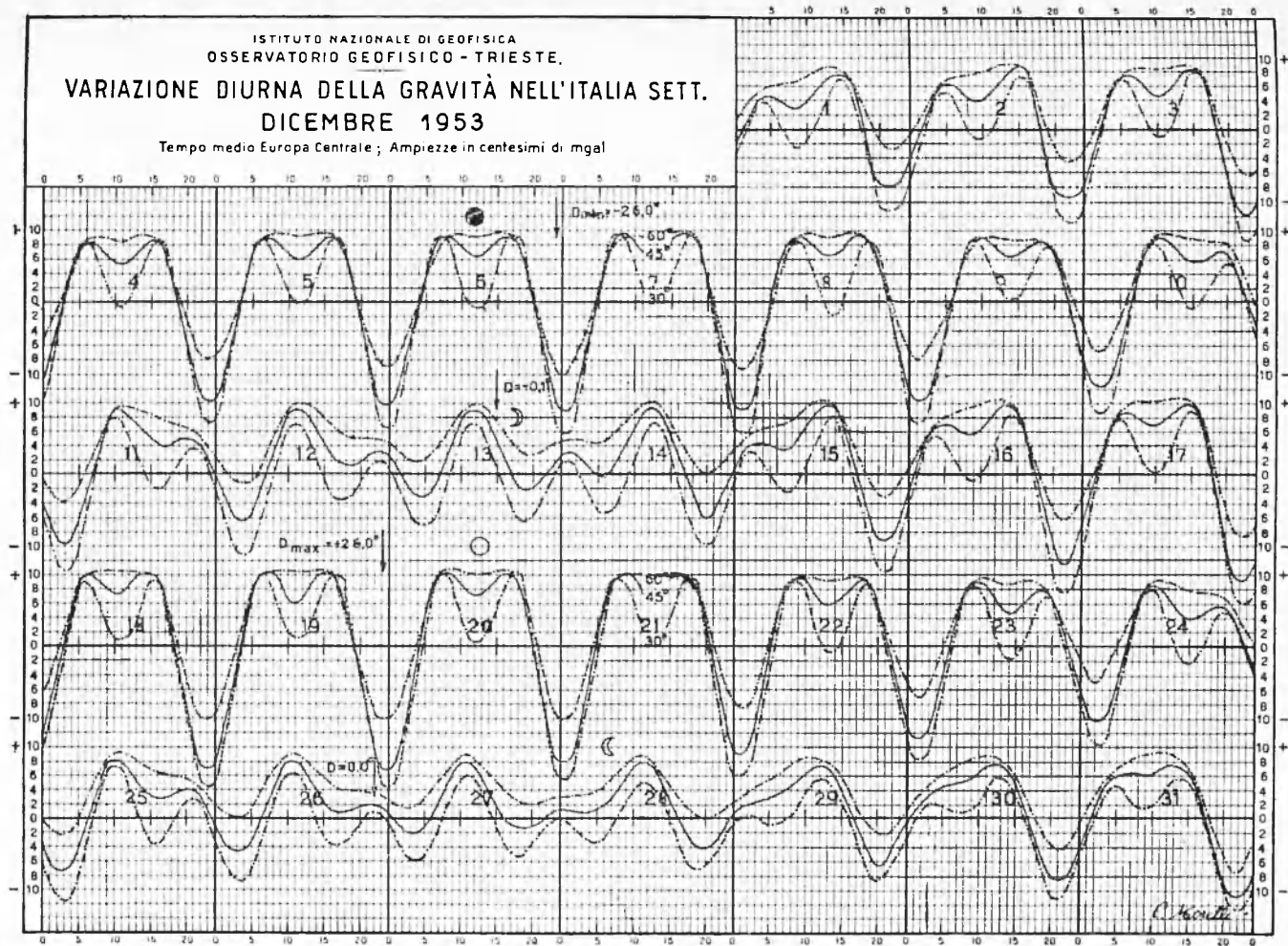


Fig. 17