

STUDIO PRELIMINARE SULLE OSCILLAZIONI LIBERE DEL LAGO DI IDRO

MARIA CECILIA SPADEA

Dal lavoro « I laghi d'Italia » di R. Riccardi, si traggono le seguenti notizie circa i dati che caratterizzano il lago di Idro: lat. $45^{\circ}47'$ N circa; Long. $1^{\circ}17'$ W ca. (Monte Mario); alt. m 368; sup. kmq 10,87; lungh. mass. fra gli estremi km 10, lungo la linea di valle km 10,8; mass. largh. km 2; mass. prof. m. 122.

Questi ed altri dati vanno considerati come approssimativi, essendo soggetti a tante cause di variazione: diversità di metodi di misura, cambiamenti stagionali o secolari o accidentali, ecc.

Per la determinazione analitica delle fondamentali caratteristiche dei moti liberi del lago, si è fatto ricorso alla carta batimetrica del lago stesso pubblicata dal De Agostini nell'« Atlante dei laghi Italiani ». La carta è stata riportata al 25.000.

Il lago è stato diviso, lungo la linea di valle, in 32 sezioni di 300 in 300 m salvo le prime due, per le quali l'equidistanza è stata di 150 m. Dette sezioni vanno contate a partire dall'estremo Nord (figg. 1-2).

La larghezza $b(x)$ delle singole sezioni in superficie, l'area $S(x)$ delle sezioni stesse, l'area $v(x)$ della superficie libera del lago fra due sezioni consecutive, l'area $V(x)$ fra le varie sezioni e l'estremo Nord del lago e i valori della funzione $\sigma(x)$ (uguale al prodotto $S(x) \cdot b(x)$) per le 32 sezioni, sono riportati nella tabella I.

Si è provveduto quindi alla determinazione della curva normale del lago, che come è noto, si ottiene rappresentando $\sigma(x)$ in funzione di $V(x)$. La figura 3 ne dà l'andamento.

La complessità della curva normale ha portato ad escludere l'applicazione di uno dei metodi suggeriti da Chrystal, per la determinazione degli elementi caratteristici delle sesse del lago.

Si è fatto pertanto ricorso ai metodi di Hidaka e di Defant, l'applicazione dei quali prescinde dalla forma della curva normale.

Il metodo di Hidaka, la cui teoria è stata esposta altrove, è stato applicato per il caso $m = 2$.

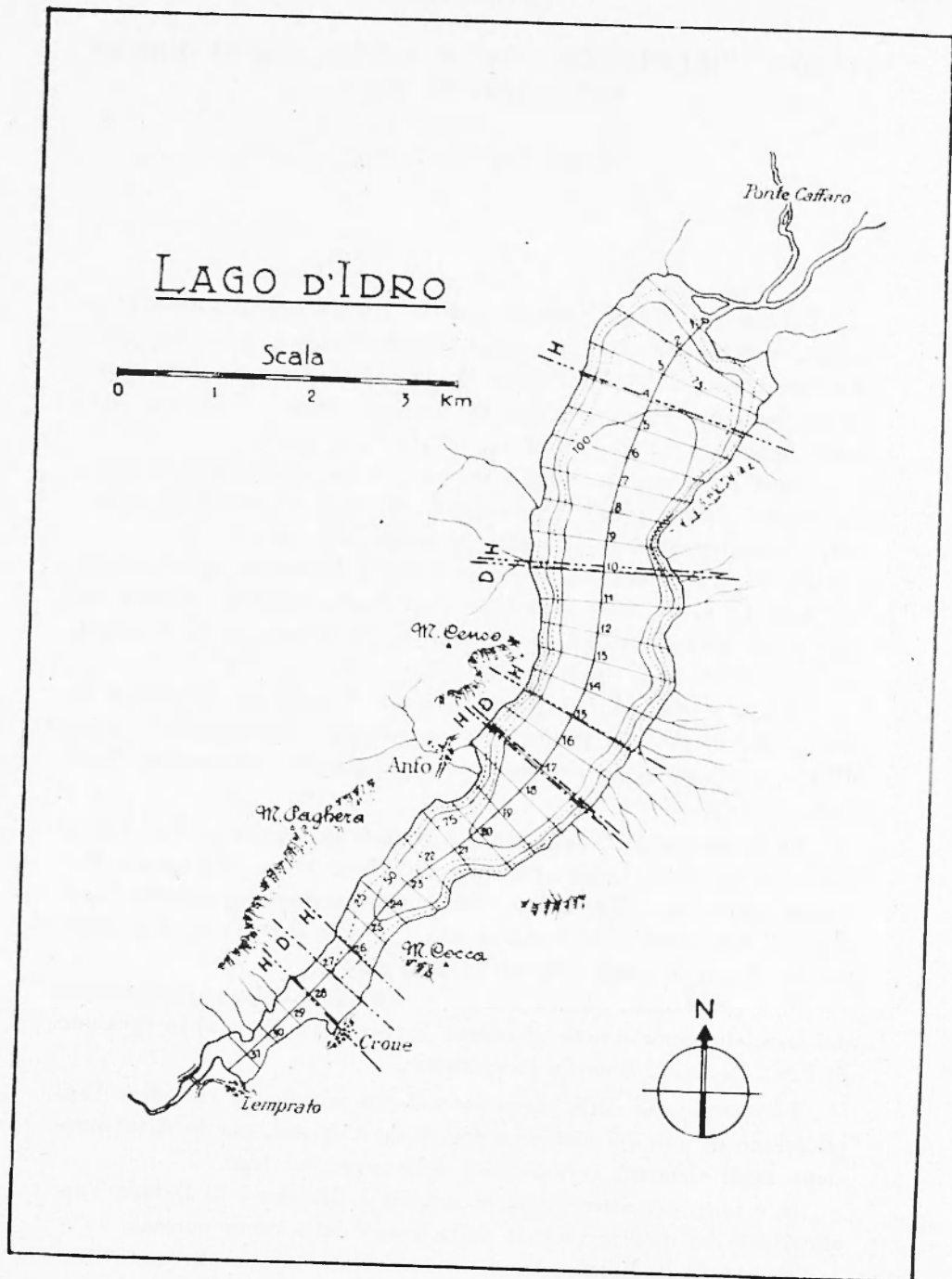


Fig. 1

TABELLA I

Sezioni	$\Delta(x)$ m	$S(x)$ 10^3 m.^2	largh. $b(x)$ m	$r(x)$ hm. ²	$V(x)$ hm. ³	$\sigma(x)$ [hm. ³]	$z = \frac{V}{a}$	$\frac{z^2(1-z)^2}{\sigma(x)}$ (Mm. ³)	Δz	$M = \frac{\Delta z}{z^2(1-z)^2}$ $\sigma(z)$	Mz	Mz^2	Mz^3	Mz^4
0	0	0	0	0	0	0	0	0						
1	150	29,75	1412	22,297	22,297	42,407	0,993	9,284	-0,1993	-18503	-00369	-000007	-0000002	-00000004
2	300	95,25	1825	48,649	70,946	175,656	0,6341	20,096	-0,4348	-87377	-05511	-00351	-00022	-00002
3	»	133,00	1875	57,432	128,378	249,375	0,4473	41,343	-0,5132	2,12172	-24342	-02792	-00320	-00036
4	»	143,50	1775	58,108	186,486	274,712	0,4667	75,733	-0,5191	3,93357	-65561	-10927	-01821	-00303
5	»	149,00	1775	54,054	241,540	264,475	0,21497	107,685	-0,1830	5,20119	1,11810	-24035	-05165	-01113
6	»	151,25	1675	57,432	297,972	253,344	0,26630	150,704	-0,5133	7,73564	2,06000	-54861	-14613	-03891
7	»	141,75	1620	48,619	316,621	229,635	0,30973	199,055	-0,1348	8,65491	2,68112	-83053	-25731	-07971
8	»	117,75	1325	41,892	388,513	156,019	0,3422	329,255	-0,3744	12,32731	4,28029	-148618	-51602	-17912
9	»	118,25	1320	43,243	431,756	156,090	0,8587	359,792	-0,3865	13,90596	5,36589	1,06070	-79904	-30830
10	»	111,75	1515	45,622	478,378	169,371	0,42774	351,808	-0,4167	14,74318	6,30330	2,69491	1,15218	-19257
11	»	137,25	1475	48,649	527,027	202,444	0,47101	306,653	-0,4747	13,33021	6,27866	2,95731	1,39287	-65611
12	»	120,50	1340	47,297	574,324	161,470	0,51328	386,511	-0,4227	16,33782	8,38588	4,30436	2,20936	1,13401
13	»	142,25	1465	41,892	616,216	278,395	0,55072	293,768	-0,3744	10,99867	6,05719	3,33579	1,83711	1,01166
14	»	127,25	1375	44,595	660,811	174,969	0,59078	334,116	-0,3786	13,31786	7,86526	4,67500	2,74321	1,62012
15	»	117,25	1275	41,216	702,027	149,494	0,62742	365,566	-0,3674	13,43089	8,42681	5,28720	3,31730	2,08138
16	»	119,00	1320	40,510	742,567	157,030	0,66365	317,227	-0,3623	11,49313	7,62742	5,06192	3,35933	2,22944
17	»	129,75	1350	47,973	790,540	175,162	0,70672	245,470	-0,4787	10,52158	7,43371	5,25206	3,71065	2,62166
18	»	107,00	1320	33,243	833,783	141,249	0,74517	255,310	-0,3865	9,86773	7,35314	5,47935	4,08307	3,04262
19	»	55,25	950	32,432	886,215	52,487	0,7415	582,430	0,2898	16,87879	13,06672	10,11563	7,83108	6,06235
20	»	70,50	915	28,378	894,593	64,507	0,79952	398,251	0,2537	10,10363	8,07805	6,15854	5,16376	4,12844
21	»	52,50	815	29,730	924,323	42,787	0,82609	482,389	0,2657	12,81708	10,58806	8,74663	7,22550	5,96891
22	»	41,25	710	22,973	947,296	29,287	0,84662	575,682	0,2053	11,81875	10,00599	8,47121	7,17185	6,07176
23	»	39,25	740	22,297	969,593	29,045	0,86654	460,320	0,1992	9,16957	7,94580	6,88534	5,96646	5,17017
24	»	24,50	650	21,622	991,215	15,925	0,88587	642,386	0,1933	12,41732	11,00013	9,74474	8,63252	7,64733
25	»	15,25	550	18,919	1010,134	8,387	0,90278	918,088	0,1691	15,52485	14,01552	12,65291	11,42272	10,31223
26	»	11,50	570	16,216	1026,350	5,750	0,91727	1001,739	0,1449	14,51520	13,31436	12,21280	11,20210	10,27560
27	»	8,75	590	18,243	1044,593	5,162	0,93357	743,898	0,1630	12,12554	11,32004	10,56801	9,86595	9,21056
28	»	18,25	640	19,595	1064,188	11,680	0,95109	184,931	0,1752	3,23999	3,08152	2,83080	2,78746	2,65112
29	»	4,50	375	16,892	1081,080	1,687	0,96618	628,334	0,1509	9,48156	9,16089	8,85104	8,55170	8,26242
30	»	1,75	240	10,811	1091,891	0,429	0,97584	1309,524	0,0966	12,65000	12,34438	12,04609	11,75501	11,47102
31	»	3,75	475	8,784	1100,675	1,781	0,98369	145,985	0,0785	1,14598	1,12729	1,10891	1,09082	1,07304
32	»	0	0	18,243	1118,918	0	1	0	0	310,86843	207,24365	155,12759	124,20409	103,81510
										l_0	l_1	l_2	l_3	l_4

Sia a la superficie del lago, g l'accelerazione di gravità, λ un parametro che risulta dalla risoluzione dell'equazione di III grado (corrispondente al caso $m = 2$); i periodi delle oscillazioni libere si traggono dalla formula:

$$T = 2\pi a / (g\lambda)^{1/2} \quad [1]$$

L'equazione che consente la determinazione dei valori di λ contiene opportune combinazioni di certe grandezze I_0, I_1, I_2, I_3, I_4 , i valori delle quali vengono dedotti dai dati che caratterizzano la forma

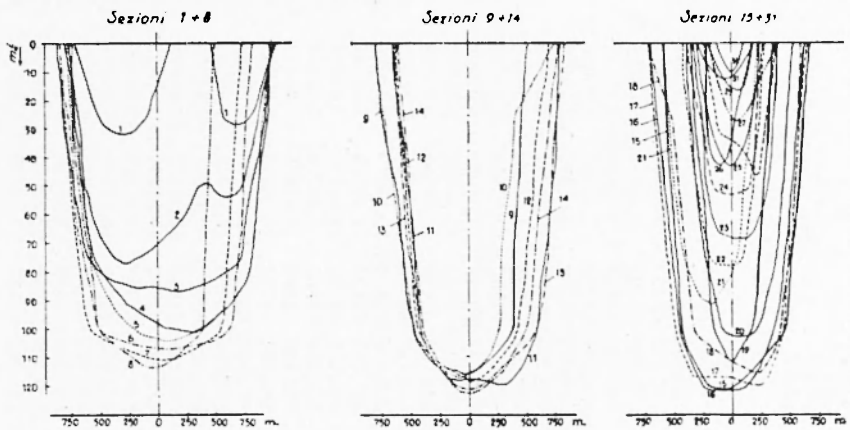


Fig. 2

del lago. Poiché, come si è detto, la curva normale è risultata di forma complessa, la relativa equazione di Chrystal è stata risolta mediante integrazione numerica. Da tale risoluzione (vedi tabella I), si sono tratti i seguenti valori:

$$I_0 = 310,86843$$

$$I_1 = 207,24365$$

$$I_2 = 155,12759$$

$$I_3 = 124,26409$$

$$I_4 = 103,81510$$

Ne è venuta la seguente equazione di III grado in λ :

$$4166,937\lambda^3 - 63,009\lambda^2 + 0,16997\lambda - 0,000095238 = 0$$

Il metodo delle approssimazioni successive ha dato i tre seguenti valori per λ :

$$\lambda_1 = 0,0007677$$

$$\lambda_2 = 0,002515$$

$$\lambda_3 = 0,011839$$

Poiché $a = 0,111892 \text{ Mm}^2$, conseguono dalla [1] per i tre valori di λ ottenuti,

$$T_1 = 13^{\text{m}},5$$

$$T_2 = 7^{\text{m}},5$$

$$T_3 = 3^{\text{m}},4$$

che rappresentano i periodi delle sesse uni-bi-trinodali del lago di Idro.

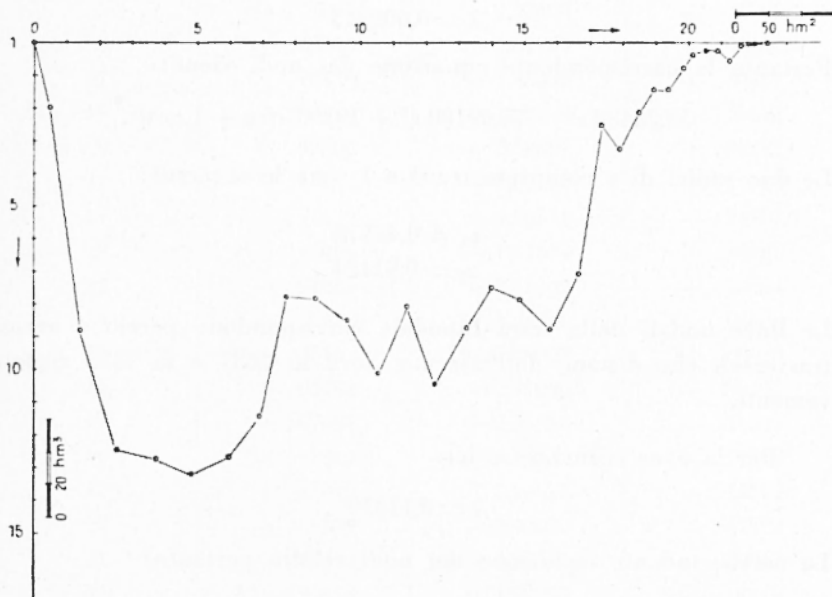


Fig. 3

Per la determinazione dei nodi va tenuto presente che in essi $du/dz = 0$. Ciò comporta nel caso $m = 2$.

$$4 \frac{A_1}{A_0} z^3 + 3 \left(\frac{A_1}{A_0} - \frac{A_2}{A_0} \right) z^2 + 2 \left(1 - \frac{A_1}{A_0} \right) z = 0 \quad [2]$$

dove il valore dei rapporti A_1/A_0 e A_2/A_0 può essere dedotto dal sistema di equazioni in A_0, A_1, \dots una volta determinati i valori di I_0, I_1, \dots e per ogni valore di λ .

Avremo pertanto, con riferimento all'oscillazione libera uninodale l'equazione di III grado in z :

$$17,40040 z^3 - 17,62232 z^2 + 5,07468 z - 1 = 0 .$$

Risolta tale equazione con il metodo delle approssimazioni successive, si è pervenuti al seguente valore per z .

$$z = 0,71812$$

che è il solo dei valori di z compresi fra 0 e 1.

L'uninodo corrisponde quindi ad una sezione che dista dall'estremo Nord m 4890.

Il valore di λ corrispondente all'oscillazione libera binodale è:

$$\lambda = 0,002515$$

Pertanto la corrispondente equazione dei nodi viene:

$$58,28488 z^3 - 75,69180 z^2 + 19,31876 z + 1 = 0 .$$

Le due radici di z comprese tra 0 e 1 sono le seguenti:

$$z_1 = 0,42578$$

$$z_2 = 0,91124 .$$

Le linee nodali della sessa binodale corrispondono perciò a sezioni trasversali che distano dall'estremo Nord m 2687 e m 7375 rispettivamente.

Per la sessa trinodale si ha:

$$\lambda = 0,11839 .$$

La corrispondente equazione dei nodi risulta pertanto:

$$10,5896 z^3 - 18,3642 z^2 + 8,9480 z - 1 = 0 .$$

Le tre radici di questa equazione sono tutte evidentemente comprese fra 0 e 1. Eccone i valori:

$$z_1 = 0,15876$$

$$z^2 = 0,62764$$

$$z^3 = 0,94777$$

A questi valori corrispondono tre sezioni trasversali (trinodi) che distano dall'estremo Nord m 854, m 4200, m 8043 rispettivamente.

TABELLA II

Sezioni	I° Uninodole	II° Binodale	III° Trinodale
0	— 1	— 1	— 1
1	— .90574	— 1,35532	— .82991
2	— .74170	— 1,93529	— .50378
3	— .62341	— 2,30835	— .19903
4	— .56319	— 2,38700	+ .03023
5	— .55064	— 2,23400	+ .18009
6	— .56969	— 1,87753	+ .28050
7	— .60170	— 1,45399	+ .32451
8	— .63414	— 1,02226	+ .33621
9	— .66596	— 0,53307	+ .32681
10	— .69171	+ 0,02120	+ .29642
11	— .70112	+ 0,60271	+ .24701
12	— .68499	+ 1,14397	+ .18663
13	— .64355	+ 1,58202	+ .12694
14	— .56518	+ 1,98500	+ .06069
15	— .45552	+ 2,28007	+ .00043
16	— .30763	+ 2,47996	— .05457
17	— .07457	+ 2,57866	— .11029
18	+ .19612	+ 2,51723	— .12773
19	+ .44012	+ 2,36538	— .16561
20	+ .68559	+ 2,15050	— .17272
21	+ .97562	+ 1,83705	— .17047
22	+ 1,22430	+ 1,52877	— .16118
23	+ 1,48708	+ 1,17055	— .14525
24	+ 1,76280	+ 0,76709	— .12302
25	+ 2,02164	+ 0,36471	— .09742
26	+ 2,25689	— 0,01747	— .07080
27	+ 2,53668	— 0,48971	— .03551
28	+ 2,85595	— 1,04958	+ .00920
29	+ 3,14555	— 1,57598	+ .05348
30	+ 3,34037	— 1,93497	+ .08472
31	+ 3,50279	— 2,24013	+ .11186
32	+ 3,85276	— 2,91184	+ .17340

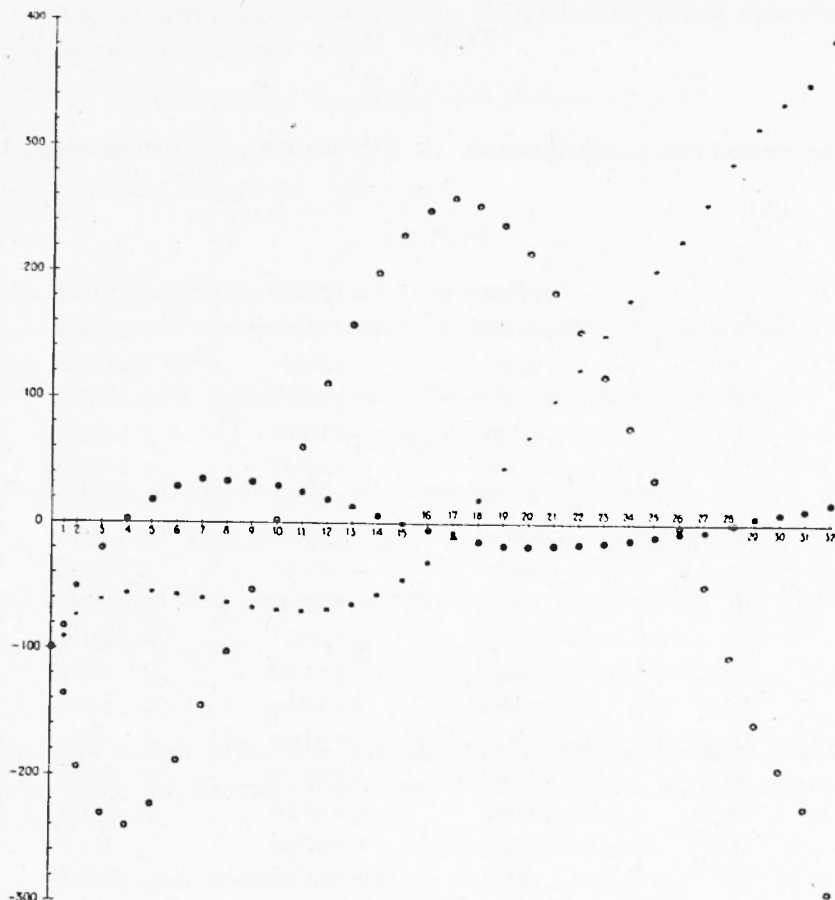


Fig. 4

Fu calcolato poi l'andamento dello spostamento verticale della superficie del lago, corrispondentemente alle tre oscillazioni libere studiate.

Le equazioni che danno l'andamento degli spostamenti verticali sono:

$$\begin{aligned} \zeta' &= 17,40040 z^3 - 17,62232 z^2 + 5,07468 z - 1 && \text{per la sessa uninodale} \\ \zeta'' &= 58,28438 z^3 - 75,69180 z^2 + 19,31876 z + 1 && \text{per la sessa hinodale} \\ \zeta''' &= 10,5896 z^3 - 18,3642 z^2 + 8,9480 z - 1 && \text{per la sessa trinodale} \end{aligned}$$

TABELLA III

SEZ.	UNINODALE						BINODALE					
	Λz 10 ² cm	S(x) 10 ⁷ cm ²	v(x) 10 ⁸ cm. ²	q 10 ¹⁰ cm. ³	2 ξ_0 10 ² cm	2 $\Delta\eta_0$ cm	2 η_0 cm	q 10 ¹⁰ cm. ³	2 ξ_0 10 ² cm	2 $\Delta\eta_0$ cm	2 η_0 cm	
0	0	0	0	2,3	7,49	100,00	2,3	—	—	100,00		
1	150	29,75	22,297	70,54	7,33	99,16	70,84	—	—	9,7		
2	300	96,25	48,619	127,01	9,55	98,33	125,73	—	—	95,58		
3	»	133,00	57,432	182,91	12,75	96,18	178,00	—	—	89,95		
4	»	143,50	58,108	223,34	15,66	93,31	178,00	—	—	82,55		
5	»	149,00	54,054	284,90	1,81	89,78	222,63	—	—	73,65		
6	»	151,25	5,132	284,90	23,03	85,51	264,93	—	—	63,20		
7	»	141,75	48,649	326,51	30,59	80,35	295,68	—	—	50,76		
8	»	117,75	41,392	360,17	33,15	73,16	316,94	—	—	34,71		
9	»	118,25	43,243	391,94	33,15	65,99	331,95	—	—	17,97		
10	»	111,75	46,022	422,71	37,83	57,47	340,33	—	—	0,18		
11	»	137,25	48,649	450,67	32,84	50,07	340,24	—	—	—		
12	»	120,50	47,297	44,35	39,37	41,20	333,15	—	—	—		
13	»	142,25	4,82	491,61	34,56	33,41	319,91	—	—	—		
14	»	127,25	44,595	50,51	39,80	24,44	299,99	—	—	—		
15	»	117,25	41,216	516,58	44,06	14,51	257,57	—	—	—		
16	»	119,00	40,540	522,45	43,90	4,62	235,7	—	—	—		
17	»	129,75	47,973	521,68	40,14	4,49	235,1	—	—	—		
18	»	107,00	3,243	522,74	48,85	15,50	246,15	—	—	—		
19	»	55,25	32,432	517,71	93,70	36,01	203,25	—	—	—		
20	»	70,50	38,378	507,32	71,96	52,82	130,63	—	—	—		
21	»	52,50	29,730	491,62	93,64	73,92	91,16	—	—	—		
22	»	41,5	22,973	474,64	115,06	99,84	59,66	—	—	—		
23	»	39,25	22,297	452,38	115,26	125,81	24,53	—	—	—		
24	»	24,50	1,622	425,18	173,54	164,91	10,35	—	—	—		
25	»	15,25	28,919	393,98	258,35	223,12	43,85	—	—	—		
26	»	11,50	16,215	357,80	311,13	293,22	10,35	—	—	—		
27	»	8,75	8,243	304,31	347,78	371,58	17,90	—	—	—		
28	»	18,25	1,9595	231,50	426,85	400,16	46,65	—	—	—		
29	»	4,50	16,892	163,91	364,24	482,23	102,69	—	—	—		
30	»	1,75	10,811	111,78	638,74	626,15	96,98	—	—	—		
31	»	3,75	18,784	56,78	143,92	660,27	79,43	—	—	—		
32	»	0	8,243	2,35	34,12	—	41,40	—	—	—		

Preso uguale ad 1 lo spostamento iniziale all'estremo Nord, sono stati calcolati, di sezione in sezione, gli spostamenti verticali relativi ad ognuna delle tre sesse citate. La tabella II riporta i risultati dei calcoli e la fig. 4 ne dà il relativo grafico.

Metodo Defant. — A scopo di controllo, ho applicato anche il metodo di Defant. È ben nota la teoria di questo metodo. Mi limito qui a dare il significato dei simboli che figurano nella tabella III. In essa è $\alpha = 4\pi^2/gT^2$, con manifesto significato dei simboli; $\Delta(x)$ rappresenta l'intervallo fra sezione e sezione; $2\xi_0$, $2\eta_0$ esprimono le ampiezze delle oscillazioni, contate lungo una sezione longitudinale del lago, in senso orizzontale e verticale rispettivamente; $2\Delta v_0$ dà la variazione dello spostamento verticale da una sezione all'altra; $q = 2\eta_0 v(x)$ esprime il volume dell'acqua che nel tempo $T/4$, fra il riposo ed il massimo spostamento di una particella liquida, passa attraverso una generica sezione $S(x)$.

Quando il periodo T dell'oscillazione libera considerata coincide con il periodo dell'oscillazione del lago, in corrispondenza dell'ultima sezione si dovrà avere $q = 0$.

Per la sessa uninodale, il valore $T = 14^m,4$ ha portato al residuo $q = 142,03:10^{10}$ cm³. Dopo un altro tentativo per $T = 12^m,2$ il residuo è stato praticamente nullo (tabella III).

Per quanto concerne la sessa binodale un residuo praticamente nullo si è avuto con il periodo $T = 7^m,5$ (tabella III).

La fig. 5 dà la posizione dei nodi e l'andamento degli spostamenti lungo il lago, per le due oscillazioni libere considerate, ottenute con il metodo di Defant.

La ricerca analitica condotta sul lago di Idro ha portato ai risultati che qui ora riassumo

Oscillazioni libere		Primo metodo (Hidaka)	Secondo metodo (Defant)
Uninodale	{ periodo nodo dall'estremo Nord	13,5 4890 metri	12,2 1650 metri
Binodale	{ periodo I Binodo II Binodo	7,5 2687 metri 7375 metri	7,5 2700 metri 7800 metri
Trinodale	{ periodo I Trinodo II Trinodo III Trinodo	3,4 854 metri 4200 metri 8043 metri	

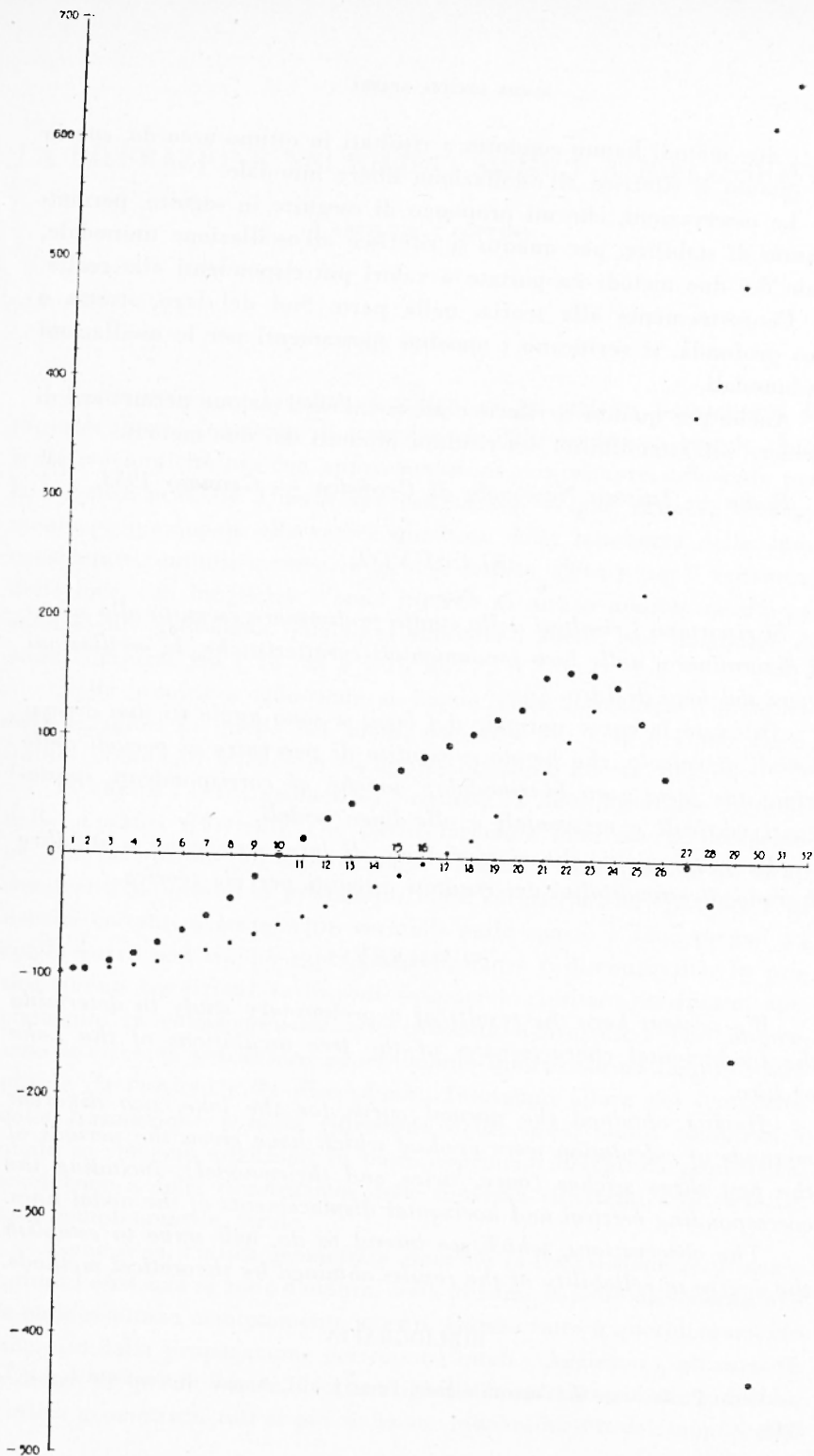


Fig. 5

I due metodi hanno condotto a risultati in ottimo accordo, specie per quanto si riferisce all'oscillazione libera binodale.

Le osservazioni, che mi propongo di eseguire in seguito, permetteranno di stabilire, per quanto si riferisce all'oscillazione uninodale, quale dei due metodi ha portato a valori più rispondenti alla realtà.

Conformemente alla teoria, nella parte Sud del lago, stretta e poco profonda, si verificano i massimi spostamenti per le oscillazioni uni-binodali.

Anche per quanto si riferisce ad essi, l'osservazione permetterà di decidere sull'attendibilità dei risultati ottenuti dai due metodi.

Roma — Istituto Nazionale di Geofisica — Gennaio 1953.

RIASSUNTO

Si riportano i risultati dello studio preliminare eseguito allo scopo di determinare, nelle loro fondamentali caratteristiche, le oscillazioni libere del lago di Idro.

Ottenuta la curva normale del lago, si sono applicati due diversi metodi di calcolo, che hanno consentito di pervenire ai periodi delle prime tre sesse (uni-,bi-trinodale) nonché ai corrispondenti spostamenti verticali e orizzontali e alle linee nodali.

Le osservazioni, che ci riserviamo di fare, serviranno a stabilire il grado di attendibilità dei risultati ottenuti per via teorica.

SUMMARY

We present here the results of a preliminary study to determine the fundamental characteristics of the free oscillations of the Lake of Idro.

Having obtained the normal curve for the lake, two different methods of calculation were applied which have given the periods of the first three seiches (once, twice and thrice-nodal), including the corresponding vertical and horizontal displacements of the nodal lines.

The observations, which we intend to do, will serve to establish the degree of reliability of the results obtained by theoretical methods.

BIBLIOGRAFIA

CALOI P., *Le sesse del lago di Garda*. Parte I e II, Annali di Geofisica I, 1 e 2, 1948.