

Le sesse del lago di Como

Parte II (*)

OSCILLAZIONI INTERESSANTI L'INTERO LAGO

P. CALOI - M. C. SPADEA

ricevuto il 30 settembre 1959

I - STIMA APPROSSIMATIVA DEI PERIODI DI ONDE STAZIONARIE IN UN SISTEMA DI TRE CANALI CHIUSI.

Il lago di Como ha una forma caratteristica, che si può approssimare a quella di un canale (parte settentrionale), che si biforca all'altezza di Bellagio in due canali, aventi gli estremi l'uno (occidentale) a Como e l'altro a Lecco (di dove esce l'Adda).

Indichiamo con b_1, b_2, b_3 e h_1, h_2, h_3 la larghezza media e la profondità media dei tre rispettivi canali presi in considerazione. L'approssimazione che così si ottiene è tanto più attendibile quanto più le larghezze b_1, b_2, b_3 sono piccole rispetto alla lunghezza dei canali; condizione questa pienamente soddisfatta nel lago di Como.

In questa ipotesi, l'innalzamento della superficie, sotto l'azione di un'onda lunga passante per il punto di confluenza dei tre rami, può considerarsi identica in tre sezioni (appartenente ognuna ad uno dei tre rami) il più vicino al punto di confluenza. Per la trattazione matematica, le sezioni considerate possono ritenersi attraversare l'origine delle coordinate di superficie di ogni canale; in tal modo, la sezione 1 può passare attraverso $x_1 = 0$ e la lunghezza l_1 dell'intero primo canale viene contata da questa sezione all'estremità del canale stesso.

Il moto di onde lunghe in un canale a sezione uniforme è rappresentato dalle due equazioni differenziali:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial y}{\partial x}; \quad \eta = -h \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

(*) Le parti I, II di questo lavoro sono state condotte con contributi del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

dove ξ rappresenta lo spostamento orizzontale delle particelle d'acqua, η lo spostamento verticale della superficie nello stesso punto e h la profondità media della sezione trasversale del canale considerato.

Nel caso di movimento armonico semplice di periodo $T = \frac{2\pi}{\sigma}$ possiamo porre,

$$\begin{aligned} \xi &= \cos \sigma t \left(A \cos \frac{\sigma x}{c} + B \sin \frac{\sigma x}{c} \right), \text{ con } c = \sqrt{gh} & [1] \\ \eta &= \frac{h \sigma}{c} \cos \sigma t \left(A \sin \frac{\sigma x}{c} - B \cos \frac{\sigma x}{c} \right), \end{aligned}$$

espressioni che soddisfano le equazioni del moto. Evidentemente c rappresenta la velocità di propagazione di un'onda libera lungo il canale di profondità h . Le costanti A , B , h , c e la coordinata x si intendono affette degli indici 1, 2, 3, a seconda che si riferiscano al primo canale o alle due ramificazioni, nell'ordine.

Per il punto di confluenza, dove $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, si ottiene

$$B_1 \frac{h_1}{c_1} = B_2 \frac{h_2}{c_2} = B_3 \frac{h_3}{c_3}. \quad [2]$$

La condizione di incompressibilità richiede che la quantità d'acqua fluente, in un certo tempo, attraverso la sezione 1 verso la confluenza, uguagli la somma delle quantità attraversanti le sezioni 2, 3, oltre la confluenza. Ciò porta come conseguenza che per $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, si ha:

$$\sum_{i=1}^3 A_i b_i h_i = 0 \quad [3]$$

All'estremità dei canali chiusi, avremo poi

$$\xi_i = 0 \quad \text{per } x_i = l_i. \quad (i = 1, 2, 3)$$

Dalla [1] consegue allora

$$\frac{A_i}{B_i} = - \operatorname{tg} \frac{\sigma l_i}{c_i}. \quad (i = 1, 2, 3) \quad [4]$$

Dalla [1], ricordando la [4], otteniamo

$$\xi_i = B_i \frac{\cos \sigma t}{\cos \frac{\sigma l_i}{c_i}} \sin \frac{\sigma (x_i - l_i)}{c_i}, \quad (i = 1, 2, 3)$$

Tabella I

LECCO-BELLAGIO $l_2 = 19.000 \text{ m}$				COMO-BELLAGIO $l_1 = 23.375 \text{ m}$			
Sez.	$S(x)$ 10^3 m^2	$b(x)$ 10^2 m	h m	Sez.	$S(x)$ 10^3 m^2	$b(x)$ 10^2 m	h m
0 ^a	0	0	0	0	0	0	0
1 ^a	500	8.00	29.25	1	382.50	7.00	23.56
2 ^a	985	13.75	57.62	2	972.75	11.25	59.92
3 ^a	1355	12.75	79.27	3	1383.25	16.00	85.21
4 ^a	1325	11.75	77.51	4	1560.75	13.25	96.14
5 ^a	1805	14.25	105.59	5	1875.00	16.00	115.50
6 ^a	1440	13.50	84.24	6	1230.50	8.25	75.80
7 ^a	1275	12.00	74.59	7	1549.75	10.75	95.46
8 ^a	1870	16.50	109.39	8	3770.75	18.00	232.28
9 ^a	1420	16.50	83.07	9	3248.75	17.50	200.12
10 ^a	1065	14.75	62.30	10	2647.25	13.25	163.07
11 ^a	1945	18.25	113.78	11	2168.75	9.75	133.59
12 ^a	2585	22.25	151.22	12	2187.00	8.00	134.72
13 ^a	2790	19.75	163.21	13	4362.50	15.00	268.73
14 ^a	2810	20.00	169.38	14	4892.50	17.25	301.38
15 ^a	2925	23.75	171.11	15	4770.50	14.75	293.86
16 ^a	4170	26.00	243.94	16	4989.50	17.00	307.35
17 ^a	5710	24.50	298.93	17	5663.50	20.50	348.87
18 ^a	4100	19.50	239.85	18	5992.75	20.25	369.15
		$\bar{b} = \text{m } 1710.00$	$\bar{h} = \text{m } 121.80$	19	5510.25	20.75	339.43
				20	4900.00	23.50	301.84
				21	6300.00	23.50	388.10
				22	4850.00	19.00	298.76
				23	4869.75	24.50	299.98
				24	5353.50	25.75	329.78
				25	2511.50	16.75	154.71
				26	2383.75	16.00	146.84
				27	1267.75	18.09	78.09
					$\bar{b} = \text{m } 1623.00$	$\bar{h} = \text{m } 201.51$	

RAMO UNICO $l_3 = 28.000 \text{ m}$			
Sez.	$S(x)$ 10^3 m^2	$b(x)$ 10^2 m	h m
28	4637	40.50	155.76
29	6107	40.00	209.39
30	7818	37.00	274.70
31	8170	33.50	289.22
32	9505	37.50	336.48
33	9330	34.25	330.28
34	9010	37.00	318.95
35	7490	34.50	265.15
36	7530	33.50	266.56
37	2605	20.25	92.22
38	2800	18.00	99.12
39	4340	26.50	153.64
40	5070	28.50	179.48
41	5635	31.75	199.48
42	4730	27.50	167.44
43	3990	22.00	191.25
44	3325	33.25	117.70
45	5325	42.50	188.50
46	2595	20.75	91.86
47	2680	26.25	94.87
48	2965	30.75	104.96
49	1525	25.55	53.98
50	235	11.00	8.32
51	0	0	0
		$\bar{b} = \text{m } 2822.00$	$\bar{h} = \text{m } 174.55$

Tabella II

LECCO - BELLAGIO $l_2 = 19.000$ m.						COMO - BELLAGIO $l_1 = 23.375$ m.				
Sez.	$\alpha \Delta x$ 10 ⁻⁴	q 10 ⁹	$2 \xi_0$ 10 ⁸ cm	$2 \Delta \eta_0$ cm	$2 \eta_0$ cm	Sez.	q 10 ⁹	$2 \xi_0$ 10 ⁸ cm	$2 \Delta \eta_0$ cm	$2 \eta_0$ cm
0a	7.907	0	0	0	100	0	0	0	0	100
1a	»	825	- 1,65	- 1,30	98,70	1	1111,25	- 2,91	- 2,30	97,70
2a	»	2034,07	- 2,06	- 1,63	97,07	2	1931,93	- 1,99	- 1,57	96,13
3a	»	3344,51	- 2,47	- 1,95	95,12	3	3104,72	- 2,24	- 1,77	94,36
4a	»	4533,51	- 3,42	- 2,70	92,42	4	4116,73	- 2,64	- 2,09	92,27
5a	»	5804,28	- 3,22	- 2,55	89,87	5	5279,33	- 2,82	- 2,23	90,04
6a	»	7287,13	- 5,06	- 4,00	85,87	6	6359,81	- 5,17	- 4,09	85,95
7a	»	8424,91	- 6,61	- 5,23	80,64	7	7172,04	- 4,63	- 3,66	82,29
8a	»	9715,15	- 5,20	- 4,11	76,53	8	8519,54	- 2,26	- 1,79	80,50
9a	»	11188,35	- 7,88	- 6,23	70,30	9	10103,38	- 3,11	- 2,46	78,04
10a	»	12401,02	- 11,64	- 9,20	61,10	10	11422,26	- 4,31	- 3,41	74,63
11a	»	13592,47	- 6,99	- 5,53	55,57	11	12340,21	- 5,69	- 4,50	70,13
12a	»	14828,90	- 5,74	- 44,5	51,03	12	12859,17	- 5,88	- 4,65	65,48
13a	»	15977,07	- 5,73	- 4,58	46,50	13	13612,19	- 3,12	- 2,47	63,01
14a	»	16965,19	- 6,04	- 4,73	41,72	14	14710,14	- 3,01	- 2,38	60,63
15a	»	17914,32	- 6,12	- 4,84	36,88	15	15655,97	- 3,28	- 2,59	58,04
16a	»	18928,52	- 4,54	- 3,59	33,29	16	16518,59	- 3,31	- 2,62	55,42
17a	»	19744,12	- 3,46	- 2,74	30,55	17	17633,92	- 3,11	- 2,46	52,96
18a	»	20500,23	- 5,00	- 3,95	26,60	18	18746,08	- 3,13	- 2,47	50,49
19a	»	21072,13	- 4,79	- 3,79	22,81	19	19806,37	- 3,59	- 2,84	47,65
						20	20832,04	- 4,25	- 3,36	44,29
						21	21971,40	- 3,49	- 2,76	41,53
						22	22926,59	- 4,73	- 3,74	37,79
						23	23662,55	- 4,86	- 3,84	33,95
						24	24490,08	- 4,57	- 3,61	30,34
						25	25142,39	- 10,01	- 7,91	22,43
						26	25533,23	- 10,71	- 8,47	13,96
						27	25799,52	- 20,35	- 16,09	- 2,13

RAMO UNICO $l_3 = 28.000$ m				
Sez.	q 10 ⁹	$2 \xi_0$ 10 ⁸ cm	$2 \Delta \eta_0$ cm	$2 \eta_0$ cm
	23772,00	0	0	- 2,13
28	23687,55	- 5,11	- 4,04	- 6,17
29	23466,23	- 3,84	- 3,04	- 9,21
30	23067,44	- 2,95	- 2,33	- 11,54
31	22609,65	- 2,77	- 2,19	- 13,73
32	22046,72	- 2,32	- 1,83	- 15,56
33	21397,09	- 2,29	- 1,81	- 17,37
34	20789,14	- 2,31	- 1,83	- 19,20
35	20073,94	- 2,68	- 2,12	- 21,32
36	19274,44	- 2,56	- 2,02	- 23,34
37	18550,90	- 7,12	- 5,63	- 28,97
38	18029,44	- 6,44	- 5,09	- 34,06
39	17177,94	- 3,96	- 3,13	- 37,19
40	16193,11	- 3,19	- 2,52	- 39,71
41	14882,68	- 2,64	- 2,09	- 41,80
42	13388,33	- 2,83	- 2,24	- 44,04
43	11890,97	- 2,98	- 2,36	- 46,40
44	10487,37	- 3,15	- 2,49	- 48,99
45	8409,55	- 1,58	- 1,25	- 50,14
46	6529,30	- 2,52	- 1,99	- 52,13
47	5239,08	- 1,95	- 1,54	- 53,67
48	3374,05	- 1,14	- 0,90	- 54,57
49	1586,88	- 1,04	- 0,82	- 55,39
50	396,00	- 1,69	- 1,34	- 56,73
51	112,35			

mentre dalla [3] consegue, nel caso dei tre canali chiusi,

$$\sum_1^3 B_i b_i h_i \operatorname{tang} \frac{\sigma l_i}{c_i} = 0$$

oppure (v. [2])

$$\sum_1^3 b_i c_i \operatorname{tang} \frac{\sigma l_i}{c_i} = 0. \quad [5]$$

È questa l'equazione di Zeilon (1).

Ci siamo proposti di applicare, nella determinazione del periodo, approssimativo dell'oscillazione libera uninodale del lago di Como, la formula [5].

Le lunghezze dei tre rami, dei quali questo lago consiste, sono rispettivamente $l_1 = 23.375$ m. (Como-Bellagio), $l_2 = 19.000$ m. (Lecco-Bellagio), $l_3 = 28.000$ m. (Bellaio-riva); le rispettive larghezze medie sono $b_1 = 2822$ m., $b_2 = 1710$ m., $b_3 = 1623$ m., come risulta dalla Tabella I. La stessa Tabella fornisce anche le profondità medie, le quali permettono di calcolare i valori delle c_i : si è ottenuto $c_1 = 41,36$ m/sec., $c_2 = 34,75$ m/sec., $c_3 = 44,44$ m/sec. Con questi dati morfometrici, risolvendo la [5] con il metodo delle approssimazioni successive, si è ottenuto

$$T = 40^m, 6 \quad [6]$$

come periodo dell'uninodale dell'intero lago. Si tratta, naturalmente di un valore approssimativo, che — come vedremo — non differisce molto da quello ottenuto con altro metodo.

II - Il metodo di Defant è stato già esposto in lavori precedenti (2).

L'applicazione di tale metodo ad un lago ramificato, comporta alcuni accorgimenti da tener presenti per la zona del lago dove avviene la saldatura dei tre rami.

Siano, per esempio, n_1 il numero delle sezioni del ramo più corto (Lecco), n_2 il numero delle sezioni dell'altro ramo (Como). Siano inoltre α e β i valori di $2\eta_0$, corrispondenti alle sezioni di n_1 ed n_2 rispettivamente e siano, inoltre A e B i relativi valori di q . Per determinare il valore di q corrispondente alla sezione n_1 , quale sarebbe se $2\eta_0$ fosse uguale a β , A va moltiplicato per β/α .

Pertanto il calcolo relativo al ramo nord inizierà con la sezione $n_1 + n_2$, dove q avrà il valore espresso da $B + A \cdot \beta/\alpha$ e $2\eta_0$ avrà il valore β . Per le successive sezioni, il calcolo procederà nel modo abituale.

Applicato il metodo di Defant con gli avvertimenti sopra detti, dopo alcuni tentativi si è pervenuti ai valori riportati nella Tabella II, corrispondenti ad un periodo

$$T = 37^m, 6 \quad [7]$$

per l'uninodale dell'intero Lago.

III - Il periodo dell'oscillazione uninodale interessante l'intero lago di Como, dovrebbe cadere fra i 38^m e i 40^m.

È interessante osservare che l'applicazione del metodo di Hidaka, fatta al lago prescindendo dal ramo di Como-Bellagio ha condotto, come si è visto nel lavoro precedente (3), ad un valore di 39^m circa. Data la lieve differenza che passa fra il valore dell'uninodale interessante l'intero lago e quello della stessa oscillazione da Gera e Lecco, dal punto di vista idrodinamico possono realizzarsi entrambe le oscillazioni; fatto che non si sarebbe potuto verificare qualora il lago incompleto avesse avuto un periodo dell'uninodale decisamente maggiore di quello dell'intero lago.

Soltanto le osservazioni potranno confermare o meno questi valori ottenuti per via teorica.

RIASSUNTO

Applicando all'intero lago due metodi diversi abbiamo ottenuto per l'uninodale valori varianti fra 38^m e 40^m.

Poichè l'oscillazione da Gera a Lecco (vedi parte I) ha un valore di 39^m ca., dal punto di vista idrodinamico possono valorizzarsi entrambe le oscillazioni, cioè sia quella interessante l'intero lago che quella limitata al ramo di Lecco e al suo prolungamento.

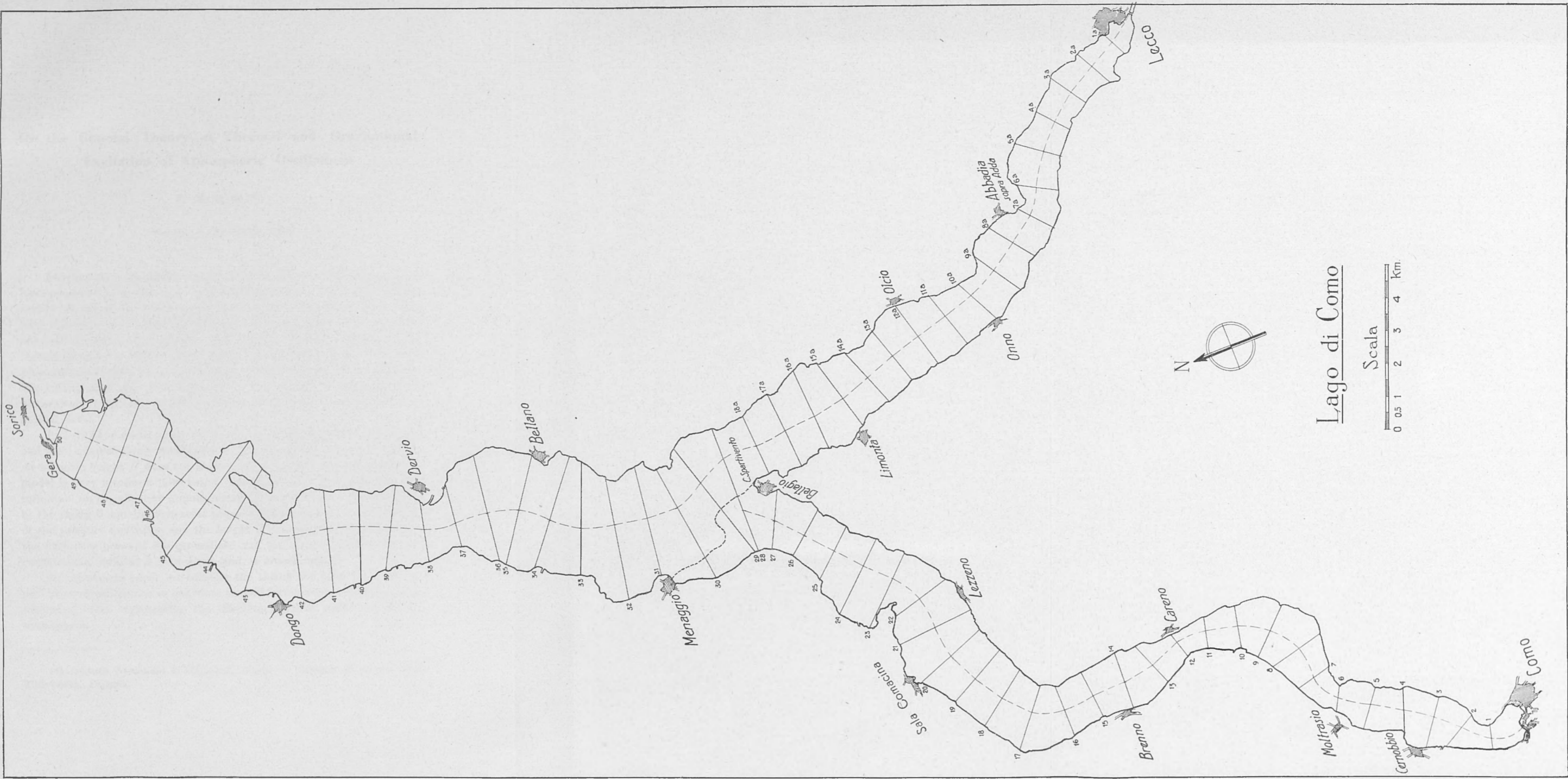
ABSTRACT

Applying to the whole Lake two different methods, we have obtained for the uninodal, figures ranging from 38^m to 40^m.

As the oscillation from Gera to Lecco (see part I) has reached about 39^m, speaking from hydrodynamic point of view, both oscillations can take place, i.e. the one that concerns the whole lake and the other that is limited to the Lecco branch and its extension.

BIBLIOGRAFIA

- (1) ZEILON N., *On the Seiches of the Gullmar Fjord*. Goteborg (1913).
- (2) CALOI P., *Le sesse del Lago di Garda*; Parte II, « *Annali di Geofisica* » (1948).
- (3) CALOI P.-SPADEA M. C., *Le sesse del Lago di Como*, Parte I, « *Annali di Geofisica* », (1958).



Lago di Como

