

SULL'EFFETTO ELETTROMAGNETICO DIRETTO DI EMITTORI ALTERNATIVI IN UN TERRENO OMOGENEO

A. BELLUIGI

In: « Sui campi geoelettromagnetici a bassa frequenza » (1) risolveremo una serie di problemi connessi con l'impiego dei campi magnetici nella prospezione geoelettrica a c.a. a bassa frequenza.

Ritorniamo qui su questioni riguardanti invece la conoscenza dei campi geoelettrici, tanto più discordi pareri vertono sull'argomento (Lewis, Horton, Wolf, Evjen, Müller).

Nella teoria del dipolo orizzontale alternativo (d.a.), pulsazione: $\omega = 2\pi f$, con l'asse lungo x , sulla superficie d'un suolo omogeneo (o a stratificazione orizzontale), Sommerfeld mostrò che le condizioni maxwelliane di passaggio delle componenti e.m. (nel piano di separazione: aria-suolo di conduttività: σ) si soddisfano se si ammette un potenziale-vettore m (p.v.). A , la cui componente A_x sia identicamente nulla nell'aria e nel suolo, mentre le altre due componenti, diverse da zero, si calcolano ora agevolmente mercè gli integrali Fock-Foster [1].

W. B. Lewis ha voluto vedere [2] un conflitto tra le soluzioni Sommerfeld e quelle derivanti dall'equazione delle onde non priva dell'addendo con la costante dielettrica: [3].

Senonché quest'ultime, riferibili ad un oscillatore dipolare nello spazio vuoto, dove al posto delle velocità della luce c si sostituisce la velocità complessa $c/(n + jk)$, (con n costante di fase, k coefficiente d'estinzione del mezzo), comporta necessariamente componenti di \bar{A} tutte diverse da zero.

Se la teoria di Sommerfeld prescinde in partenza, nell'equazione delle onde, dalla costante dielettrica ε , quella di Smith-Horton-Lewis, [3], resta pur sempre molto approssimata, trascurando essa ad un certo punto la ε , limitazione però che qui rimuoviamo facilmente.

A parte il fatto che la teoria di Horton non considera nell'equazione delle onde, l'addendo (non nullo per la conduzione prevalentemente ionica dei suoli) della divergenza del vettore elettrico, e ritiene σ ed ε indipendenti dalla frequenza (quindi anch'essa ha sempre una consistenza molto approssimata), l'eliminazione poi nelle risolventi della ε porta a limitare i risultati adeguandoli quasi del tutto ai vecchi.

Rimuovendo, al contrario, tale approssimazione, con: ($\varepsilon \neq 0$), si potranno dedurre ulteriori, notevoli proprietà dei c.e.m. terrestri, come verrà qui tutto mostrato.

§ 1. — Dalle espressioni integrali delle componenti il p.v. \bar{A} , nell'aria e nel suolo:

$$A_x \neq 0, \quad A_y = 0, \quad A_z \neq 0, \quad \text{div } A = \partial A_x / \partial x + \partial A_z / \partial z \quad [1]$$

poste sotto forma di funzioni esponenziali e cilindriche con argomento la « distanza numerica » mercè gli integrali Fock-Foster, si ottengono subito le 6 componenti del campo e.m., in particolare quella orizzontale del campo elettrico parallela al dipolo, alla superficie del suolo omogeneo:

$$E_x = -i\omega A_x + \frac{\partial}{\partial x} (\text{div } A) / 4\pi\sigma = [2 - 3x^2 r^{-2} - (1 + \gamma r) e^{-\gamma r}] 2\pi\sigma r^3 \quad [2]$$

$$\gamma^2 = 4\pi\sigma\omega i; \quad \gamma r - 2\pi r(\sigma f)^{1/2} \cdot (1+i) = \zeta(1+i); \quad \zeta = 2\pi r(\sigma f)^{1/2}, \quad e$$

la complanare perpendicolare al dipolo che si riduce (fatto smentito però dall'esperienza), ad un valore stazionario:

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y} (\text{div } A) / 4\pi\sigma = -3xy / r^3 (2\pi\sigma) \quad [3]$$

D'altronde questa deduzione, legata ai presupposti teorici di Sommerfeld, ha pure un chiaro significato fisico: la [2] equivale alla classica:

$$E_x = I ds \left[-P(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} Q(x) \right], \quad \text{con:}$$

$$P(x) = \frac{i\omega}{2\pi x} [1 - (1 + \gamma x) e^{-\gamma x}] / (\gamma x)^2 \simeq \frac{i\omega}{4\pi x} \left[1 - \frac{2}{3}(\gamma x) + \frac{1}{4}(\gamma x)^2 \right]$$

$$Q(x) = 1/2\pi\sigma x, \quad \gamma^2 = i\omega\sigma, \quad Q(r) = 1/2\pi\sigma r.$$

La [3] diventa: $E_y = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} Q(r)$, dove $Q(r)$ non è che una resistenza mutua in corrente continua.

Nel mezzo, viceversa, tutte e tre le componenti di \bar{E} sono $\bar{E}(\gamma)$, funzioni cioè della frequenza, con tipiche fisionomie analitiche.

Le formole [2], [3], sono state dedotte da più A.A. a cominciare da Stefanescu, Yost, ecc.), indirettamente da A. Wolf [5] nello studio di un dipolo oscillatore a bassa frequenza sulla superficie esterna di due strati orizzontali sovrapposti.

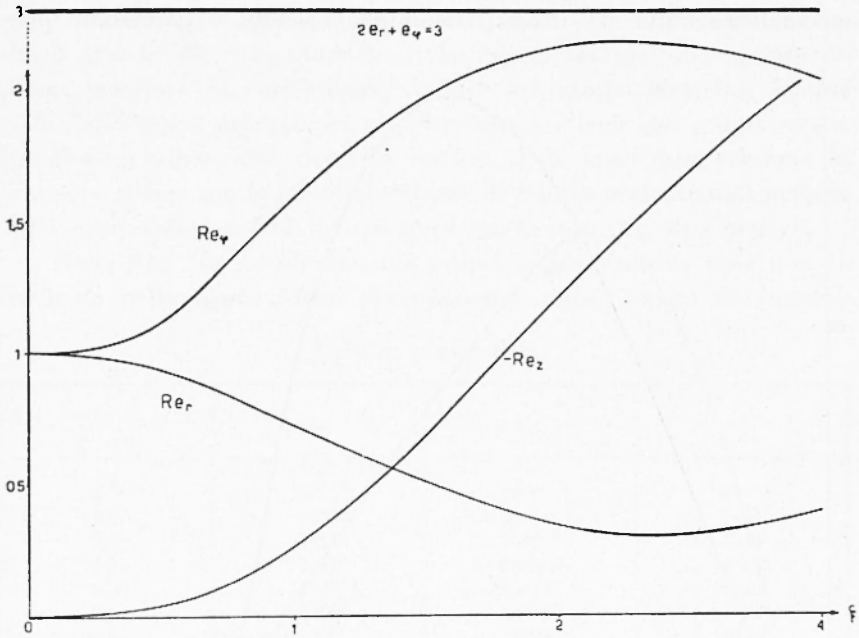


Fig. 1-a

Dalle [2], [3] si ricavano le componenti di \bar{E} , (radiale e tangenziale):

$$F_r = E_x \cos \varphi + E_y \sin \varphi = -(\pi \sigma r^3)^{-1} [1 + (1 + \gamma r) e^{-\gamma r}] \cos \varphi \quad [4]$$

$$E_\varphi = -E_x \sin \varphi + E_y \cos \varphi = -(2 \pi \sigma r^3)^{-1} [2 - (1 + \gamma r) e^{-\gamma r}] \sin \varphi \quad [5]$$

quindi le « ridotte » adimensionali (v. Fig. 1_a):

$$e_r = E_r / F_{rc} \quad , \quad e_\varphi = E_\varphi / F_{\varphi c} \quad , \quad e_z = F_z / E_{rc} \quad , \quad [6]$$

termini questi di correzione del campo statico per valori finiti di (γr) , dove E_{rc} , $E_{\varphi c}$, sono le componenti di \bar{E} in corrente continua.

La scala delle ascisse, lineare, nella figura (1), è stata ridotta a metà da $\zeta = 2$ in poi, per ragioni di spazio.

In Fig. 1-a appaiono solo le parti reali delle « ridotte » del campo elettrico in funzione della « distanza numerica ». Abbiamo ommesso nel disegno le parti immaginarie, inquanto, quelle delle componenti orizzontali, risultano quasi trascurabili rispetto alle reali.

È, a nostro avviso, perciò, superfluo mettere la [2] sotto una forma analitica unita: (v. Yost); comunque, volendo, è immediato pro-

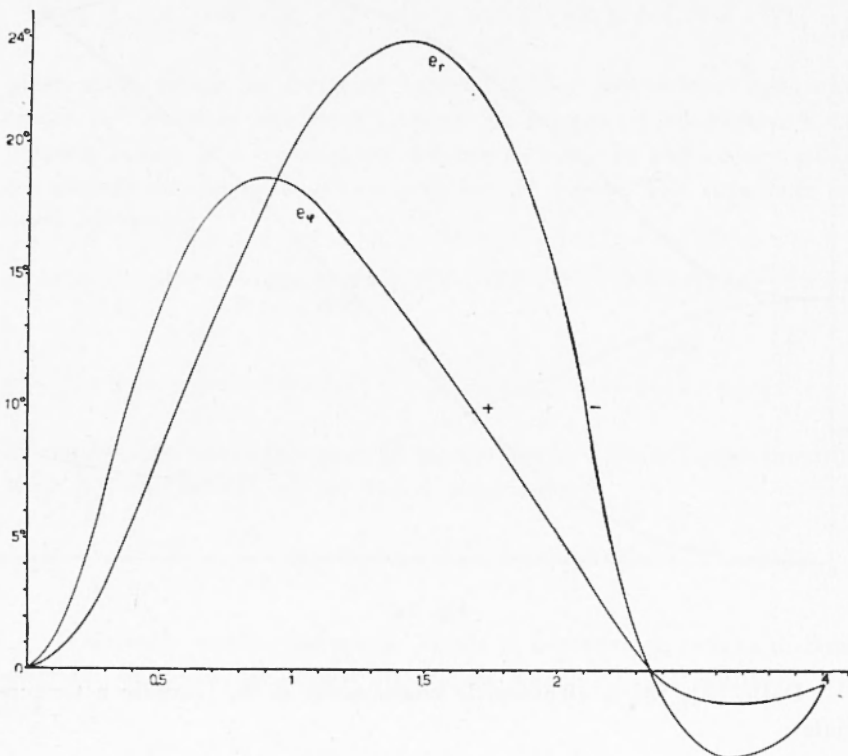


Fig. 1-b

cedere dalla [2], calcolo che non vale la pena riportare, dal quale però risalendo ai grafici si riottengono pressapoco quelli di Fig. 1-a.

Si vede che l'intensità del c.e. orizzontale, per piccolissime distanze numeriche dal (d.a.), è dello stesso ordine di grandezza di quella del dipolo continuo (d.c.) della stessa potenza.

Gli sfasamenti, pur su terreno omogeneo, più accentuati a distanza numerica relativamente piccola con caratteristico massimo (v. Fig. 1-b e seguente Tabella sfasamenti), tendono a scomparire da un certo valore di ξ , insorgendo poi campi elettrici completamente polarizzati.

La preoccupazione dell'incidenza di questi sfasamenti, del (Yost), (nello spazio e nel tempo), accentuati nella regione più utile alle misure, può essere rimossa una volta riconosciuto il « campo di fase normale », (relativo ai suoli omogenei), (v. Fig. 1-b), tenendone conto, quale « fattore di correzione » dei valori di campo d'osservazione.

È da osservare, per quanto almeno suggerisce la presente teoria, che a grande distanza numerica (che non è sempre una grande distanza metrica), la componente radiale del campo elettrico diventa metà dell'altra, e prevale poi la proiezione verticale del campo stesso. Quest'osservazione, che ricorrerà ancora, è da tener ben presente in relazione specie con le prassi americane di misure preferenziali proprio delle componenti radiali (siano pure giustificate per altri motivi).

Nella Fig. 1-b s'evidenzia una proprietà invariante (che non ritroviamo nelle teorie meno approssimate), della somma dei moduli

Tabella sfasamenti

$\xi \backslash \varphi$	e_r	e_z	e_z
0	0	- 90°00	0
0.1	- 0°31	- 89°26'	+ 1°02'
0.2	- 1°54'	- 87°39'	+ 3°40'
0.3	- 3°47'	- 86°03'	+ 7°12'
0.4	- 6°07'	- 83°35'	+ 10°47'
0.5	- 8°36'	- 81°19'	+ 13°58'
0.6	- 11°09'	- 79°09'	+ 16°23'
0.7	- 13°39'	- 76°52'	+ 17°55'
0.8	- 16°02'	- 74°36'	+ 18°44'
0.9	- 18°15'	- 72°22'	+ 18°54'
1	- 20°10'	- 70°15'	+ 18°32'
1.1	- 21°47'	- 68°13'	+ 17°48'
1.2	- 23°02'	- 66°14'	+ 16°47'
1.3	- 23°47'	- 64°22'	+ 15°36'
1.4	- 24°04'	- 62°35'	+ 14°15'
1.5	- 23°54'	- 60°55'	+ 12°52'
1.6	- 23°08'	- 59°20'	+ 11°27'
1.7	- 21°50'	- 57°53'	+ 10°01'
1.8	- 20°03'	- 56°31'	+ 8°38'
1.9	- 17°47'	- 55°16'	+ 7°18'
2.0	- 15°15'	- 54°08'	+ 6°01'
2.2	- 9°56'	- 52°10'	+ 3°47'
2.4	- 5°06'	- 50°33'	+ 1°56'
2.6	- 1°21'	- 49°16'	+ 0°32'
2.8	+ 1°10'	- 48°18'	- 0°27'
3.0	+ 1°22'	- 47°34'	- 1°06'
3.2	+ 3°03'	- 47°03'	- 1°23'
3.4	+ 2°58'	- 46°41'	- 1°26'
3.6	+ 2°40'	- 46°25'	- 1°18'
3.8	+ 2°11'	- 46°15'	- 1°05'
4.0	+ 1°42'	- 46°07'	- 0°52'

delle componenti tangenziale e doppio-radiale, somma che rimane costante comunque vari la « distanza numerica »: (parallela all'ascissa).

Tale « invariante » dà il modo, misurata una componente, di poter subito risalire all'altra senza ulteriori misure, col presupposto (ben inteso) dell'omogeneità del terreno, anzi può essere un « indice » di riconoscimento di massima di « zone anomale » se l'invariante non resta tale da punto a punto.

Se invece di considerare un dipolo *e.* alternativo orizzontale, si prende un dipolo *e.* alternativo verticale *ds* alla superficie del suolo, per cui il campo *e.m.* può essere rappresentato solo dalla componente verticale del vettore hertziano, nella forma generale:

$$\Pi_z = -I ds \frac{\gamma}{2} \{ (1 - zR^{-1}) I_1 K_0 + (1 + zR^{-1}) I_0 K_1 \} / 2\pi(\sigma + i\omega\varepsilon)$$

con le *I, K,* funzioni di Bessel e di Hankel modificate, di argomenti rispettivi $\left[\frac{\gamma}{2}(R-z) \right]$, $\left[\frac{\gamma}{2}(R+z) \right]$, *R* distanza del punto d'osservazione nel suolo dall'origine delle coordinate in cui è posto il dipolo verticale, si trova per la ridotta verticale di campo elettrico *Ez*, un valore pure invariante nella grandezza di tale campo, al variare della costante numerica, retta parallela all'ascissa, analogamente a quella di Fig. 1-a, caratteristica dunque fondamentale elettrica del suolo uniforme, con $\varepsilon = 0$. (sia con dipoli orizzontali che verticali).

Abbiamo messo particolarmente in evidenza tali proprietà invariantive potendo esse, valutando gli « scostamenti » nei profili, costituire il principio di un eccellente nuovo metodo di prospezione a bassa frequenza, sui cui sviluppi si riferirà a parte.

È opportuno ora seguire l'evoluzione delle « componenti ridotte del *c. e. m.* », tenendo conto del moltiplicatore ($e^{i\omega t}$), al variare di ξ , a cominciare dalla « ridotta radiale » [4]. Essa per $t = T/4$ non dà sfasamenti iniziali: ($\xi = 0$), e può scriversi:

$$e_r(\xi) = \frac{1}{2} e^{i\pi/2} [1 + (1+i)\xi] e^{-(1+i)\xi} \quad [7]$$

con parti reale, immaginaria rispettivamente:

$$R_1(\xi) = -\frac{1}{2} e^{-\xi} [\xi \cos \xi - (1+\xi) \operatorname{sen} \xi] \quad [8]$$

$$I_1(\xi) = \frac{1}{2} e^{-\xi} \{ (1+\xi) \cos \xi + \xi \operatorname{sen} \xi \} + 1/2 \quad [9]$$

$$R_1(0) = R_1(\infty) = 0 \quad , \quad R_1'(\xi) = \xi \cos \xi e^{-\xi}$$

La derivata rispetto a ζ : $R'_1(\zeta)$ si annulla per: $\zeta = 0, \cos \zeta = 0$, cioè per: $\zeta_k = (2k + 1)\pi/2$.

Nell'intervallo: $(\zeta_k, \zeta_{k+1}), \cos \zeta < 0, k$ pari, $\cos \zeta > 0, k$ dispari, onde i punti ζ_k sono di massimo relativo se k è pari, di minimo relativo se k è dispari, rispettivamente positivi e negativi dato che:

$$R_1(\zeta_k) = \frac{1}{2} (-1)^k \left[1 + \frac{\pi}{2} (2k + 1) \right] e^{-(2k+1)\pi/2}$$

La $\bar{R}_1(\zeta)$, parte reale di $e_r(\zeta)$, è perciò una funzione oscillante smorzata lungo ζ , (con $R_1(0) = 0$), per l'istante dato.

1^a proprietà: Se la conduttività aumenta o diminuisce il terreno omogeneo è caratterizzato, in un dato istante, da un'onda spaziale smorzata a frequenza maggiore o minore.

Analogamente $I'(\zeta)$ si annulla per $\zeta = 0, \zeta = k\pi$. Nell'intervallo: $k\pi, (k+1)\pi$, in cui: $\text{sen } \zeta > 0, k$ pari, $\text{sen } \zeta < 0, k$ dispari, $I_1(\zeta) < 0$ se k è pari, $I_1(\zeta) > 0$ se k è dispari, il punto $\zeta_k = k\pi$ è di massimo relativo (k pari), di minimo relativo (k dispari).

Dato che:

$$I_1(\zeta_k) = \frac{1}{2} \{ 1 + (-1)^k \cdot (1 + k\pi) e^{-k\pi} \}$$

i minimi relativi sono minori di 1/2, i massimi maggiori di 1/2.

La funzione oscillante smorzata $I_1(\zeta)$ intorno all'asintoto: $I_1(\zeta) = 1/2$, è sfasata rispetto alla precedente di $(+\pi/2)$.

Analoghe considerazioni valgono per la « ridotta tangenziale », al variare di $\zeta > 0$, sempre per $t = T/4$ (valore particolarmente idoneo).

$$e_{\varphi}(\zeta) = e^{i\pi/2} [2 - (1 + \zeta + i\zeta) e^{-(\zeta + i\zeta)}] \quad [10]$$

$$R_2(\zeta) = e^{-\zeta} [\zeta \cos \zeta - (1 + \zeta) \text{sen } \zeta] \quad [11]$$

$$I_2(\zeta) = 2 - e^{-\zeta} [(1 + \zeta) \cos \zeta + \zeta \text{sen } \zeta] \quad [11']$$

$$R_2(0) = R_2(\infty) = 0 \quad , \quad R'_2(\zeta) = -2\zeta \cos \zeta \cdot e^{-\zeta}$$

$$I_2(0) = 1 \quad I_2(\infty) = 2 \quad , \quad I'_2(\zeta) = 2\zeta \text{sen } \zeta \cdot e^{-\zeta}$$

La $R'_2(\zeta)$ è nulla per $\zeta = 0, \zeta_k = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$.

In $(\zeta_k, \zeta_{k+1}), \cos \zeta < 0, k$ pari, $\cos \zeta > 0, k$ dispari, onde $R'_2(\zeta) > 0$ (k pari), $R'_2(\zeta) < 0$ (k dispari), ζ_k è di minimo relativo se k è pari, di massimo relativo se k è dispari.

Inoltre:

$$R_2(\xi_k) = -(-1)^k \left[1 + (2k+1) \frac{\pi}{2} \right] \cdot e^{-\frac{\pi}{2}(2k+1)}$$

quindi i massimi relativi sono positivi, i minimi negativi.

La $R_2(\xi)$ ha la stessa fase iniziale e caratteristiche di $R_1(\xi)$ oscillante lungo ξ .

La $I_2(\xi) = 0$ per $\xi_k = k\pi$ nell'intervallo (ξ_k, ξ_{k+1}) , *sen* $\xi > 0$ se k è pari, *sen* $\xi < 0$ se k è dispari: onde in (ξ_k, ξ_{k+1}) si ha $I_2'(\xi) > 0$, k pari, $I_2'(\xi) < 0$, k dispari: segue nel punto ξ_k un minimo per k pari, un massimo (relativi) per k dispari.

Inoltre: $I_2(\xi_k) = 2 - e^{-k\pi} \cdot (1 + k\pi) \cdot (-1)^k$, la funzione è oscillante, smorzata intorno all'asintoto $I_2(\xi) = 2$, con inizio da $I_2(\xi) = 1$, sfasata di $-\frac{\pi}{2}$ rispetto a $R_2(\xi)$.

Riassumendo: $[R_1(\xi), \xi]$ è una oscillazione smorzata intorno a: ξ , con $R_1(\xi) = 0$ all'origine; $[I_1(\xi), \xi]$ si smorza intorno a $I_1(\xi) = 1/2$, con inizio $I_1(\xi) = 1$; $[R_2(\xi), \xi]$ è del tutto simile a: $[R_1(\xi), \xi]$; $[I_2(\xi), \xi]$ in opposizione a $[I_1(\xi), \xi]$, oscillante intorno a $I_2(\xi) = 2$.

2^a *proprietà*: Da un certo valore di ξ in poi i moduli delle ridotte radiale e tangenziale permangono costanti, e il decremento spaziale con l'ulteriore aumentare di ξ si riduce, per le componenti del campo, solo a quello relativo al dipolo a c. c., inversamente proporzionale al cubo della distanza metrica.

3^a *proprietà*: Venendo all'approssimazione imposta dal valore altissimo delle lunghezze d'onda λ a basse frequenze, rispetto alle normali distanze r dei punti di misura dal generatore dipolare di c. a., per $\xi = 2\pi r/\lambda \ll 1$, lungo l'asse dipolare (prassi seguita nelle misure) si ha: $\varphi = 0$, $E_{\varphi} = 0$

$$R(E_r) = I \cdot l \cdot \xi^2 / \pi \sigma r^3 = 4\pi I \cdot l \cdot f / r, \quad [12]$$

(dove l è la lunghezza del dipolo) valore aperiodico, indipendente dalla conduttività, che al variare del coefficiente: $4\pi I l \cdot f$ è espresso da un fascio d'iperboli equilateri.

Nelle identiche condizioni di collinearità esterna polare, Horton-Lewis, (per $n = k$), trovano la stessa formola [12], ma è bene subito avvertire che quest'importante risultato, (di grande momento per la teoria delle riflessioni e. m. a bassa frequenza), non è più valido se

si considera $n \neq k$, (come mostreremo nel § 3), risultando — v. formula [36] — $R (E_r)$ max. dipendente invece sia dalla conduttività che dalla costante dielettrica del suolo.

§ 2. — Assumiamo convenzionalmente per la conduttività media delle formazioni sedimentarie $\sigma = 10^9$ e.s.u., ϵ_r circa 10, permeabilità magnetica unitaria.

Se la corrente di conduzione prevale su quella di spostamento: $\Delta = 16 \pi^2 \sigma^2 / \omega^2 \epsilon^2 \gg 1$, la « costante di fase » uguaglia il coefficiente d'attenuazione ($n = k = \sqrt{\sigma f}$), e le formole di Horton [3] che danno $E_r (\sigma \gg \epsilon)$, $E_\varphi (\sigma \gg \epsilon)$ perdono i termini con « ϵ »:

$$K^n n^{-2} = \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \left[(\Delta^{-1} + 1)^{1/2} - \Delta^{-1} \right] \cdot \left[(\Delta^{-1} + 1)^{1/2} + \Delta^{-1} \right] = 1$$

Dato questo, tanto varrebbe attenersi alla teoria di Sommerfeld che trascura « ϵ » in partenza, e infatti abbiamo ben dedotto la [12] che s'identifica con la formola [20] per la misura del campo elettrico radiale.

Tuttavia una sostanziale differenza tra le 2 teorie appare dal comportamento della componente orizzontale E_y , che, per la [3] è stazionaria, mentre dalle « ridotte » di Horton-Lewis:

$$E_r/E_{rc} = e_1 = [(1 + \zeta) + i \zeta] \exp \cdot [-\zeta + j(\omega t - \zeta)] \quad [13]$$

$$E_\varphi/E_{\varphi c} = e_2 = [(1 + \zeta) + i \zeta(1 + 2\zeta)] \exp \cdot [-\zeta + j(\omega t - \zeta)] \quad [14]$$

discende che:

$$E_y = E_y(\omega) = E_r \operatorname{sen} \varphi + E_y \cos \varphi = \frac{I l \operatorname{sen} 2 \varphi}{4 \pi \sigma r^3} [3(1 + \zeta) \cos \zeta + \zeta(3 + 2\zeta) \operatorname{sen} \zeta] [e^{-\zeta}]_{t=0} \quad [15]$$

il che, almeno in parte, (incidendo più cause sulla componente E_y) (ω) è conforme all'esperienza (v. Lewis) (2). È opportuno perciò soffermarsi su questa teoria che sarà poi da noi integrata (§ 3) senza tener più conto dell'approssimazione qui fatta: $n = k$, valevole per frequenze molto minori di 1 megaciclo/sec.

L'identificazione intanto di n con k , (parte reale e immaginaria della costante di propagazione nella sua espressione completa, cioè con ϵ), porta a stabilire una velocità di trasmissione delle o.e.m.: $v = c(f/\sigma)^{1/2} \text{ cm/sec} = (10^9 f/\sigma)^{1/2} \text{ cm/sec}$, velocità che nei suoli a

conduttività finita cresce con la frequenza (mezzi trasmettenti perciò dispersivi) con relativa attenuazione d'onda (mezzi altresì dissipativi), mentre nei non conduttori tale velocità di fase è indipendente dalla frequenza e l'onda si propaga senza distorsione.

A sua volta la lunghezza d'onda c.m. nei suoli sarà:

$\lambda = c(\sigma f)^{-1/2} = 10^4 \sqrt{10} (\sigma \cdot f)^{1/2} \text{ cm}$. Un'onda c.m. ad es. a 10^5 p./se., mentre nell'aria è sui 3000 m, in un terreno, con $\sigma = 10^{-4}$ Siemens/cm, si riduce a $\lambda = 100$ m, lunghezza che esprime altresì la profondità di penetrazione della c.a. nel mezzo: (skin depth).

La « λ » (lunghezza d'onda) è relazionabile perciò alla « ξ »: $\xi = 2\pi r/\lambda$, in generale: $\ll 1$ alle basse frequenze.

La [13], che dà la « ridotta radiale » e_1 , è scomponibile nelle sue parti reali e immaginaria:

$$R_1(\xi) = e^{-\xi} \{ (1 + \xi) \cos(\omega t - \xi) - \xi \operatorname{sen}(\omega t - \xi) \} \quad [16]$$

$$I_1(\xi) = e^{-\xi} \{ \xi c s(\omega t - \xi) + (1 + \xi) \operatorname{sen}(\omega t - \xi) \} \quad [17]$$

$$R_1(0) = c s \omega t, \quad R_1(\infty) = 0, \quad R'_1(\xi) = 2\xi e^{-\xi} \operatorname{sen}(\omega t - \xi)$$

$$I_1(0) = \operatorname{sen} \omega t, \quad I_1(\infty) = 0, \quad I'_1(\xi) = -2\xi e^{-\xi} \cos(\omega t - \xi)$$

La derivata $R'_1(\xi)$ si annulla per $\xi = 0$, $\xi = \omega t - k\pi$, (k intero negativo). $R_1(\xi)$ presenta un minimo nei punti: $\xi = \omega t + 2\pi(k+1)$, un massimo in: $\xi = \omega t + 2k\pi$.

La parte reale $R_1(\xi)$ della componente: $e_1(\xi)$ è pertanto oscillatoria smorzata intorno all'ascissa ξ , in dipendenza del fattore: $e^{-\xi}$ a fase iniziale ($\xi = 0$): $\cos \omega t$.

Analogamente $I'_1(\xi)$ si annulla per $\xi_1 = 0$, $\xi = \omega t - \frac{\pi}{2}(2k+1)$, (k intero negativo). Nell'intervallo $(0, +\omega t)$ e negli intervalli: $\omega t + \frac{\pi}{2}(4k-1)$, $\omega t + \frac{\pi}{2}(4k+1)$, si ha: $-\cos(\omega t - \xi) < 0$, $I_1(\xi) < 0$, $I_1(\xi)$ crescente.

Negli intervalli: $\omega t + (4k-3)\frac{\pi}{2}$, $\omega t + (4k-1)\frac{\pi}{2}$, $-c s(\omega t - \xi) > 0$, $I'_1(\xi) > 0$, $I_1(\xi)$ crescente. In: $\xi = \omega t + (4k-1)\pi/2$ $I_1(\xi)$ ha un massimo, in: $\xi = \omega t + (4k+1)\pi/2$ un minimo relativo. $I_1(\xi)$ è oscillatoria smorzata intorno all'ascissa ξ , per la presenza del fattore: $e^{-\xi}$, a fase iniziale: $\operatorname{sen} \omega t$.

La «ridotta tangenziale» si scompone in:

$$R_2(\xi) = e^{-\xi} [(1 + \xi) \cos(\omega t - \xi) + (\xi + 2\xi^2) \text{sen}(\omega t - \xi)] \quad [18]$$

$$I_2(\xi) = e^{-\xi} [(\xi + 2\xi^2) \cos(\omega t - \xi) + (1 + \xi) \text{sen}(\omega t - \xi)] \quad [19]$$

$$R_2(0) = \cos \omega t, R_2(\infty) = 0, R_2'(\xi) = 2\xi e^{-\xi} [(\xi - 1) \text{sen}(\omega t - \xi) + \xi \cos(\omega t - \xi)]$$

$$I_2(0) = \text{sen} \omega t, I_2(\infty) = 0, I_2'(\xi) = 2\xi e^{-\xi} [(\xi - 1) \cos(\omega t - \xi) + \xi \text{sen}(\omega t - \xi)]$$

La $R_2'(\xi)$ si annulla per $\xi = 0$, e per ξ radice di: $t_n(\omega t - \xi) = \xi/(1 - \xi)$.

Pertanto le ulteriori radici di $R_2'(\xi) = 0$ saranno le ascisse dei punti d'intersezione delle curve: $t_n(\omega t - \xi)$, $\xi/(1 - \xi)$.

Come risulta dal grafico (v. Fig. 2a) tali intersezioni sono infi-

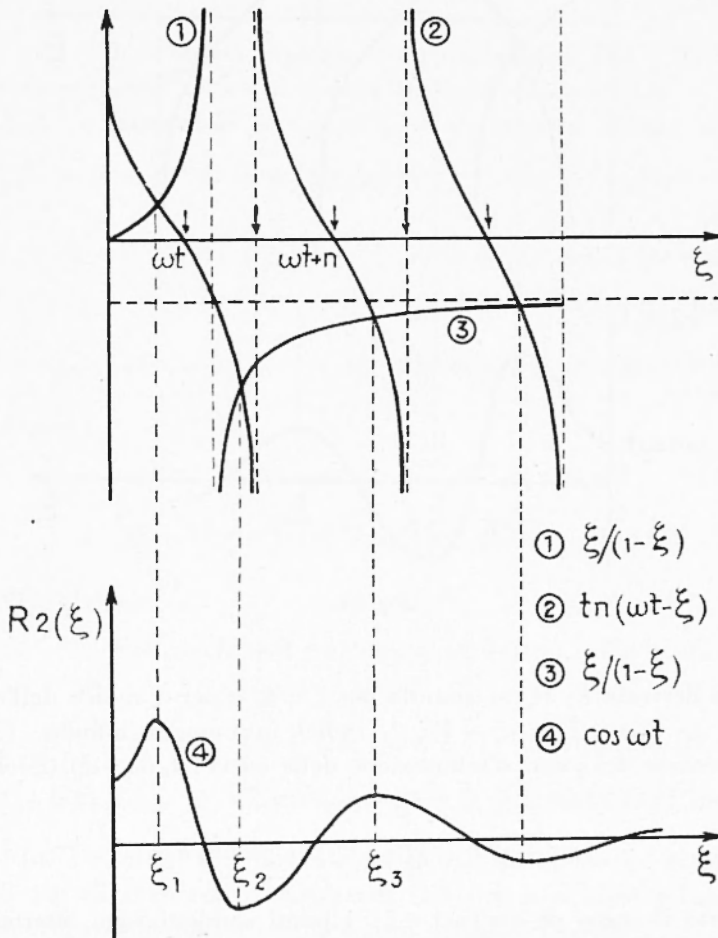


Fig. 2-a

nite, e dette: $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots$ le loro ascisse, se $\xi_k > 1$, si ha: $\omega t + (k-1)\pi < \xi_k < \omega t + (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

A causa del segno di $\cos(\omega t - \xi)$ tra (ξ_{k-1}, ξ_k) , gli ξ sono alternativamente di massimo e di minimo per $R_2(\xi)$.

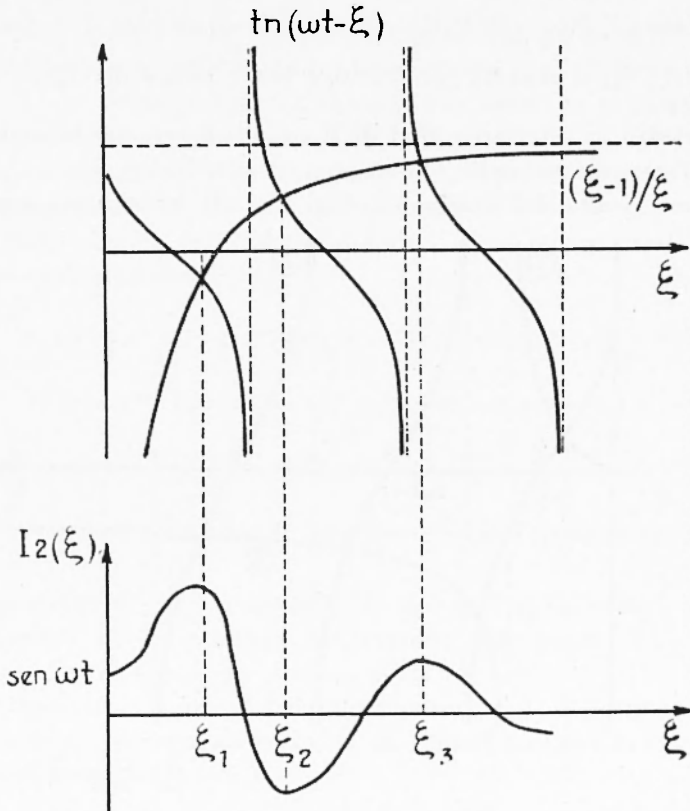


Fig. 2-b

La derivata $I_2'(\xi)$ si annulla per $\xi = 0$, e per ξ radice dell'equazione: $t_n(\omega t - \xi) = (\xi - 1)\xi^{-1}$, radici in numero infinito, $(\xi_1, \xi_2, \xi_k, \dots)$, ascisse dei punti d'intersezione delle curve: $t_n(\omega t - \xi), (\xi - 1)\xi^{-1}$ tali che:

$$\omega t + (2k-1)\pi/2 < \xi_k < \omega t + k\pi$$

Dato il segno di $\cos(\omega t - \xi)$, i punti suddetti sono alternativamente di massimo e di minimo relativo: (v. Fig. 2b).

Come nella nostra teoria precedente si riscontra concordanza di fase tra le parti reali di e_r e e_{φ} , tra le immaginarie di e_r e e_{φ} , alla loro volta in quadratura con le rispettive reali.

Lungo l'asse polare, in cui conviene effettuare le misurazioni, risultando minimizzato « l'effetto diretto » e.m. del dipolo orizzontale, sussiste solo la componente di campo radiale, conseguentemente se gli elettrodi potenziali distano dalla sorgente di corrente solo di una frazione di lunghezza d'onda, $\tilde{z} \ll 1$, (come in generale accade), ne segue la formula approssimata di Horton-Lewis:

$$(F_{\text{rad}}) \simeq \frac{Il}{k\sigma} \cdot \tilde{z}^2/r^3 \quad [20]$$

dove « l » è la distanza dipolare, formola identica alla [12], da noi ricavata per altra via (e cioè dalla teoria di Sommerfeld).

§ 3. — Ritenendo ora: $n \neq k$, le componenti ridotte saranno:

$$E_r/E_{r0} = [1 + c^{-1} \omega r (k + jn)] \exp \cdot [-c^{-1} \omega k r + j \omega (t - n r c^{-1})] \quad [21]$$

$$E_t/E_{t0} = [1 + c^{-1} \omega r (k + jn) + (c^{-1} \omega r)^2 (k + jn)^2 \exp \cdot [-c^{-1} \omega k r + j \omega (t - n r c^{-1})]] \quad [22]$$

$$2k^2 = \varepsilon [(1 + 16 \pi^2 \sigma^2 / \omega^2 \varepsilon^2)^{1/2} - 1]; \quad 2n^2 = \varepsilon [(1 + 16 \pi^2 \sigma^2 / \omega^2 \varepsilon^2)^{1/2} + 1] \quad [23]$$

Posto:

$$\omega k r c^{-1} = \xi, \quad \omega n r c^{-1} = \xi', \quad \xi'/\xi = a = n/k \quad [24]$$

$$\beta = (1 + 16 \pi^2 \sigma^2 / \omega^2 \varepsilon^2)^{1/2}, \quad a^2 = (\beta + 1) / (\beta - 1) > 0$$

la [21] diviene:

$$E_r/E_{r0} = (1 + \xi + i \xi') \exp \cdot [-\xi + j(\omega t - \xi')] \quad [21']$$

con:

$$R[E_r/E_{r0}] = e^{-\xi} [(1 + \xi) \cos(\omega t - \xi') - \xi' \text{sen}(\omega t - \xi')]$$

$$I[E_r/E_{r0}] = e^{-\xi} [\xi' \cos(\omega t - \xi') + (1 + \xi) \text{sen}(\omega t - \xi')]$$

Visti i risultati sperimentali del Lewis, quelli teorici di M. Müller, Evjen ed altri, relativi ai grandi valori di ε_r a basse e bassissime frequenze, consideriamo (se non altro a titolo d'ipotesi):

$$\Delta = 16 \pi^2 \sigma^2 / \omega^2 \varepsilon^2 = 16 \pi^2 \sigma^2 / \omega^2 \varepsilon_0^2 \varepsilon_r^2 \ll 1, \quad \varepsilon_0 = 0,866 \cdot 10^{-13} \text{ F/cm.}$$

Quest'assunzione che per terreni normali con: $\sigma = 10^{-4}$ S./cm equivale porre: $(\varepsilon_r \cdot \omega) > 10^8$, si può giustificare in 2 modi: o ritenendo la costante dielettrica relativa ε_r costante e altissime frequenze, o ε_r altissima dell'ordine voluto da Evjen (e variabile), e basse frequenze. Nel 1° caso per $\varepsilon_r = 10$ occorrono infatti frequenze di unità 10^7 , e viceversa per $\omega = 10$ occorreranno ε_r dell'ordine di grandezza di unità 10^7 .

Ciò permette di sviluppare β mediante la serie binominale, e trascurare i termini di grado superiore al 1°:

$$\beta^2 = 1 + 16\pi^2\sigma^2/\omega^2\varepsilon^2, \beta = \sim 1 + 8\pi^2\sigma^2/\omega^2\varepsilon^2, a = \frac{(\beta+1)^{1/2}}{(\beta-1)^{1/2}} = \left(1 + \frac{\omega^2\varepsilon^2}{4\pi^2\sigma^2}\right)^{1/2} \quad [24']$$

$$R[E_r/E_{r0}] = e^{-\xi} [(1 + \xi) c s(\omega t - a \xi) - a \xi \text{sen}(\omega t - a \xi)] \quad [25]$$

$$I[E_r/E_{r0}] = e^{-\xi} [a \xi \cos(\omega t - a \xi) + (1 + \xi) \text{sen}(\omega t - a \xi)] \quad [26]$$

Analogamente la [22] diviene:

$$E_r/E_{r0} = (1 + \xi + i \xi' + \xi^2 - \xi'^2 + 2i \xi \xi') \exp \cdot | - \xi + i(\omega t - \xi') | \quad [29]$$

$$R[E_r/E_{r0}] = e^{-\xi} \{ [1 + \xi + \xi^2(1 - a^2)] c s(\omega t - a \xi) - a \xi(1 + 2\xi) \text{sen}(\omega t - a \xi) \} \quad [30]$$

$$I[E_r/E_{r0}] = e^{-\xi} \{ a \xi(1 + 2\xi) \cos(\omega t - a \xi) + [1 + \xi + \xi^2(1 - a^2)] \cdot \text{sen}(\omega t - a \xi) \} \quad [31]$$

Fissiamo ora particolarmente l'attenzione sulla parte reale della componente radiale (prescelta nelle misure sul terreno).

Mentre nella situazione: ($n = k$), per $t = T/4$ si ha:

$$R[E_r/E_{r0}] = e^{-\xi} [(1 + \xi) \text{sen} \xi - \xi c s \xi] \quad [32]$$

formola che s'identifica con la nostra [8]; per: $n \neq k$, $\Delta \ll 1$, troviamo:

$$R[E_r/F_{r0}] = e^{-\xi} [(1 + \xi) \text{sen}(a \xi) - a \xi c s(a \xi)] \quad [33]$$

Dalla componente reale radiale relativa alla situazione $\sigma^2 \gg \omega^2 \varepsilon^2$ si passa a quella per: $\sigma^2 \ll \omega^2 \varepsilon^2$ ponendo nell'espressione di $R(E)_r$ al

posto di ξ una nuova « costante numerica »: $a \xi > \xi$, precisamente negli argomenti dei termini trigonometrici, e loro coefficienti (tranne per: $\text{sen}(a \xi)$, il cui coefficiente rimane invariato: $(1 + \xi)$, e per: $e^{-\xi}$, tenendo conto del segno cambiato in $\text{cos}(a \xi)$).

La: $R[E_r/E_0] = R(\xi)$, che per $t=0$, $a > 1$, $\xi > 0$, diventa:

$$R(\xi) = e^{-\xi} [(1 + \xi) \text{cos } a \xi + a \xi \text{sen } a \xi] \text{ ha: } R(0) = 1, R(\infty) = 0,$$

$$R'(\xi) = \xi e^{-\xi} \cdot [(a^2 - 1) \text{cos}(a \xi) - 2 a \text{sen}(a \xi)]$$

con derivata che si annulla per $\xi=0$, $\text{tn}(a \xi) = (a^2 - 1)/2 a > 0$.

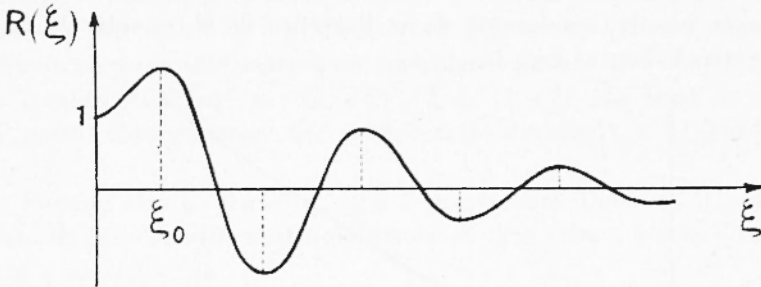


Fig. 2-c

Detto allora ξ_0 un valore di ξ tale che l'angolo $(a \xi_0)$ abbia per tangente: $(a^2 - 1)/2 a$, compreso tra 0 e $\pi/2$, otterremo infinite altre radici della $R'(\xi)$ per tutti i valori di ξ tali che: $\xi = \xi_0 + k \pi/a$. Poiché:

$$R'(\xi) = \xi e^{-\xi} \cdot 2 a \text{cos}(a \xi) [(a^2 - 1)/2 a - \text{tn}(a \xi)]$$

tale derivata è positiva nell'intervallo $(0, \xi_0)$, e negli intervalli $\xi_0 + (2k - 1)\pi/a, \xi_0 + 2k\pi/a$; $k = 1, 2, \dots$, negativa negli intervalli $\xi_0 + 2k\pi/a, \xi_0 + (2k + 1)\pi/a$; $k = 0, 1, \dots$, onde i punti $\xi = \xi_0 + (2k - 1)\pi/a$ sono per $R(\xi)$ di minimo, i punti: $\xi = \xi_0 + 2k\pi/a$ sono di massimo relativi: (Fig. 2c):

$$R_{\max} = [(1 + \xi_0 + 2k\pi/a) \text{cos } a \xi_0 + (a \xi_0 + 2k\pi) \text{sen } a \xi_0] \exp. [-\xi_0 + 2k\pi/a] > 0$$

$$R_{\min} = -[(1 + \xi_0 + (2k - 1)\pi/a) \text{cos } a \xi_0 + (a \xi_0 + (2k - 1)\pi/a) \text{sen } a \xi_0] \exp. [-\xi_0 - (2k - 1)\pi/a] < 0,$$

e decrescono col crescere di k .

Il modulo della ridotta radiale $M(E_r/E_{rc})$, per $t = T/4$, in funzione della costante dielettrica è una funzione crescente di ε .

$$M(\varepsilon) = e^{-\xi} [(1 + \xi)^2 + a^2 \xi^2]^{1/2}$$

$$M(0) = e^{-\xi} (1 + 2\xi + 2\xi^2)^{1/2}, \quad M(\infty) = \infty,$$

$$M'(\varepsilon) = \omega^2 \xi^2 \varepsilon e^{-\xi} [4\pi^2 \sigma^2 (1 + \xi)^2 + a^2 \xi^2]^{-1}$$

$$M'(\varepsilon) = 0, \quad \varepsilon = 0; \quad \text{per } \varepsilon > 0, \quad M'(\varepsilon) > 0, \quad M(\varepsilon) \text{ crescente.}$$

$$\text{Poiché: } M''(\varepsilon) = (4\pi^2 \sigma^2)^{-1} \omega^2 \xi^2 e^{-\xi} (1 + 2\xi + 2\xi^2) \cdot [(1 + \xi)^2 + a^2 \xi^2]^{-3/2}$$

è sempre positiva qualunque sia ξ , il grafico di $M(\varepsilon)$ volge la concavità verso l'alto (v. Fig. 3):

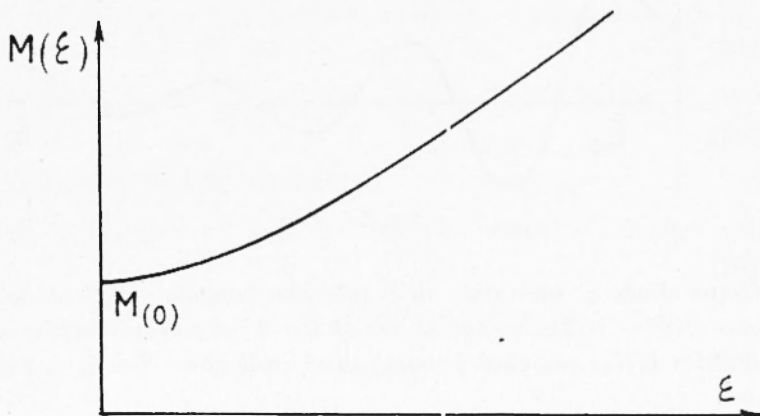


Fig. 3

Il che è confermato indirettamente dalle ampiezze dei « fattori di correzione » dei campi statici: $A = (1 + \gamma r) \cdot e^{-\gamma r}$ per E_r , $B = (1 + \gamma r + \gamma^2 r^2) \cdot e^{-\gamma r}$, per E_φ in funzione di ξ in un diagramma di J. R. Wait [6]: i fasci di curve A , B indicano un'attenuazione massima se $(f \varepsilon / \sigma)$ è zero, che diminuisce con l'aumentare di tale parametro.

Il modulo di $M[E_r/E_{rc}]$, al variare invece di ξ , comporta: $M(0) = 1$, $M(\infty) = 0$, $M'(\xi)$ derivata che s'annulla se:

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = (a^2 - 1) / (a^2 + 1).$$

Poiché:

$$M'(\xi) = -(a^2 + 1) \xi e^{-\xi} / [(1 + \xi)^2 + a^2 \xi^2]^{1/2},$$

per: $0 < \xi < \xi_0$, $M'(\xi) > 0$, $M(\xi)$ crescente, per $\xi_0 < \xi < \infty$, $M'(\xi) < 0$, $M(\xi)$ decrescente, onde per $\xi = 0$, $M(\xi)$ ha un minimo relativo di valore uno, per $\xi = \xi_0$, $M(\xi)$ « ha un massimo »: $a \cos \alpha \xi - (a^2 - 1)/(a^2 + 1)$.

Il grafico $[M(\xi), \xi]$ risulta molto simile a quello di Fig. 1a, salvo una diversa decrescenza dopo il massimo, ma su cui la discussione dettagliata è rimandata altrove.

La fase del modulo di $M(\varepsilon, \xi)$, al variare di ε , è derivabile da:

$$tg \varphi(\varepsilon) = [a \xi \operatorname{sen}(\alpha \xi) + (1 + \xi) \cos(\alpha \xi)] / [(1 + \xi) \operatorname{sen}(\alpha \xi) - a \xi \cos(\alpha \xi)] ,$$

$$a^2 = 1 + \omega^2 \varepsilon^2 / 4 \pi^2 \sigma^2$$

funzione crescente di ε . Detta tangente è definita qualunque sia $a \geq 1$, salvo che per valori di a per cui è: $(1 + \xi) \operatorname{sen}(\alpha \xi) = a \xi \cos(\alpha \xi)$; cioè non potendo tale espressione annullarsi quando sia: $\cos(\alpha \xi) = 0$, per i valori di a per cui: $tg(\alpha \xi) = \xi a / (1 + \xi)$, che sono le ascisse dei punti d'intersezione dei grafici delle funzioni: $a \xi / (1 + \xi)$, e $tg(\alpha \xi)$.

Poiché: $d tg \varphi / da < 0$, $tg \varphi$ è decrescente. Detto a_K il generico punto in cui s'annulla il denominatore di $tg \varphi$ (che è punto d'infinito di $tg \varphi$ stessa) si ha:

$$\lim_{a \rightarrow a_K^-} tg \varphi = -\infty ; \quad \lim_{a \rightarrow a_K^+} tg \varphi = +\infty$$

Il diagramma $[\varphi, a]$ darà valori definiti a meno di multipli di π . Analogo comportamento si ha per la fase del modulo derivabile da $tg \varphi(\xi)$, funzione definita per tutti i valori di ξ salvo quelli per cui è: $tg(\alpha \xi) = \xi a / (1 + \xi)$, ascisse dei punti d'intersezione dei grafici delle 2 funzioni a 1° e 2° membro dell'equazione precedente. La derivata di $tg \varphi(\xi)$ rispetto a ξ è negativa, si annulla per $\xi = 0$ e per $\xi = -2 / (a^2 + 1)$. Per $\xi = 0$ si annullano sia il denominatore della funzione che quello della derivata, quindi nel campo $(0 < \xi < \infty)$ la funzione non ha né massimi, né minimi relativi, e a causa del segno della derivata la $tg \varphi(\xi)$ risulta decrescente.

Di conseguenza, detti $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_K, \dots$ i punti di non definizione della funzione, per la decrescenza della funzione stessa, si deduce: non esiste il limite per $\xi \rightarrow \infty$ di $tg \varphi(\xi)$,

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_K^-} tg \varphi(\xi) = -\infty , \quad \lim_{\xi \rightarrow \xi_K^+} tg \varphi(\xi) = +\infty .$$

Il grafico $[\varphi(\xi), \xi]$ è simile al precedente $[\varphi(\varepsilon), a]$ e dà pure valori definiti a meno di multipli di π .

Considerato che le velocità di trasmissione nel suolo sono: $v = c/n$, $v^* = c (f/\sigma)^{1/2}$, nelle due situazioni: $E_r(\varepsilon, \sigma)$, $E_r(\sigma)$, allora il loro rapporto è dato da:

$$v/v^* = (2\pi\sigma)^{1/2} \cdot [z + z^{-1} \cdot 4\pi^2\sigma^2]^{-1/2}; \quad z = \varepsilon\omega \quad [37]$$

tale che:

$$(v/v^*)_{z \rightarrow 0} = (v/v^*)_{z \rightarrow \infty} = 0, \quad (v/v^*)^2 = -(2\pi\sigma)^{1/2} \cdot f(\sigma, z)$$

Il massimo di: (v/v^*) , cade per $z = 2\pi\sigma$: $(v/v^*)_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, quindi è costantemente: $v < v^*$.

4^a *proprietà*: La incidenza di $\varepsilon(\omega)$ sul fattore di propagazione (nel senso qui indicato) si ripercuote perciò oltre che sull'entità del campo elettrico, che s'incrementa, sull'ulteriore riduzione delle velocità di trasmissione delle o.e.m. nei suoli (già ridotte con le basse frequenze), ad ordini di grandezza di velocità sismiche. Si creano con ciò situazioni ovviamente vantaggiose per la prospezione geoelettrica, salvo che la profondità di penetrazione della c.a. nel terreno diminuisce in funzione del coefficiente: $(1 + i\omega\varepsilon\sigma^{-1})^{1/2}$.

§ 4. Rimuoviamo infine l'approssimazione della dipolarità, e calcoliamo il campo elettrico di un bipolo $(-a, +a)$, posto lungo x , in punti $P(\xi, \eta)$ alla distanza: $r = [(\xi - x)^2 + \eta^2]^{1/2}$ dall'eccitatore: ($a < \xi < +\infty$): (da porre attenzione al nuovo significato qui attribuito alla ξ).

L'integrale indefinito della [2] rispetto ad x , (su $\eta = 0$) sarà:

$$\begin{aligned} \Sigma(\xi) = & (2\pi\sigma)^{-1} \cdot [(\xi - x)^{-2} - \frac{3}{4}\xi^2(\xi - x)^{-4} - e^{-\gamma(\xi - x)} \cdot (\xi - x)^{-2}/2 - \\ & - \frac{\gamma}{2}(\xi - x)^{-1} e^{-\gamma(\xi - x)} + \frac{\gamma^2}{2} \int (\xi - x)^{-1} e^{-\gamma(\xi - x)} dx], \quad [38] \end{aligned}$$

$\gamma = 2\pi(1+i)\sqrt{\sigma f} = \alpha(1+i)$, $\gamma^2 = 2i\alpha^2$, $\alpha = 2\pi\sqrt{\sigma f}$, (ξ qui indica una ascissa), quindi:

$$R[\Sigma(\xi)] = (2\pi\sigma)^{-1} \left[\Phi_1(a, \xi, \alpha) + \alpha^2 \int_{-a}^{+a} (\xi-x)^{-1} e^{-\alpha(\xi-x)} \text{sen } \alpha(\xi-x) dx \right]$$

$$I[\Sigma(\xi)] = (2\pi\sigma)^{-1} \left[\Phi_2(a, \xi, \alpha) + \alpha^2 \int_{-a}^{+a} (\xi-x)^{-1} e^{-\alpha(\xi-x)} \text{cos } \alpha(\xi-x) dx \right]$$

$$\Phi_1 = (\xi-a)^{-2} - \frac{3}{4}\xi^2(\xi-a)^{-4} - \frac{1}{2}(\xi-a)^{-2} e^{-\alpha(\xi-a)} \text{cos } \alpha(\xi-a)$$

$$- \frac{1}{2}(\xi-a)^{-1} \alpha e^{-\alpha(\xi-a)} [\text{cos } \alpha(\xi-a) + \text{sen } \alpha(\xi-a)] - (\xi+a)^{-2} -$$

$$- \frac{3}{4}\xi^2(\xi+a)^{-4} + \frac{1}{2}(\xi+a)^{-2} e^{-\alpha(\xi+a)} \text{cos } \alpha(\xi+a) +$$

$$+ \frac{1}{2}(\xi+a)^{-1} \alpha e^{-\alpha(\xi+a)} [\text{cos } \alpha(\xi+a) + \text{sen } \alpha(\xi+a)].$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2}(\xi-a)^{-2} e^{-\alpha(\xi-a)} \text{sen } \alpha(\xi-a)$$

$$- \frac{1}{2}(\xi-a)^{-1} \alpha e^{-\alpha(\xi-a)} [\text{cos } \alpha(\xi-a) - \text{sen } \alpha(\xi-a)] -$$

$$- \frac{1}{2}(\xi+a)^{-2} e^{-\alpha(\xi+a)} \text{sen } \alpha(\xi+a) -$$

$$- \frac{1}{2}(\xi+a)^{-1} \alpha e^{-\alpha(\xi+a)} [\text{cos } \alpha(\xi+a) - \text{sen } \alpha(\xi+a)]$$

Nell'ipotesi che $(a.r \sim r/\lambda)$, sia molto piccolo, per terreni normali, a basse frequenze, le precedenti formole si semplificano notevolmente:

$$R[\Sigma(\xi)] = R(\xi) = (8\pi\sigma)^{-1} \{ (\xi+a)^{-4} [\xi^2 - 4a\xi - 2a^2] - (\xi-a)^{-4} [\xi^2 + 4a\xi - 2a^2] - a\alpha^3/\pi\sigma \}$$

$$R(0) = -\infty, R(\infty) = -a\alpha^3/\pi\sigma, R^1(a) = (4\pi\sigma)^{-1} [\varphi(-a, \xi) - \varphi(a, \xi)]$$

$$\varphi(\lambda, \xi) = (\xi+\lambda)^{-5} \cdot (\xi^2 - 7\lambda\xi - 2\lambda^2); \varphi(0, \lambda) = \xi^{-3} > 0, \varphi(\lambda, \infty) = 0$$

$$\varphi'(\lambda, \xi) = 6(\xi+\lambda)^{-6} \cdot (\lambda^2 + 4\xi\lambda - 2\xi^2); \varphi'(\lambda, \xi) = 0, \text{ se } \lambda = \xi(2 \pm \sqrt{6}).$$

Si ha con ciò $\varphi(\xi, \lambda)$ in funzione di λ , con un max positivo in $\xi \cdot (-2 - \sqrt{6})$ e un minimo negativo per $\xi(-2 + \sqrt{6})$.

Essendo $\xi > a$, $\xi(-2 - \sqrt{6}) < -a$, allora qualunque sia ξ , $\varphi(a, \xi) < \varphi(-a, \xi)$ onde $\varphi(-a, \xi) - \varphi(a, \xi) > 0$, quindi: $R'(\xi) > 0$ qualunque sia $\xi \geq a$. Pertanto $R(\xi)$ è crescente al crescere di ξ .

Inoltre: $R''(\xi) = 3 \cdot (4\pi\sigma)^{-1} \cdot [\psi(a, \xi) - \psi(-a, \xi)]$, il segno di $R''(\xi)$ dipende, per ogni ξ , da quello dell'incremento di $\psi(\lambda, \xi)$: $\psi(0, \xi) = \bar{c}^{-1}$, $\psi(\infty, \bar{c}) = 0$, $\psi'(\lambda, \xi) = 8(\xi + \lambda)^{-2} \cdot (\lambda^2 + 6\lambda\xi - 2\xi^2)$,

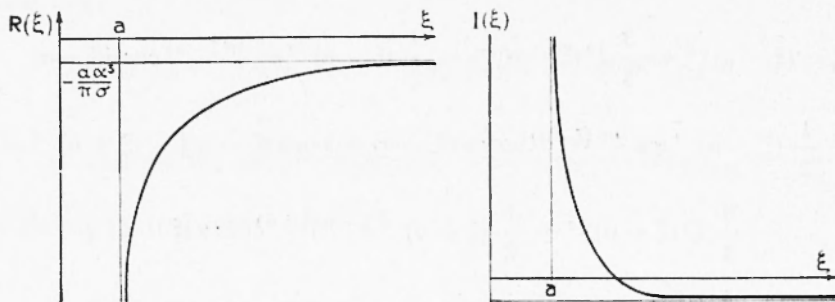


Fig. 4

che è zero per $\lambda = (-3 \pm \sqrt{11})\xi$, e quindi il grafico di $\psi(\lambda, \xi)$ offre un max > 0 in $(-3 - \sqrt{11})\xi$, un minimo < 0 per: $\xi(-3 + \sqrt{11})$

Tenuto conto che essendo $\xi > a$, $(-3 - \sqrt{11})\xi < -a$, $\psi(-a, \xi) > \psi(a, \xi)$, quindi: $\psi(a, \xi) - \psi(-a, \xi) < 0$, $R''(\xi) < 0$ per ogni $\xi \geq a$.

5^a proprietà: Pertanto il grafico di $R(\xi)$ volge la concavità verso il basso, andamento che, a parte il segno, è conforme alla [12] o alla [20]: (Fig. 4a).

La: $I[\Sigma(\xi)] = I(\xi)$, a semplificazioni effettuate risulta:

$$I(\xi) = (2\pi\sigma)^{-1} \cdot \alpha^2 [\log \{(\xi + a) / (\xi - a)\} - a\alpha] \quad [39]$$

$$I(a) = +\infty, I(\infty) = -a\alpha^3 / 2\pi\sigma$$

$$I'(\xi) = -a\alpha^2 [\pi\sigma(\xi^2 - a^2)]^{-1} < 0$$

$$I''(\xi) = (\pi\sigma)^{-1} a\alpha^2 \cdot 2\xi \cdot (\xi^2 - a^2)^{-2} > 0$$

$I(\xi)$ risulta decrescente e la concavità della curva (senza flessi), è rivolta verso l'alto: (v. Fig. 4).

Dopo l'esame del campo bipolare (nelle condizioni espresse) con la distanza dall'emittore, vediamo come esso varia con α , con la frequenza, o con la conduttività, ferma restando la distanza.

Dalla formola non ridotta [38] della $R(\alpha)$ si ricava:

$$R(0) = (2\pi\sigma)^{-1} \left\{ \frac{1}{2} (\xi - a)^{-2} - \frac{3\xi^2}{4} (\xi - a)^{-4} - \left[\frac{1}{2} (\xi + a)^{-2} - \frac{3}{4} \xi^2 (\xi + a)^{-4} \right] \right\}$$

$$R(\infty) = (2\pi\sigma)^{-1} \left\{ (\xi - a)^{-2} - \frac{3}{4} \xi^2 (\xi - a)^{-4} - \left[(\xi + a)^{-2} - \frac{3}{4} \xi^2 (\xi + a)^{-4} \right] \right\}$$

$$R'(\alpha) = (\tau\sigma)^{-1} \alpha \cdot \varphi(\alpha),$$

$$\varphi(\alpha) = \int_{-a}^{+a} (\xi - x)^{-1} e^{-\alpha(\xi-x)} \operatorname{sen} \alpha(\xi - x) dx$$

Il segno di $R'(\alpha)$, dato che $\alpha > 0$, dipende da quello di $\varphi(\alpha)$ il che importa di conoscere $\varphi(\alpha)$ al variare di α : $\varphi(0) = \varphi(\infty) = 0$,

$$\varphi'(\alpha) = \alpha^{-1} [e^{-\alpha(\xi+a)} \operatorname{sen} \alpha(\xi + a) - e^{-\alpha(\xi-a)} \operatorname{sen} \alpha(\xi - a)]$$

$$\varphi'(\alpha) = \alpha^{-1} \{ \psi[a(\xi + a)] - \psi[a(\xi - a)]; \psi(z) = \operatorname{sen} z \cdot e^{-z}$$

$$\psi(0) = \psi(\infty) = 0, \psi'(z) = (\cos z - \operatorname{sen} z) e^{-z}$$

La: $\psi'(z) = 0$, per $z = \pi/4 + 2k\pi$; $\pi + \pi/4 + 2k\pi$, $\psi(z)$ si annulla per $k\pi$.

Ne risulta per $\psi(z)$ un diagramma: $[\operatorname{sen} z e^{-z}, z]$ sinusoidale smorzato, da cui si può risalire a quello $[\alpha \cdot \varphi'(\alpha)]$, poi a $[\alpha, \varphi(\alpha)]$ infine a: $[\alpha, R(\alpha)]$.

6^a proprietà: La $R(\alpha)$ offre 2 diversi aspetti, oscillante smorzato (con saturazione), se la distanza elettrodica a è piccola rispetto a ξ

(Fig. 5a), aperiodico (con saturazione) (Fig. 5b), se la distanza elettrodica è grande.

Ovviamente queste situazioni si prestano per una più opportuna scelta di frequenza, per un maggior « rendimento » di essa.

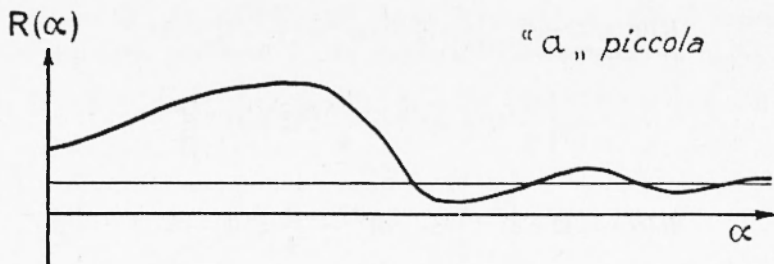


Fig. 5-a

Sia $R(0)$ che $R(\infty)$ possono essere ≥ 0 , a seconda i rapporti relativi di a e ξ , che dobbiamo precisare.

Posto: $\psi(z) = (2\pi\sigma)^{-1} \left[\frac{1}{2} z^{-2} - \frac{3}{4} \xi^2 z^{-4} \right]$, la [40] diviene:

$$R(0) = \psi(\xi - a) - \psi(\xi + a); \psi(z)_{z \rightarrow 0} = -\infty; \psi(z)_{z \rightarrow \infty} = 0$$

$$\psi'(z) = (2\pi\sigma z^3)^{-1} \cdot (3\xi^2 - z^2); \psi'(z) = 0, (z = \xi\sqrt{3}),$$

$$\psi'(z) > 0, (z < \xi\sqrt{3}); \psi'(z) < 0, (z > \xi\sqrt{3}); \psi(\xi\sqrt{3/2}) = 0$$

Se: $\xi - a > \xi\sqrt{3}$, ($\xi + a > \xi - a > \xi\sqrt{3}$), si ha, per la decrescenza della funzione: $\psi(\xi - a) - \psi(\xi + a) > 0$, $R(0) > 0$; se: $\xi - a < \xi\sqrt{3}$, ($\xi - a < \xi\sqrt{3}$), si ha per la crescita della funzione: $\psi(\xi - a) - \psi(\xi + a) < 0$, $R(0) < 0$.

Vi è uno ed un sol valore di $(\xi - a)$, e quindi di $(\xi + a)$, per cui $R(0) = 0$.

Analogamente: posto $\psi^*(z) = (2\pi\sigma)^{-1} \cdot \left(z^{-2} - \frac{3}{4} \xi^2 z^{-4} \right)$, la [41]

assume la forma: $R(\infty) = \psi^*(\xi - a) - \psi^*(\xi + a)$, con: $\psi^*(z)_{z \rightarrow 0} = -\infty$, $\psi^*(z)_{z \rightarrow \infty} = 0$, $\psi^{*'}(z) = (2\pi\sigma z^3)^{-1} \cdot (3\xi^2 - 2z^2)$, $\psi^{*'}(z) = 0$ per $z = \xi\sqrt{3/2}$, $\psi^{*'}(z) > 0$ per: $0 < \xi\sqrt{3/2} < z < \xi\sqrt{3}$, < 0 per $z > \xi\sqrt{3/2}$, con lo stesso andamento di $\psi(z)$.

Se: $\xi + a < \xi\sqrt{3/2}$, ($\xi - a < \xi\sqrt{3/2}$), si ha, per la crescita della funzione: $\psi(\xi - a) - \psi(\xi + a) < 0$, quindi $R(\infty) < 0$; se:

$\xi - a > \xi \sqrt{3/2}$, ($\xi + a > \xi \sqrt{3/2}$) si ha per la decrescenza della funzione $\psi(\xi - a) - \psi(\xi + a) > 0$, $R(\infty) > 0$. Vi è un solo valore di $(\xi - a)$, (e di $\xi + a$) per cui $R(\infty) = 0$.

Così dopo un'introduzione sugli scopi principali di questa « Memoria », ricordato rapidamente la teoria del Sommerfeld e deduzioni

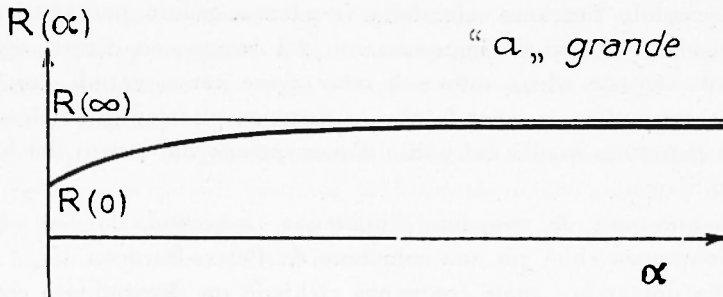


Fig. 5-b

relative al campo elettrico terrestre alla superficie del suolo con le sue principali proprietà, abbiamo costruito i grafici di fig. 1 illustranti i risultati sostanzialmente già conseguiti fin dal 1942 dallo Stefanescu, e dieci anni dopo ripresentati da Yost ed altri, con leggere varianti. Si è ripercorso questa teoria classica (sia pure ormai insufficiente) per far risaltare alcune deduzioni che permangono tuttora valide, tra cui la formola fondamentale (trovata per altra via dall'Horton) per il calcolo della parte reale della componente radiale del campo elettrico.

Segue una minuta necessaria disamina dell'evoluzione spaziale e temporale delle « componenti ridotte » del campo elettrico, nelle loro parti rispettive reali e immaginarie.

Dopo di che ci siamo posti nelle condizioni dell'Horton, più aderenti alla sperimentazione procedendo con analisi analoghe alle precedenti.

In seguito partendo dalle formole generali Smith-Horton-Lewis abbiamo sviluppata quest'ultima teoria, estendendo l'ipotesi relative al rapporto $(\sigma/\omega \varepsilon \geq 1)$.

Da porre attenzione al modo d'interpretare della nuova alternativa: $\sigma/\omega \varepsilon < 1$, normalmente giustificata tale per ω altissime, mentre impiegando ω basse, si è costretti assumere, (per la validità della disuguaglianza), altissime costanti dielettriche, dell'ordine riconosciuto dall'Evjen.

Rimuoviamo infine l'approssimazione della dipolarità, introducendo emittori bipolari.

Calcoli laboriosi hanno pur condotto a stabilire comportamenti di campo con la distanza del bipolo, analoghi a quelli aperiodici del dipolo a bassissima frequenza.

L'esame del campo bipolare è stato ulteriormente approfondito, considerandolo funzione solo della frequenza. Siamo pervenuti a diversi risultati tra cui il riconoscimento del campo con diversi aspetti, oscillante intorno ad un valore di saturazione per ω grandi, con massimo, o aperiodico, a seconda che la distanza elettrodica è piccola o grande rispetto a quella del punto d'osservazione dal centro del bipolo (v. fig. 5).

La questione del massimo d'influenza (a seconda σ), col variare della frequenza ebbe già una soluzione da Peters-Bardeen (').

Alla domanda: quale frequenza richiede un determinato conduttore spaziale per provocare la massima influenza e.m. in superficie?, questi AA. hanno potuto rispondere determinandola conforme ai nostri risultati.

Con emittore dipolare, si pronuncia un ottimo di frequenza in termini di profondità d'investigazione e conduttività del mezzo, mentre con emittore bipolare (distanza elettrodica grande) si ha (nelle condizioni esaminate), una saturazione aperiodica da un massimo iniziale d'influenza a frequenza nulla.

Cagliari — Facoltà d'Ingegneria dell'Università — Maggio 1954.

RIASSUNTO

L'A. si sofferma dapprima rapidamente sulla teoria classica del Sommerfeld del dipolo orizzontale oscillante, posto alla superficie d'un suolo omogeneo, (teoria che trascura la costante dielettrica a causa delle medie frequenze adoperate), presentando i risultati fondamentali con grafici e tabelle d'impiego nella prospezione elettrica del sottosuolo.

Si mostra l'evoluzione delle « componenti ridotte » radiali e tangenziale del campo e.m. terrestre nelle loro rispettive parti reale e immaginaria, in funzione della « distanza numerica ».

Si ricava una formola approssimata che dà la parte reale della componente radiale (quella generalmente che si misura sul terreno), coincidente con una data dall'Horton, seguendo un diverso indirizzo deduttivo.

Nella 2^a parte l'A. discute la teoria Horton-Lewis vertente sull'argomento e mostratasi più aderente alla realtà sperimentale, con relativo esame dettagliato.

Nella 3^a parte l'A. sviluppa una teoria, la quale tenendo presente i più recenti studi di Evjen, conferisce alla costante dielettrica dei suoli la sua dipendenza dalla bassa frequenza.

Con tali presupposti deduce come alle bassissime frequenze si debba incrementare il campo elettrico alternativo e ridurre notevolmente la velocità di trasmissione delle onde elettromagnetiche del suolo, all'ordine di grandezza delle velocità delle onde sismiche.

Nella parte 4^a l'A. rimuove la limitazione dell'emittore dipolare dando formole e grafici, con particolareggiate discussioni dell'emittore bipolare in determinate condizioni.

SUMMARY

The author first treats rather rapidly the classical theory of Sommerfeld of the horizontal oscillating dipole, placed at the surface of a homogeneous soil (a theory which, because of the mean frequencies adopted, neglects the dielectric constant), presenting the fundamental results with graphs and tables for use in electric prospecting of the under soil.

One shows the behavior of the radial and tangential « reduced components of the earth's e.m. field in their respective real and imaginary parts, as a function of the « numerical distance ».

An approximate formula which gives the real part of the radial component (that which one generally measures at the earth surface) has been found which agrees with that given by Horton following another deductive line of argument.

In the second part, the theory of Horton-Lewis bearing on this argument is discussed, and is shown to be closer to the experimental reality after a detailed examination.

In the third part, the author develops a theory, which, keeping in mind the most recent studies of Evjen, shows the dependence of the dielectric constant of the soil on the frequency.

With such suppositions, it is deduced how, at the very lowest frequencies, one must increase the alternating electric field and reduce notably the transmission velocity of e.m. waves of the soil, to the order of magnitude of the seismic wave velocity.

In part four, the author removes the limitation of the dipole emitter, giving formulae and graphs, with detailed discussions of the bipole oscillator.

BIBLIOGRAFIA

- (1) BELLUIGI A., *Sui campi elettromagnetici a bassa frequenza*. Rivista di Geofisica Appl. 1952, Milano.
- (2) BRADLEY LEWIS W., *Electric Field of a oscillating Dipole*. Geophysik, 1946.
- (3) HORTON C. W., *On the use of e.m. Waves in Geoph. Prospecting*. Geophysics, 1946.
- (4) STEFANESCU S. S., *Das elektromagnetische Normalfeld des waagerechten Niederfrequenz dipols*. Beitr. zur angewand. Geophysik, 1942, B. 9.
- (5) WOLF A., *Electric Field of a Oscillating Dipole on the surface of a Two Layer Earth*. Geophysics, 1946.
- (6) WAIT J. R., *A Note on Dipole radiation in a Conducting Medium*. Geophysics, 1952, n. 4.
- (7) PETERS L.-BARDEEN J., *Some Aspect of Electrical Prospecting applied in Locating Oil Structures*. Geoph., 1931.