ESPRESSIONE FORMALE PER FUNZIONI A PICCO

SILVIO DE FRANCESCO

Ci proponiamo di mostrare come sia possibile giungere ad una forma matematica che esprima una funzione di durata istantanea e di valore finito o meno, quale limite di una funzione rettangolare di durata ε, quando ε tenda a 0.

È il caso delle funzioni a picco (di tensione, di corrente, chiamate dagli Anglo-americani « trigger » ed usate largamente nei radar, nella televisione e nei calcolatori elettronici).

Sia:

$$r(t;\ \tau, \tau+\varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{per } t \text{ interno a } (\tau, \tau+\varepsilon) \\ 0 & \text{» » esterno » »} \end{cases}$$

e concepiamo r formata dalla somma delle due funzioni a gradino (step-function):

$$g(t-\tau) = \begin{cases} 1 & \text{per } t \geq \tau \\ 0 & \text{» } t < \tau \end{cases} \qquad -g(t-\tau-\varepsilon) = \begin{cases} -1 & \text{per } t \geq \tau+\varepsilon \\ 0 & \text{» } t < \tau+\varepsilon \end{cases},$$

$$r(t;\ \tau, \tau+\varepsilon) = g(t-\tau) - g(t-\tau-\varepsilon) \qquad [1]$$

Per ragioni che diverranno evidenti in seguito, ricorriamo allo artificio di prendere per funzioni a gradino le seguenti:

$$g(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < \tau \\ \lim\limits_{\gamma\to 0} e^{-\gamma(t-\tau)} = 1 & \text{per } t \geq \tau, \end{cases}$$

ossia;

$$-g(t-\tau-\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{per } t > \tau+\varepsilon \\ -\lim\limits_{\gamma\to 0} e^{-\gamma(t-\tau-\varepsilon)} = -1 & \text{per } t \geq \tau+\varepsilon \end{cases}$$

con γ reale e positivo (cfr. Guillemin, loc. cit., pag. 531).

Prendiamo ora la trasformata di Fourier della [1]:

$$F\{r\} = F\{g(t-\tau)\} - F\{g(t-\tau-\varepsilon)\} \qquad [2]$$

e ricordando che:

$$F\{g(t-\tau)\} = \lim_{\gamma\to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\tau}^{\infty} e^{-\gamma(t-\tau)}\, e^{-j\omega t}\, dt =$$

$$= \lim_{\gamma\to 0} \frac{e^{\gamma\tau}}{2\pi} \int_{\tau}^{\infty} e^{-(\gamma+j\omega)t}\, dt = \lim_{\gamma\to 0} \frac{e^{\gamma\tau}}{2\pi} \cdot \frac{e^{-(\gamma+j\omega)\tau}}{\gamma+j\omega}$$

$$-F\{g(t-\tau-\varepsilon)\} = \lim_{\gamma\to 0} - \frac{e^{\gamma(\tau+\varepsilon)}}{2\pi} \cdot \frac{e^{-(\gamma+j\omega)(\tau+\varepsilon)}}{\gamma+j\omega}$$

e quindi antitrasformando la [2] otteniamo:

$$F^{-1}\cdot F\{r\} = r(t;\ \tau, \tau+\varepsilon) = \lim_{\gamma\to 0} - \frac{e^{\gamma(\tau+\varepsilon)}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(\gamma+j\omega)(\tau+\varepsilon)}}{\gamma+j\omega}\, e^{j\omega t}\, d\omega +$$

$$+ \lim_{\gamma\to 0} \frac{e^{\gamma\tau}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(\gamma+j\omega)\tau}}{\gamma+j\omega}\, e^{j\omega t}\, d\omega \; . \qquad \text{Ma}$$

$$\lim_{\substack{\gamma\to 0\\ a\to\infty}} \left\{ - \frac{e^{\gamma(\tau+\varepsilon)}}{2\pi} \int_{-a}^{a} \frac{e^{-\gamma\tau-j\omega\tau-\gamma\varepsilon-j\omega\varepsilon+j\omega t}}{\gamma+j\omega}\, d\omega \right\} =$$

$$= \lim_{\substack{\gamma\to 0\\ a\to\infty}} \left\{ - \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \frac{e^{j\omega(t-\tau-\varepsilon)}}{\gamma+j\omega}\, d\omega \right\}$$

ed analogamente:

$$\lim_{\substack{\gamma\to 0\\ a\to\infty}} \left\{ \frac{e^{\gamma\tau}}{2\pi} \int_{a}^{a} \frac{e^{-(\gamma+j\omega)\tau}}{\gamma+j\omega}\, e^{j\omega t}\, d\omega \right\} = \lim_{\substack{\gamma\to 0\\ a\to\infty}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{a}^{a} \frac{e^{j\omega(t-\tau)}}{\gamma+j\omega}\, d\omega \right\}$$

da cui:

$$r(t;\ \tau, \tau+\varepsilon) = \lim_{\substack{\gamma\to 0\\ a\to\infty}} \left\{ - \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \frac{e^{j\omega(t-\tau-\varepsilon)}}{\gamma+j\omega}\, d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \frac{e^{j\omega(\ -\tau)}}{\gamma+j\omega}\, d\omega \right\} \qquad [3]$$

Consideriamo quindi:

$$\alpha = \lim_{\substack{\gamma \to 0 \\ a \to \infty}} \left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \frac{e^{j\omega(t-\tau-\varepsilon)}}{\gamma + j\omega} d\omega \right\} \qquad [4]$$

$$\beta = \lim_{\substack{\gamma \to 0 \\ a \to \infty}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \frac{e^{j\omega(t-\tau)}}{\gamma + j\omega} d\omega \right\} \qquad [5]$$

e poniamo:

$$\Delta_1 = t - \tau - \varepsilon \ , \qquad \Delta_2 = t - \tau \ .$$

Per t interno all'intervallo $(\tau, \tau+\varepsilon)$ sarà $\Delta_1 < 0$; $\Delta_2 > 0$, ossia $\Delta_1 = -D_1$, $\Delta_2 = D_2$, con D_1, D_2 quantità positive. Avremo allora:

$$\alpha = \lim_{\substack{\gamma \to 0 \\ a \to \infty}} \left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_{+aD_1}^{-aD_1} \frac{e^{-j\omega D_1} d\omega D_1}{\gamma D_1 + j\omega D_1} \right\} = \lim_{\substack{\gamma \to 0 \\ a \to \infty}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-aD_1}^{aD_1} \frac{e^{-j\omega D_1}}{\gamma D_1 + j\omega D_1} d\omega D_1 \right\}$$

$$\beta = \lim_{\substack{\gamma \to 0 \\ a \to \infty}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-aD_2}^{aD_2} \frac{e^{j\omega D_2}}{\gamma D_2 + j\omega D_2} d\omega D_2 \right\}$$

dalle quali:

$$\alpha = \lim_{\substack{\gamma \to 0 \\ a \to \infty}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-aD_1}^{aD_1} \frac{\cos \omega D_1}{\gamma D_1 + j\omega D_1} d\omega D_1 - \frac{j}{2\pi} \int_{-aD_1}^{aD_1} \frac{\sin \omega D_1}{\gamma D_1 + j\omega D_1} d\omega D_1 \right\} \qquad [6]$$

$$\beta = \lim_{\substack{\gamma \to 0 \\ a \to \infty}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-aD_2}^{aD_2} \frac{\cos \omega D_2}{\gamma D_2 + j\omega D_2} d\omega D_2 + \frac{j}{2\pi} \int_{-aD_2}^{aD_2} \frac{\sin \omega D_2}{\gamma D_2 + j\omega D_2} d\omega D_2 \right\} \qquad [7]$$

La somma $\alpha + \beta$ è uguale all'unità, ma anche $\lim (\alpha + \beta) = 1$. Infatti per $\varepsilon \to 0$, D_1 tende a D_2 e quindi i secondi termini dei secondi membri di [6] e [7] si elidono, mentre i due primi valendo ciascuno 1/2, danno l'unità (*).

Benché ovvio in relazione al tipo di funzione assunta fin dall'inizio, si può verificare agevolmente che per t esterno a $(\tau, \tau+\varepsilon)$ ed a sinistra di τ, la somma $\alpha + \beta$ delle [4] e [5] è nulla come pure $\lim_{\varepsilon \to o} (\alpha + \beta) = 0$.

In tal caso infatti $\Delta_1 = -D_1$, $\Delta_2 = -D_2$ per cui:

$$\alpha = \lim_{\substack{\gamma \to o \\ a \to \infty}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-aD_1}^{aD_1} \frac{\cos \omega D_1}{\gamma D_1 + j \omega D_1} d \omega D_1 - \frac{j}{2\pi} \int_{-aD_1}^{aD_1} \frac{\sin \omega D_1}{\gamma D_1 + j \omega D_1} d \omega D_1 \right\} \tag{8}$$

$$\beta = \lim_{\substack{\gamma \to o \\ a \to \infty}} \left\{ - \frac{1}{2\pi} \int_{-aD_2}^{aD_2} \frac{\cos \omega D_2}{\gamma D_2 + j \omega D_2} d \omega D_2 + \frac{j}{2\pi} \int_{-aD_2}^{aD_2} \frac{\sin \omega D_2}{\gamma D_2 + j \omega D_2} d \omega D_2 \right\} \tag{9}$$

Per ε finito, i secondi termini dei secondi membri di [8] e [9] sono entrambi eguali in valore assoluto ad $1/2$ e si elidono e lo stesso avviene per i due primi. Per $\varepsilon \to o$, D_1 tende a D_2 che tende a zero; i secondi termini dei secondi membri si annullano, mentre i due primi si elidono cosicché $\lim_{\varepsilon \to o} (\alpha + \beta) = 0$.

In modo analogo per t esterno a $(\tau, \tau + \varepsilon)$ ed a destra di $\tau + \varepsilon$, $\alpha + \beta = 0$, $\lim_{\varepsilon \to o} (\alpha + \beta) = 0$.

Si conclude che:

$$\lim_{\substack{\gamma \to o \\ \varepsilon \to o \\ a \to \infty}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \frac{e^{j\omega(t-\tau)} - e^{j\omega(t-\tau-\varepsilon)}}{\gamma + j\omega} d\omega \right\} = \mu(t-\tau) = \begin{cases} 1 & \text{per } t = \tau \\ 0 & \text{per } t \neq \tau \end{cases}.$$

Si vede pure che:

$$\frac{\mu(t-\tau)}{1 - \mu(t-\tau)} = \begin{cases} \infty & \text{per } t = \tau \\ 0 & \text{per } t \neq \tau \end{cases}.$$

(*) Infatti:

$$\lim_{\substack{\gamma \to o \\ D_1 \to D_2 \to D \to o \\ a \to \infty}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-aD}^{aD} \frac{\cos \omega D}{\gamma D + j \omega D} d \omega D \right\} = \lim_{\substack{\gamma \to o \\ D \to o \\ a \to \infty}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \frac{\cos \omega D}{\gamma + j\omega} d\omega \right\}.$$

È vero che se $\gamma = 0$ l'integrale diventa improprio perché l'integrando diviene infinito per $\omega = 0$. Tuttavia se $\gamma = 0$, l'integrando è una funzione dispari di ω: e poiché i limiti di integrazione sono simmetrici, il valore dell'integrale, eccettuando il contributo critico dell'intorno di $\omega = 0$, dovrebbe essere nullo; quindi il valore dell'integrale (qualunque esso sia) è però certamente determinato dal contributo di tale intorno. Denotando questo intorno con $(-\rho, \rho)$, si può porre $\cos \omega D = 1$ perché per piccoli incrementi da $\omega = 0$, $\cos \omega D$ differisce dall'unità per una piccola quantità di secondo ordine (a maggior ragione è $\cos \omega D = 1$ se $D = 0$) e quindi l'integrale al secondo membro diviene:

$$\lim_{\gamma \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\rho}^{\rho} \frac{d\omega}{\gamma + j\omega} = \lim \frac{1}{2\pi j} \Big[\ln(\gamma + j\omega) \Big]_{-\rho}^{\rho} = \frac{1}{2\pi j} \left[\ln \frac{\gamma + j\rho}{\gamma - j\rho} \right]_{\gamma \to 0} = \frac{1}{2}$$

L'ambiguità relativa a $\ln(-1) = j(2n+1)\pi$, sparisce se si tiene conto del cammino dell'integrale obbligato da $\gamma - j\rho$ a $\gamma + j\rho$. Infatti posto $z = \gamma + j\omega$, l'integrale $\left(\text{a meno di } \frac{1}{2\pi j}\right)$ prende la forma: $\int_{\gamma - j\rho}^{\gamma + j\rho} \frac{dz}{z}$, ossia è una pura quantità immaginaria pari in grandezza all'angolo formato dalle congiungenti l'origine del piano z con i punti $\gamma + j\rho$, $\gamma - j\rho$, che tende a π quando γ tende a zero.

Per questa analisi cfr. Guillemin. The mathematics of circuit analysis. J. Wiley. N. Y. Ed. 1949, pag. 535-36.

Che un integrale del tipo $\int_{-y_0}^{y_0} \frac{\cos y}{y} dy$ eguagli $j(2n+1)\pi$ si può anche mostrare ricorrendo ad una nota formula relativa al coseno integrale che riprendiamo da Jahnke-Ende-Dover Ed. ovvero la:

$$Ci(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt = \ln(x\gamma) - \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t} dt\ ,$$

dove γ è la costante di Euler-Mascheroni.

Infatti:

$$\int_{-y_0}^{y_0} \frac{\cos y}{y}\, dy = \int_{-y_0}^{b} \frac{\cos y}{y}\, dy + \int_{b}^{y_0} \frac{\cos y}{y}\, dy = -\int_{y_0}^{b} \frac{\cos y\, dy}{y} + \int_{-y_0}^{b} \frac{\cos y dy}{y} =$$

$$= -\int_{y_0}^{\infty} \frac{\cos y\, dy}{y} + \int_{-y_0}^{\infty} \frac{\cos y\, dy}{y} = \ln (y_0 \gamma) - \int_{0}^{y_0} \frac{1 - \cos y}{y}\, dy +$$

$$-\ln (-y_0 \gamma) + \int_{0}^{-y_0} \frac{1 - \cos y}{y}\, dy = \ln (-1) - \int_{-y_0}^{y_0} \frac{1 - \cos y}{y}\, dy = j\,(2n+1)\,\pi,$$

in quanto l'integrando è una funzione dispari che s'annulla per $y = 0$.

Tale metodo è stato suggerito dal Dr. D. C. Borghi.

RIASSUNTO

Viene ricercata un'espressione formale per le funzioni di durata istantanea (picco), considerate quali limite di una funzione rettangolare. La validità della formula poggia su quella di espressioni date da E. A. Guillemin (loco cit. nel testo).

SUMMARY

An expression for trigger functions is given as a limiting form of a rectangular function. The validity of the formula lies on that of an expression given somewhere by E. A. Guillemin (see reference in te thext).