NOTE INTORNO AL TEOREMA DI SHANNON

SILVIO DE FRANCESCO

Paragrafo 1°

Le considerazioni che faremo ci consentiranno di mettere in evidenza i fondamenti del Teorema Shannon, le condizioni per la sua validità, la natura della convergenza della formula di Shannon, l'errore ad essa relativo.

Non è superfluo avvertire che essendo le seguenti note redatte da un tecnico delle Telecomunicazioni, esse non hanno quel linguaggio ortodosso che si richiede dai matematici puri: perciò l'autore chiede fin da questo momento venia e comprensione. Avvertiamo inoltre che verrà spesso usato il simbolo $F\}(f(t)\{$ per esprimere la trasformata di Fourier della funzione del tempo entro parentesi a graffa (funzione di variabile reale), nonché il simbolo $F^{1}\}F(\omega)\{$ per indicare la trasformata inversa o antitrasformata di Fourier della funzione $F(\omega)$ di ω, in cui $F(\omega)$ è la trasformata di Fourier della funzione $f(t)$.

Paragrafo 2°

Riassumiamo brevemente la dimostrazione del teorema in discorso, data dallo Shannon stesso nel: *Proceedings of the IRE - Communications in the presence of noise* - gennaio 1949, volume 37, n. 1, pag. 10. È sunteggiato ciò che interessa le presenti note.

Ecco l'enunciato originario del teorema: se una funzione $f(t)$ non contiene frequenze più alte di w, essa è completamente determinata se si conoscono i valori che essa assume in istanti spaziati fra loro di $\frac{1}{2w}$ (1).

(1) Ciò vale quanto asserire che se una funzione della variabile t, $f(t)$, è tale che la sua trasformata di Fourier $F(\omega)$ risulti limitata all'intervallo d'esistenza $(-2\pi w, 2\pi w)$, dove $\omega = 2\pi w$, la funzione è completamente determinata se si conoscono i valori che essa prende in punti spaziati tra loro di $\frac{1}{2w}$.

Partendo dalle formule:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega\,, \quad F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \qquad [1]$$

si supponga che la trasformata di Fourier di $f(t)$, ossia la $F(\omega)$ sia limitata all'intervallo $(-2\pi w\,,\ 2\pi w)$.

Si possono allora sostituire ai limiti del primo integrale delle [1] le pulsazioni $-2\pi w$, $2\pi w$: si effettui inoltre la sostituzione $t = \frac{n}{2w}$ (n intero) ottenendo così la seguente espressione:

$$f\left(\frac{n}{2w}\right) = \int_{-2\pi w}^{2\pi w} F(\omega)\, e^{j\frac{n\omega}{2w}}\, d\omega \qquad [2]$$

Si osservi che questa relazione ha il 2° membro uguale, a meno del fattore $1/4\pi w$ al coefficiente ennesimo dello sviluppo in serie di Fourier della:

$$F(\omega) = \Sigma_n C_n e^{j\frac{n\omega}{2w}}\,, \quad \text{ossia} \quad c_n = \frac{1}{4\pi w} \int_{2\pi w}^{2\pi w} F(\omega)\, e^{j\frac{n\omega}{2w}}\, d\omega \qquad [3]\text{-}[4]$$

Possiamo dunque scrivere:

$$f\left(\frac{n}{2w}\right) = \int_{-2\pi w}^{2\pi w} F(\omega)\, e^{j\frac{n\omega}{2w}}\, d\omega = 4\pi w C_n = x_n \qquad [5]$$

cioè x_n è uguale al valore di $f(t)$ nell'istante $\frac{n}{2w}$.

Una volta conosciuti i coefficienti della serie di Fourier della $F(\omega)$, questa resta determinata e con essa la $f(t)$. Ma poiché detti coefficienti sono eguali ai valori che $f(t)$ assume nell'istante generico $\frac{n}{2w}$, la $f(t)$ è completamente determinata qualora si conoscano i valori che essa prende in istanti spaziati tra loro di $\frac{1}{2w}$. Essa può essere ricostruita per mezzo di questi valori usando funzioni del tipo $\frac{\sin 2\pi w t}{2\pi w t}$ [6]

di spettro costante nella banda w e nullo all'infuori ([2]). Infatti una funzione del tipo:

$$\sum_{-\infty}^{\infty}{}_n\, x_n \frac{\sin \pi (2\, w\, t - n)}{\pi (2\, w\, t - n)} \qquad [6']$$

ha la proprietà d'assumere valori uguali ad $f\left(\dfrac{n}{2w}\right)$ negli istanti $t = \dfrac{n}{2w}$ ed ha la stessa ampiezza di spettro (ossia intervallo di esistenza) di $f(t)$.

Di tali funzioni ve n'è una ed una sola ([3]). Nel caso che la funzione $f(t)$ sia nulla all'esterno dell'intervallo (o, T) cioè se essa rappresenta un segnale di durata limitata si avrà:

$$f(t) = \sum_{1}^{2wT}{}_n\, x_n \frac{\sin \pi (2\, w\, t - n)}{\pi (2\, w\, t - n)} .$$

Paragrafo 3°

Ricerchiamo le condizioni necessarie e sufficienti affinché la formula di Shannon s'identifichi con uno sviluppo in serie di funzioni ortogonali ([4]) convergente completamente in m. q. (media quadratica) verso $f(t)$. Tale assunto potrebbe sembrare arbitrario; ma se si pensa che sono gli sviluppi ortogonali quelli che assicurano la migliore approssimazione in m. q. (e che si tratti di ciò risulta chiaramente dal citato articolo di Shannon) tale ricerca appare pienamente giustificata.

Per semplificare la scrittura poniamo

$$f\left(\frac{n}{2w}\right) = f_n \,, \quad \frac{\sin \pi (2\, w\, t - n)}{\pi (2\, w\, t - n)} = \frac{\sin 2\, \pi\, w \left(t - \dfrac{n}{2w}\right)}{2\, \pi\, w \left(t - \dfrac{n}{2}\right)} = \sigma_n \,, \quad \Sigma_n \text{ per } \sum_{-\infty}^{\infty}{}_n$$

(salvo diversamente specificato)

([2]) Ossia la trasformata di Fourier della funzione $\dfrac{\sin 2\pi w t}{2\pi w t}$, è una funzione ad andamento rettangolare, limitata all'intervallo d'esistenza $(-2\pi w,\ 2\pi w)$.

([3]) Nel senso: il cui spettro sia limitato alla banda w e che passi per i valori dati dai « samples » (punti di prelievo) separati di $1/2w$ secondi.

([4]) Questa idea fu suggerita all'autore delle presenti note dal Comandante Riccardo Bignamini per mettere in luce la ragione dell'intervallo $\frac{1}{2}w$ di prelievo dei valori di $f(t)$. Ringrazio il Bignamini che spero voglia portare a termine un interessante studio sul significato numerico del Teorema di Shannon e connessi.

e, conservando le ipotesi di cui al par. precedente, cominciamo con l'osservare, insieme allo Shannon, che il sistema $\{\sqrt{2w}\,\sigma_n\}$ è ortonormale in $(-\infty, \infty)$. Lo sviluppo in discorso, che prende allora la forma $\Sigma_n f_n \sigma_n$ e che può anche scriversi $\Sigma_n \frac{f_n}{\sqrt{2w}}\left(\sqrt{2w}\,\sigma_n\right)$, sarà ortogonale se $\frac{f_n}{\sqrt{2w}} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sqrt{2w}\,\sigma_n\,dt$, ossia se

$$f_n = 2w\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\sigma_n\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\frac{\sin 2\pi w\left(t-\frac{n}{2w}\right)}{\pi\left(t-\frac{n}{2w}\right)}\,dt .$$

Riservandoci di dimostrare, al prossimo paragrafo, come nell'ipotesi del Teorema (e con altre precisazioni) l'ultima condizione risulti effettivamente verificata, notiamo che, se $f(t)$ è a quadrato sommabile in $(-\infty, \infty)$ vale la limitazione di Bessel

$$\Sigma_n\left(\frac{f_n}{\sqrt{2w}}\right)^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt$$

(come può dedursi dal contesto della dimostrazione data da E. W. Hobson a proposito del Teorema di Parseval esteso ad un intervallo infinito; infatti non essendo provato che il sistema $\{\sqrt{2w}\,\sigma_n\}$ sia completo nel tratto $(-\infty, \infty)$ non varrà in genere il segno di uguaglianza. Per il citato Teorema, cfr. E. W. Hobson. The Theory of functions of a real variable. Vol. II, 2ª ed. 1926 par 492, pag. 759-60-61 (5).

Dopodiché, visto che il sistema $\{\sqrt{2w}\,\sigma_n\}$ è ortonormale in $(-\infty, \infty)$ la serie $\Sigma_n f_n \sigma_n$ convergerà in m. q. verso una funzione $f(t)$ a quadrato sommabile in $(-\infty, \infty)$ che ha per coefficienti di Fourier gli $\frac{f_n}{\sqrt{2w}}$ ossia $\frac{f_n}{\sqrt{2w}} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sqrt{2w}\,\sigma_n\,dt$ (per il Teorema Riesz-Fischer esteso ad intervallo infinito: cfr. il citato Hobson pag. 761, 2 par 493).

(5) Cfr. anche G. VITALI. *Geometria nello spazio hilbertiano.*

Poiché però non è dimostrato che il sistema $\{\sqrt{2w}\,\sigma_n\}$ è completo (o chiuso) in $(-\infty, \infty)$, non può dirsi che $\bar{f}(t)$ sia unica (cfr. il citato Hobson pag. 762).

Si noti tuttavia che se $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$ è convergente ([6]), allora ad $F(\omega)$, quale trasformata di Fourier di $f(t)$, corrisponde unicamente la $f(t)$; se poi vale l'ipotesi che la $F\{f(t)\} = F(\omega)$ sia limitata all'intervallo d'esistenza finito $(-2\pi w, 2\pi w)$, allora a causa di ciò e della supposta assoluta integrabilità di $f(t)$ in $(-\infty, \infty)$ vale la relazione

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,\frac{\sin 2\pi w\,(t-\tau)}{\pi\,(t-\tau)}\, d\tau \qquad [1]$$

(cfr. par. successivo per la dimostrazione).

Ora il secondo membro di [1] è la F^{-1} di $\{R(\omega;\, \pm 2\pi w)\cdot F(\omega)\}$ in cui

$$R(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{per } \omega \text{ interno a } (-2\pi w,\ 2\pi w) \\ 0 & \text{»} \quad \text{»} \quad \text{esterno »} \qquad \text{»} \end{cases}$$

ed $F^{-1}\{R(\omega)\} = \dfrac{\sin 2\pi w t}{t}$; segue di qui, per l'unicità di $f(t)$ rispetto ad $F(\omega)$, che la [1] vale soltanto se sotto il segno d'integrale appare la f e non un'altra funzione come ad esempio $\bar{f}$. Ma gli f_n si ottengono dalla [1] ponendo $t = \dfrac{n}{2w}$: infatti

$$f\left(\frac{n}{2w}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,\frac{\sin 2\pi w\left(\dfrac{n}{2w} - \tau\right)}{\pi\left(\dfrac{n}{2w} - \tau\right)}\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,\frac{\sin 2\pi w\left(\tau - \dfrac{n}{2w}\right)}{\pi\left(\tau - \dfrac{n}{2w}\right)}\, d\tau$$

([6]) Ovvero a variazione limitata purchè $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = o$; naturalmente $f(t)$ deve essere finita e regolare per t finito ed anche sommabile in qualunque tratto finito. Cfr. G. Vitali e G. Sansone, *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*. 3ª ediz. 1952, Parte II, pag. 163-4.

e cambiando τ in t,

$$f\left(\frac{n}{2w}\right)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\frac{\sin 2\pi w\left(t-\dfrac{n}{2w}\right)}{\pi\left(t-\dfrac{n}{2w}\right)}\,dt\ ;$$

si conclude che $\overline{f}(t)=f(t)$ e che quindi la ricercata convergenza in m. q. è completa.

Riassumendo, le condizioni necessarie al nostro assunto sono:

a) $f(t)$ a quadrato sommabile in $(-\infty, \infty)$

b) $F(\omega)$ limitata all'intervallo finito d'esistenza $(-2\pi w,\ 2\pi w)$

c) $f(t)$ assolutamente integrabile in $(-\infty, \infty)$ o equivalente (cfr. nota precedente).

Alla *b*) può sostituirsi la

b') $f(t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,\frac{\sin 2\pi(t-\tau)}{\pi(t-\tau)}\,d\tau$, con le considerazioni che saranno fatte al paragrafo successivo. Che poi tali condizioni siano sufficienti s'è già visto dal contesto.

Paragrafo 4°

Dimostriamo ora quanto preannunciato nel par. 3.

Se $f(t)$ è tale che $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,.\,dt$ [7] converga e che $F\{f(t)\}=F(\omega)$ risulti limitata all'intervallo $(-2\pi w,\ 2\pi w)$ con w finito e positivo [8], allora vale la relazione:

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,\frac{\sin 2\pi w(t-\tau)}{\pi(t-\tau)}\,d\tau$$

---

(7) Vedi note al par. precedente.

(8) w rappresenta la frequenza delle oscillazioni sinusoidali in cui può scomporsi la $f(t)$, perciò la condizione $w>o$ non è una limitazione, ma è perfettamente aderente alla realtà fisica, in cui non si concepiscono frequenze negative.

Dalle formule

$$f(t) = \int_{-2\pi w}^{2\pi w} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \;, \qquad F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \;,$$

con metodo di iterazione si ottiene l'equazione (che formalmente è un'equazione integrale)

$$f(t) = \int_{-2\pi w}^{2\pi w} e^{j\omega t} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \right] d\omega \;. \qquad [1]$$

Osservando che:

$$\int_{-2\pi w}^{2\pi w} e^{j\omega t} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \right| d\omega = \int_{-\infty} R(\omega)\, e^{j\omega t} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \right| d\omega$$

se

$$R(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{per } \omega \text{ interno a } (-2\pi w, 2\pi w) \\ 0 & \text{» » esterno » »} \end{cases}$$

la [1] potrà porsi eguale a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ R(\omega) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \right] \right\} e^{j\omega t}\, d\omega = F^{-1} \left\{ R(\omega) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \right| \right\}$$

Ma

$$R(\omega) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \right] = F \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin 2\pi w (t-\tau)}{t-\tau} f(\tau)\, d\tau \right\}$$

(per il teorema del prodotto integrale) essendo

$$\frac{2 \sin 2\pi w t}{t}$$

l'antitrasformata di $R(\omega)$ cosicché:

$$F^{-1}\left\{R(\omega)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt\right]\right\} = F^{-1}\cdot F\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2\pi w(t-\tau)}{\pi(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cdot\frac{\sin 2\pi w(t-\tau)}{\pi(t-\tau)}\, d\tau$$

che è quanto ci proponevamo di dimostrare.

Osservando il metodo tenuto nel dimostrare la [1], si vede che, essendo $F(\omega)$ limitata all'intervallo d'esistenza $(-2\pi w,\ 2\pi w)$ (e nulla al di fuori), varrà pure la relazione

$$\int_{-2\pi w}^{2\pi w} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} R'(\omega) F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

dove

$$R'(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{per } \omega \text{ interna a } (-2\pi w',\ 2\pi w') \\ 0 & \text{» » esterno » »} \end{cases}$$

con $w' > w$, in quanto compare sempre sotto il segno di integrale la funzione $F(\omega)$.

Ciò porterebbe a concludere che la $f(t)$, nelle ipotesi del teorema, è sviluppabile in serie convergente mediante ogni sistema ortonormale

$$\left\{\sqrt{2w'}\,\frac{\sin \pi(2w't-n)}{\pi(2w't-n)}\right\},$$

purché $w' > w$. Il sistema caratterizzato da $w' = w$ è però quello che permette il prelievo meno frequente di valori della $f(t)$, ma per converso è quello che offre coincidenze meno frequenti tra lo sviluppo e la funzione sviluppata (cfr. nota (4) al par. 2).

Paragrafo 5°

Partendo dalla formula $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\frac{\sin 2\pi w(t-\tau)}{\pi(t-\tau)}\, d\tau$ e con le stesse ipotesi di cui al paragrafo 4° si può mostrare come la formula di Shannon (sviluppo di Shannon) uguagli effettivamente una funzione $\varphi(t)$ tale che:

$$2w \int_0^{1/2w} \varphi(\tau - t)\, d\tau = f(t) \; .$$

Infatti

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \frac{\sin 2\pi w (t-\tau)}{\pi (t-\tau)}\, d\tau = \Sigma_n \int_{n\lambda}^{(n+1)\lambda} \frac{\sin 2\pi w (t-\tau)}{\pi (t-\tau)} f(\tau)\, d\tau$$

con n intero, λ finito e costante; ma

$$\int_{n\lambda}^{(n+1)\lambda} \frac{\sin 2\pi w (t-\tau)}{\pi (t-\tau)} f(\tau)\, d\tau = \int_0^{\lambda} \frac{\sin 2\pi w (t-\tau-n\lambda)}{\pi (t-\tau-n\lambda)} f(\tau + n\lambda)\, d\tau$$

per cui

$$f(t) = \Sigma_n \int_0^{\lambda} \frac{\sin 2\pi w (t-\tau-n\lambda)}{\pi (t-\tau-n\lambda)} f(\tau + n\lambda)\, d\tau$$

Osserviamo che per $\lambda = 1/2\, w$, la $\Sigma_n \dfrac{\sin 2\pi w (t-\tau n\lambda)}{\pi (t-\tau-n\lambda)} f(\tau + n\lambda)$ per il teorema di Shannon, è certamente convergente in m. q. completamente verso $2\, w\, f(t-\tau)$ e quindi, ammessa la permutabilità degli operatori Σ e nel nostro caso, cioè che $\Sigma \cdot \int = \int \cdot \Sigma$ potremo scrivere

$$\Sigma_n \int_0^{\lambda} \frac{\sin 2\pi w (t-\tau-n\lambda)}{\pi (t-\tau-n\lambda)} f(\tau - n)\, d\tau =$$

$$= \int_0^{\lambda} \left| \Sigma_n \frac{\sin 2\pi w (t-\tau-n\lambda)}{\pi (t-\tau-n\lambda)} f(\tau - n\lambda) \right| d\tau$$

e quindi

$$f(t) \simeq \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(t-\tau)\, d\tau$$

Appare ovvio che quest'ultima è una formulazione asintotica della nota formula del valor medio.

È chiaro che la sommatoria in discorso eguaglia allora l'altra funzione $\frac{1}{\lambda}\varphi(\tau-t)$ tale che

$$\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \varphi(t-\tau)\,d\tau = f(t) \text{ con } \lambda = 1/2w\ ;$$

da ciò possiamo dedurre che lo sviluppo di Shannon eguaglia una funzione $\varphi(t)$ tale che

$$2w\int_0^{1/2w} \varphi(t-\tau)\,d\tau = f(t)$$

Paragrafo 6°

Cerchiamo ora d'invertire l'integrale $\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \varphi(t-\tau)\,d\tau = f(t)$ dove con λ si indica $1/2w$.

Con un cambiamento di origine, si può passare alla:

$$f(t) = \frac{1}{\lambda}\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} \varphi\left(t-\tau+\frac{\lambda}{2}\right)d\tau$$

e ponendo $\lambda = 2\alpha$ si ottiene:

$$f(t) = \frac{1}{2\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(t-\tau+\alpha)\,d\tau = \frac{1}{2\alpha}\int_0^{2\alpha} \varphi(t-\tau)\,d\tau$$

Da quest'ultime cercheremo di operare l'inversione dello integrale per due vie:

$$1)\ f(t) = \frac{1}{2\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} r(\tau;-\alpha,\alpha)\,\varphi(t-\tau+\alpha)\,d\tau$$

dove

$$r(\tau;\, -\alpha, \alpha) = \begin{cases} 1 & \text{per } \tau \text{ interno a } (-\alpha, \alpha) \\ 0 & \text{» » esterno « »} \end{cases}$$

e quindi $F\{f(t)\} = \dfrac{1}{2\alpha}\,\dfrac{2\sin\omega\alpha}{\omega}\,\Phi(\omega)\,e^{j\omega\alpha} = \dfrac{\sin\omega\alpha}{\omega\alpha}\,\Phi(\omega)\,e^{j\omega\alpha}$,

dove. $\Phi(\omega) = F\{\varphi(t)\}$ (9). Indicando con $F(\omega)$ la $F\{f(t)\}$ si ottiene:

$$\Phi(\omega) = F(\omega)\,\frac{\omega\alpha}{\sin\omega\alpha}\,e^{-j\omega\alpha} \quad \text{da cui } F^{-1}\{\Phi(\omega)\} = \varphi(t) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi w}^{2\pi w} F(\omega)\,\frac{\omega\alpha}{\sin\omega\alpha}\,e^{-j\omega\alpha}\,e^{j\omega t}\,d\omega$$

a causa della natura $F(\omega)$ (limitata cioè all'intervallo $-2\pi w$, $2\pi w$) e ricordando che $2\alpha = \dfrac{1}{2w}$ si ha in definitiva:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2\alpha}^{\pi/2\alpha} F(\omega)\,\frac{\omega\alpha}{\sin\omega\alpha}\,e^{-j\omega\alpha}\,e^{j\omega t}\,d\omega \qquad [1]$$

Notando che $\dfrac{\omega\alpha}{\sin\omega\alpha}$ è finita nell'intervallo $(-\pi/2\alpha.\ \pi/2\alpha)$ si conclude che l'integrale a secondo membro della [1] è proprio.

$$\text{I)} \qquad f(t) = \frac{1}{2\alpha}\int_0^{2\alpha} \varphi(t-\tau)\,d\tau$$

$$f'_1(t) = \frac{1}{2\alpha}\int_\alpha^{2\alpha} \varphi_1(t-\tau)\,d\tau$$

$$\vdots$$

$$f_1^{(n)}(t) = \frac{1}{2\alpha}\int_0^{2\alpha} \varphi_1^{(n)}(t-\tau)\,d\tau\ .$$

---

(9) In questa analisi si sono adottate le formule generiche di trasformazione

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\,e^{j\omega}\,d\omega\ ;\quad G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,e^{-j\omega t}\,dt\ ,$$

come si usa spesso nelle trattazioni sui filtri elettrici.

Ma fintanto che

$$\varphi_t^{(n)}(t-\tau) = -\varphi_\tau^{(n)}(t-\tau)$$

e quindi ammesso che $f(t)$ sia sviluppabile in serie di potenze intere nell'intorno di $t = o$, si ha

$$f(t) = \Sigma_n f^{(n)}(o)\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{2\alpha}\int_o^{2\alpha}\varphi(t-\tau)\,d\tau - \frac{1}{2\alpha}\sum_1^\infty{}_n\frac{t^n}{n!}\int_o^{2\alpha}\varphi_\tau^{(n)}(-\tau)\,d\tau$$

Tenendo ora conto che

$$\int_o^{2\alpha}\varphi^{(n)}(-\tau)\,d\tau = [\varphi^{(n-1)}(-\tau)]_o^{2\alpha}$$

avremo

$$f(t) = \frac{1}{2\alpha}\int_o^{2\alpha}\varphi(-\tau)\,d\tau - \frac{1}{2\alpha}\left\{[\varphi(-\tau)]_o^{2\alpha}\cdot t + \ldots + [\varphi^{(n-1)}(-\tau)]_o^{2\alpha}\frac{t^n}{n!} + \ldots\right\}$$

e derivando $f(t)$ rispetto a t otterremo:

$$f'(t) = \frac{1}{2\alpha}\left\{\varphi(2\alpha) + \ldots\ldots + \varphi^{(n-1)}(2\alpha)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots\right\} +$$

$$-\frac{1}{2\alpha}\left\{\varphi(o) + \ldots\ldots + \varphi^{(n-1)}(o)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots\right\}$$

Ossia, ammesso che $\varphi(t)$ sia sviluppabile in serie di potenze intere negli intorni di 0 e di 2α, risulterebbe

$$f'(t) = \frac{1}{2\alpha}\varphi(t+2\alpha) - \frac{1}{2\alpha}\varphi(t)$$

Prendendo la trasformata di Fourier di quest'ultima relazione si ottiene:

$$F\{f'(t)\} = j\omega F(\omega) = \Phi(\omega)\frac{e^{2j\omega\alpha}}{2\alpha} - \Phi(\omega)\frac{1}{2\alpha} = \Phi(\omega)\frac{e^{j\omega\alpha} - e^{-j\omega\alpha}}{2\alpha}\cdot e^{j\omega\alpha}$$

con $\Phi(\omega) = F\{\varphi(t)\}$, da cui: $\Phi(\omega) = F(\omega)\dfrac{\omega\alpha}{\sin\omega\alpha}e^{-j\omega\alpha}$

e quindi

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2\alpha}^{\pi/2\alpha} F(\omega) \frac{\omega\,\alpha}{\sin \omega\,\alpha}\, e^{-j\omega\alpha}\, e^{j\omega t}\, d\,\omega$$

Ammesso dunque che $f(t)$ sia tale da permettere tutti i passaggi fin qui usati, saremo ora in grado di dare una espressione formale dell'errore ε inerente all'uso della formula di Shannon e cioè:

$$\varepsilon = f(t) - \varphi(t) = f(t) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2\alpha}^{\pi/2\alpha} F(\omega) \frac{\omega\,\alpha}{\sin \omega\,\alpha}\, e^{-j\omega\alpha}\, e^{j\omega t}\, d\,\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2\alpha}^{\pi/2\alpha} F(\omega) \left(1 - \frac{\omega\,\alpha\, e^{-j\omega\alpha}}{\sin \omega\,\alpha}\right) e^{i\alpha t}\, d\,\omega$$

ovvero, se ci riferiamo alle notazioni usate nel teorema di Shannon:

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi w}^{2\pi w} F(\omega) \left(1 - \frac{\omega/4\,w\, e^{-i\omega/4w}}{\sin \omega/4}\right) e^{i\omega t}\, d\,\omega \ .$$

RIASSUNTO

Vengono messi in evidenza i fondamenti del teorema di Shannon, dopo aver stabilito una proprietà relativa alla trasformata di Fourier di funzioni il cui spettro risulti limitato. Viene pure ricercata una espressione formale dell'errore inerente allo sviluppo, limitata però dalla validità dei passaggi usati. Tanto la proprietà esposta al par. 4, quanto la dimostrazione del teorema di Shannon data al par. 3 e le successive elaborazioni risulterebbero nuove.

SUMMARY

The well-known formula of this theorem is demonstrated as a case of complete convergency of a generalized Fourier's expansion, with the aid of a theorem which is proved in section 4. An expression of the inherent error is given in section 6, provided that the hypothesis formulated therein are accomplished. The arguments of sections 3, 4 etc. (so far as the author is aware) seem to have not been treated till now.