

OBERFLÄCHENWELLEN IN ENERGIEVERZEHRENDEN MEDIEN

E. HARDTWIG

Bei der Behandlung von Deformationsvorgängen im Erdinnern, insbesondere bei der Untersuchung von Wellenvorgängen pflegt man eine Reihe von Annahmen zu machen, von denen man weiss, dass sie nicht, oder nicht streng, zutreffen, die man aber trotzdem macht, um zumindest *grundsätzliche* Erkenntnisse über die Vorgänge im Erdinnern und an der Erdoberfläche zu gewinnen.

Zu diesen Annahmen gehört auch die von der Vollelastizität des Erdkörpers, den man sich — schichtungsfrei — einen Halbraum erfüllend denkt. Zweifellos trifft die Annahme von der Vollelastizität des Erdkörpers nicht zu, auch wenn sich die Erde als Ganzes gegenüber so kurzperiodischen Vorgängen wie Erdbebenwellen und Gezeiten härter und elastischer als Stahl verhält.

Erscheinungen wie Absorption und Extinktion von Erdbebenwellen und ihre Formänderung während des Ausbreitungsvorganges sind nicht verträglich mit der Vorstellung einer vollelastischen Erde. Mit andern Worten: man wird den Beobachtungen nicht oder doch nur qualitativ gerecht, wenn man als Medium Erde ein vollelastisches Medium annimmt (davon, dass die Vielschichtigkeit des Erdaufbaues noch zusätzliche Erscheinungen hervorruft, wird hier abgesehen). Die Frage ist nur, was man an Stelle des elastischen Mediums setzen soll. Der einzig gangbare Weg, der sich zur Beantwortung dieser Frage darbietet, dürfte der indirekte Weg des sukzessiven Probierens sein: aus immer neuen Ansätzen für die das Deformationsgeschehen beschreibenden Differentialgleichung müssten Folgerungen gezogen werden, deren Übereinstimmung mit der Erfahrung immer wieder zu überprüfen wäre. Jener Ansatz, der zu Ergebnissen führt, die mit der Erfahrung auch quantitativ übereinstimmen, verdient dann den Vorzug vor den übrigen. Umgekehrt kann ein Ansatz, der grundlegenden

Erfahrungstatsachen nicht nur nicht gerecht wird sondern ihnen sogar widerspricht als unbrauchbar verworfen werden.

Die Metallkunde sieht sich vor ähnlichen Problemen. Die Anzahl der in der Technik benutzten Werkstoffe ist gross, allen aber ist gemeinsam, dass sie nicht vollelastisch sind, dass in ihnen sich abspielende mechanische Vorgänge durch die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie nur annähernd beschrieben werden. Von hier aus ergab sich die Notwendigkeit, nach immer neuen Ansätzen für die Bewegungsgleichungen zu suchen und ihre Lösungen mit der Erfahrung zu vergleichen. Leider stehen in der Seismik weitaus nicht so viele Möglichkeiten zur Verfügung wie in der Technologie der Werkstoffe. Genauer gesagt: bisher sind eigentlich nur zwei, drei Versuche in dieser Richtung unternommen worden und auch hier fehlt es an systematischen Untersuchungen über das Verhältnis zur Erfahrung. Ganz abgesehen davon aber scheint immer noch eine gewisse Unklarheit in Begriffsbildung und Terminologie zu herrschen, sodass wichtige Begriffe wie « innere Reibung », « Viskosität », « Plastizität » u.s.f. nicht immer in gleichem oder auch nur eindeutigem Sinne verstanden werden.

Es mag daher ganz nützlich sein, die Grundbegriffe noch einmal kurz durchzusprechen. Dies soll in den folgenden ersten Abschnitten geschehen. Die Hauptaufgabe, die wir uns hier stellen besteht jedoch in der Untersuchung der wichtigsten Beispiele nicht vollelastischer Medien auf ihr Verhalten hinsichtlich der Oberflächenwellen hin. Soweit dabei schon bekannte Ergebnisse zum Vorschein kommen, erscheinen sie unter neuem und allgemeinerem Gesichtspunkt.

I.

I. Den Angelpunkt bildet immer die Beziehung zwischen Kraft und zugehöriger Veränderung, also, anschaulicher gesprochen, zwischen Spannung und Deformation. Man weiss, dass das Hookesche Gesetz innerhalb bestimmter Grenzen eine Linearbeziehung, also eine Proportionalität zwischen Zug und Dehnung ausspricht — das einfachste Beispiel für die Beziehung Spannung-Deformation. Es ist Ausdruck der Vollelastizität, denn mit dem Aufhören der Kraft hört auch die Deformation auf — elastische Nachwirkung, Fliessen, langsames Abklingen der Deformation kennt das Hooke'sche Gesetz nicht.

Für das Weitere führen wir den Spannungstensor p_{ik} und den Deformationstensor e_{ik} ein, letzteren vermöge

$$\left. \begin{aligned} e_{ik} &= \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \sum \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \quad i, k = 1, 2, 3 \\ e_{ii} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \sum \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)^2 \right\} \quad i \neq k \end{aligned} \right\} [1]$$

x_1, x_2, x_3 rechtwinklige, kartesische Koordinaten.

u_1, u_2, u_3 elastische Verrückungen.

Auf systematische Hoch- und Tiefstellung der Indizes wird verzichtet, da der Bereich rechtwinkliger, kartesischer Koordinaten nicht verlassen wird.

Wir bleiben im Rahmen des Hooke'schen Gesetzes, wenn wir für die Scherungskräfte

$$p_{ik} = \mu e_{ik} \quad i, k = 1, 2, 3, \quad i \neq k \quad [2]$$

ansetzen. Die drei weiteren Gleichungen

$$p_{ii} = \lambda \theta + 2 \mu e_{ii} \quad i = 1, 2, 3 \quad [3]$$

mit

$$\theta = e_{11} + e_{22} + e_{33} \quad [4]$$

und den Lamé'schen Konstanten λ, μ stellen zwar auch lineare Beziehungen zwischen Spannung und Verformung her, gehen aber über die Aussage des Hooke'schen Gesetzes bereits etwas hinaus. Die *Linearität* der Beziehungen kann noch als Ausdruck des Hooke'schen Gesetzes angesehen werden, ihre *Form* aber ist durch die Forderung nach Drehinvarianz bestimmt.

Die Forderung nach Linearität der Beziehungen $p_{ik} = p_{ik}(e_{11}, e_{12}, e_{33})$, stellt eine gewisse Konzession an die Mathematik dar, eine weitere wird dadurch eingeführt, dass die e_{ik} selbst als linear in den Ableitungen angesehen werden, dass man also in [1] die Glieder zweiter Ordnung neben jenen erster Ordnung vernachlässigt.

Man erkennt, worin eine *strenge* Behandlung des Deformationsproblems bestehen müsste: man müsste das sehr komplizierte, nichtlineare System der Impulsgleichungen integrieren.

Die Spannungs-Deformationsbeziehungen [2], [3] lassen sich umkehren. Da die drei Gleichungen [3] die Form haben

$$p_{11} = (\lambda + 2\mu)e_{11} + \lambda e_{22} + \lambda e_{33}$$

$$p_{22} = \lambda e_{11} + (\lambda + 2\mu)e_{22} + \lambda e_{33}$$

$$p_{33} = \lambda e_{11} + \lambda e_{22} + (\lambda + 2\mu)e_{33}$$

und die Determinante Δ nicht verschwindet, gilt

$$\left. \begin{aligned} e_{ik} &= \frac{\Delta}{\mu} p_{ik} & i \neq k; i, k = 1, 2, 3, \\ e_{ii} &= \frac{2\mu}{\Delta} [(2\lambda + 3\mu)p_{ii} - \lambda P] \\ \text{mit } P &= p_{11} + p_{22} + p_{33}. \end{aligned} \right\} [5]$$

Diese Beziehungen nun sind es, die Gegenstand der Verallgemeinerung waren mit dem Ziel, auch das, was mit « innerer Reihung » und « Viskosität » bezeichnet wird, mit zu erfassen. Genauer gesagt, sind die drei ersten dieser Beziehungen, die die Kopplung von Tangentialspannung und Scherung aussprechen. Ausgangspunkt für die Verallgemeinerung.

2. J. C. Maxwell ⁽¹⁾ setzt

$$s = \frac{F}{\mu} + \frac{1}{\mu\tau} \int_0^t F \cdot dt, \quad [6]$$

wo s und F Deformation und Tangentialspannung, und τ eine Materialkonstante von der Dimension einer Zeit bedeutet. Die Beziehung will zum Ausdruck bringen, dass die durch die Scherungskraft F hervorgerufene Verrückung s das Ergebnis der Superposition zweier Arten von Verrückungen ist: die eine, F/μ , erfolgt nach dem Hooke'schen

Gesetz, die zweite, $\frac{1}{\mu\tau} \int_0^t F \cdot dt$ lagert sich, im Laufe der Zeit anwachsend, darüber. Hört die Kraft F plötzlich auf, so verschwindet der erste Summand, nicht aber der zweite, der nun eine dauernde Veränderung im Medium beschreibt ⁽²⁾.

Er gibt die Grösse des « plastischen Flusses » wieder. Ersichtlich kann ein Gesetz der Form [6] nur gelten, wenn die Elastizitätsgrenze überschritten ist. Solange man unter ihr bleibt, gilt die Linearität des Hooke'schen Gesetzes.

Die Grösse $\nu = \mu \tau$ heisst *Viskositätskoeffizient*, hat die Dimension $\text{dyn sec/cm}^2 = \text{gr/cm sec}$ und wird in Poisen gemessen. Die Grösse τ , die *Relaxationszeit*, wird üblicherweise in Sekunden angegeben. Um eine Vorstellung von der Grössenordnung des Viskositätskoeffizienten und der Relaxationszeit zu geben, mögen einige, von B. Gutenberg (3) angeführten Zahlen in Erinnerung gebracht werden:

	ν	τ
Eis	10^{13}	500
Steinsalz von 18°C	10^{18}	10^7
Steinsalz von 80°C	10^{17}	10^6
Solenhofner Schiefer	10^{21}	10^{10}

Naturgemäss handelt es sich bei ν und τ nicht um echte Konstanten sondern um Grössen, die von verschiedenen Umständen, wie Temperatur und Druck abhängen. Insbesondere ändert sich die Relaxationszeit je nach Art der Beanspruchung — sie ist kleiner bei kurzperiodischer Beanspruchung des Materials und grösser bei langperiodischer.

Auf die drei ersten Gleichungen [5] angewandt, hätte man also nach Maxwell

$$e_{ik} = \frac{1}{\mu} p_{ik} + \frac{1}{\mu \tau} \int_0^t p_{ik} \cdot dt \quad i \neq k \quad [7]$$

zu setzen und, nach sinngemässer Verallgemeinerung auf die restlichen drei Gleichungen von [5]

$$e_{ii} = \frac{2\mu}{\Delta} [(2\lambda + 3\mu)p_{ii} - \lambda P] + \frac{2}{\tau \Delta} \int_0^t [(2\lambda + 3\mu)p_{ii} - \lambda P] \cdot dt$$

$$i = 1, 2, 3. \quad [8]$$

Soweit die neuen Beziehungen zwischen Deformation und Spannung. Zur Umkehrung — wir behandeln der Einfachheit halber nur

die drei Gleichungen [7] weiter — wird nach t differenziert:

$$\frac{\partial r_{ik}}{\partial t} + \frac{1}{\tau} p_{ik} = \mu \frac{\partial e_{ik}}{\partial t}.$$

Nach einigen Umformungen erhält man daraus

$$p_{ik} = \mu e^{-\frac{t}{\tau}} \left\{ e^{+\frac{t}{\tau}} e_{ik} - \frac{1}{\tau} \int_0^t e_{ik} e^{+\frac{t}{\tau}} dt + c \right\}.$$

Die Integrationskonstante c bestimmt sich aus der Forderung, dass für $t = 0$ die Anfangsspannung gleich p_{ik}^0 sei. Man findet so

$$p_{ik} = \mu e_{ik} - \frac{\mu}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \int_0^t e_{ik} \cdot e^{+\frac{t}{\tau}} dt + p_{ik}^0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad i \neq k, \quad [9]$$

Entsprechende, aber kompliziertere Formeln lände man für die p_{ii} . Die Bedeutung der Konstanten wird jetzt ersichtlich: hält man die Deformation auf einem konstanten Wert fest, so bleibt allein

$$p_{ik} = p_{ik}^0 e^{-t/\tau} \quad [10]$$

d. h. die Anfangsspannung klingt exponentiell ab, sie erreicht nach $t = \tau$ Sekunden $1/e$ ihres ursprünglichen Wertes. Daraus folgt die Definition der Relaxationszeit. Es wird aber auch deutlich, warum sie keine echte Konstante sein kann: wird das Material kurzperiodisch beansprucht, so haben die Moleküle nicht Zeit, ihre Lagen *dauernd* zu verändern, während dies bei langperiodischer Beanspruchung sehr wohl der Fall sein kann.

Der Maxwell'sche Viskositätsansatz führt auf Ausdrücke für die Spannungskomponenten p_{ik} , die mathematische Schwierigkeiten nach sich ziehen. Bekanntlich müssen die p_{ik} in das System

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{13}}{\partial x_3} \quad [11]$$

eingetragen werden, aus dem dann die Verrückungen u_1, u_2, u_3 zu berechnen sind. Eine systematische Behandlung von Wellenproblemen auf Grund des Maxwell'schen Ansatzes scheidet an den Integra-

tionschwierigkeiten dieses Systems 11). Dies mag der Grund dafür sein, dass der so einleuchtende Maxwell'schen Ansatz für die Beziehung Spannung-Deformation in der Literatur bisher kaum Berücksichtigung gefunden hat.

3. Vom praktischen Standpunkt aus wesentlich günstiger ist ein Ansatz, auf den *J. Larmor* und *H. Jeffreys* hingewiesen haben (4). Er hat die Form

$$s = \frac{F}{\mu} - \tau \frac{\partial s}{\partial t}, \quad [12]$$

wo s wieder die Scherung, F die Tangentialkraft bedeutet.

Danach wird die elastische Verrückung F/μ verringert um einen Betrag, der der Geschwindigkeit der Verrückung proportional ist.

Der gegen die Verrückung F/μ gerichtete Widerstand $\tau \frac{\partial s}{\partial t}$ heisst die *innere Reibung des Körpers*, die Grösse $\eta = \mu\tau$ der *Koeffizient der inneren Reibung*. Hört die Scherungskraft F auf, geht also die rein elastische Verrückung F/μ zurück, so bleibt $\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{1}{\tau} s = 0$, was auf $s = s_0 e^{-t/\tau}$ führt: die Verrückung geht exponentiell auf Null zurück. Demnach ist τ die Zeit, in der die Verrückung (im Maxwell'schen Ansatz war es die Spannung) auf $1/e$ ihres Anfangswertes absinkt (Relaxationszeit).

Grössenordnungsmässig findet *P. Caloi* a.a.O. für die Erdkruste $\eta \sim 10^{10}$ Poise und $\tau \sim 2 \cdot 10^{-2}$ sec.

Wir wenden den Ansatz [12] wieder auf die drei ersten, die Scherung betreffenden Gleichungen [5] an und finden

$$e_{ik} = \frac{p_{ik}}{\mu} - \tau \frac{\partial e_{ik}}{\partial t}, \quad i \neq k \quad [13]$$

oder

$$\frac{\partial e_{ik}}{\partial t} + \frac{1}{\tau} e_{ik} = \frac{1}{\eta} p_{ik}, \quad i \neq k \quad [14]$$

woraus

$$e_{ik} = \frac{p_{ik}}{\mu} - \frac{1}{\mu} e^{-\frac{t}{\tau}} \int_0^t e^{+\frac{t}{\tau}} \cdot \frac{\partial p_{ik}}{\partial t} dt + e^{\circ}_{ik} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad [15]$$

folgt. Im Gegensatz zu früher bedarf es aber hier der Umkehrung der Definitionsgleichungen nicht, da durch [13] ohnehin schon die Tangentialspannungen als Funktion der Deformationen dargestellt sind:

$$p_{ik} = \mu e_{ik} + \eta \frac{\partial e_{ik}}{\partial t}, \quad i \neq k. \quad [16]$$

In sinngemässer Übertragung des für die Tangentialspannungen eingeführten Ansatzes [12] auf die Normalspannungen (Druckkräfte) erweitert man nun die drei letzten Beziehungen [3] auf

$$p_{ik} = \lambda \theta + 2 \mu e_{ii} + \tau \lambda \frac{\partial \theta}{\partial t} + 2 \mu \tau \frac{\partial e_{ii}}{\partial t}, \quad i, k = 1, 2, 3, \quad [17]$$

oder, wenn man kurz $\tau \lambda = \lambda'$ und $\tau \mu = \mu'$ setzt und als zeitunabhängig ansieht,

$$p_{ii} = \lambda \theta + 2 \mu e_{ii} + \frac{\partial}{\partial t} (\lambda' \theta + 2 \mu' e_{ii}) \quad i, k = 1, 2, 3. \quad [18]$$

Man sieht sofort, dass die Substitution dieser Ausdrücke für die p_{ik} in die Impulsgleichungen [11] auf keine grösseren Schwierigkeiten führt. Das Ergebnis der Substitution ist nämlich das System von Differentialgleichungen

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \mu \Delta u_i + (\lambda' + \mu') \frac{\partial^2 \theta}{\partial t \partial x_i} + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \Delta u_i \quad [19]$$

$$i = 1, 2, 3$$

von dem ohne weiteres ersichtlich ist, dass sich seine Integration auf dem üblichen Wege ausführen lässt.

Der die innere Reibung berücksichtigende Ansatz [12] von *Larmor-Jeffreys* führt mithin auf jene Differentialgleichungen, die bereits von *W. Voigt* ⁽⁵⁾ und *G. H. C. Thompson* ⁽⁶⁾ zur Beschreibung der Deformationen nicht voll-elastischer Körper vorgeschlagen worden sind und die in der Folge von verschiedenen Autoren, wie *Sezawa*, *Caloi* und *Hardtwig* behandelt wurden.

Die zu dem Ansatz gehörige Wellengleichung findet sich übrigens bereits bei *Stokes* ⁽⁷⁾.

Die Ansätze [16] und [18] für die p_{ik} kann man auch auf rein formalem Wege finden. Man kann nämlich verlangen, dass die Span-

nungskomponenten Funktionen nicht allein der Deformationen, sondern auch der Deformationsgeschwindigkeiten sind entsprechend

$$p_{ik} = p_{ik}(e_{11}, e_{12}, \dots, \dot{e}_{11}, \dot{e}_{12}, \dots, \dot{e}_{33}), \quad i, k = 1, 2, 3.$$

und kann die Taylor'sche Reihenentwicklung bei entsprechender Kleinheit der e_{ik} und \dot{e}_{ik} nach den Gliedern I. Ordnung abbrechen. Die Anzahl der übrigbleibenden Konstanten wird allerdings aus der an das elastische Potential zu richtenden Invarianzforderung gegenüber Drehungen abgeleitet.

4. Die Formel [12], in der die Deformation dargestellt wird als eine rein elastische Teilchenverschiebung F/μ , der eine geschwindigkeitsproportionale, auf innere Reibung zurückzuführende Verschiebung $\tau \partial s / \partial t$ entgegenwirkt, legt einen anderen Gedanken nahe.

Die Impulsgleichungen sagen aus, dass während der Bewegung in jedem Augenblick der Trägheitskraft $\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$ vom Spannungsgradienten das Gleichgewicht gehalten wird. Man kann sich nun vorstellen, dass in einem Medium die innere, ebenfalls geschwindigkeitsproportionale Reibungskraft, etwa $2\nu \frac{\partial u_i}{\partial t}$ sich der Wirkung der Spannungen entgegenstellt. In diesem Falle wäre etwa

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{13}}{\partial x_3} - 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial t}$$

zu setzen. Die Impulsgleichungen würden dann zu

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial t} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \Delta u_i \quad i = 1, 2, 3. \quad [20]$$

und ihre Integration böte ebenfalls keine Schwierigkeiten.

Ein solches « Medium mit Reibung » wurde bereits von B. Galitzin (8) näher untersucht. Da sich aber in der Galitzin'schen Arbeit in mathematischer Hinsicht Unstimmigkeiten befinden, soll im folgenden Teil II die Integration des Systems [20] von etwas verändertem Gesichtspunkt aus wieder aufgenommen und die Brauchbarkeit der Lösungen für seismische Zwecke näher betrachtet werden.

Im Teil III soll dann nochmals auf die Behandlung des Systems [19], also auf die Wellenausbreitung in visko-elastischen, oder, in der Ausdrucksweise von H. Jeffreys, in firmo-elastischen Körpern eingegangen werden.

II.

5. Das einen Halbraum erfüllende Medium werde so auf ein rechtwinkliges, kartesisches Koordinatensystem bezogen, dass die Ebene $z = 0$ die Begrenzungsebene des Mediums bildet. Die positive z -Richtung soll senkrecht nach innen weisen; dann liegen x - und y -Achse in der Oberfläche des Mediums.

Die Koordinaten bezeichnen wir jetzt mit x, y, z , die Verrückungen mit u, v, w . Die Indizierung soll der Unterscheidung von Dilatations — und Scherungswelle vorbehalten bleiben.

Das System [20] schreibt sich dann

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\nu \frac{\partial u}{\partial t} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u \quad [21]$$

mit entsprechenden Gleichungen für v und w .

Das Auftreten der ersten Ableitungen nach der Zeit $2\nu \frac{\partial \dots}{\partial t}$... deutet darauf hin, dass wir es mit einem energieverzehrenden Medium zu tun haben — jede Verrückung wird durch eine Reibungskraft gebremst, die proportional der Geschwindigkeit der Verrückung ist. Man weiss, dass in der Physik geschwindigkeitsproportionale Reibung häufig angenommen wird, obwohl die Erfahrung zeigt, dass die Proportionalität nie streng erfüllt ist. Wenn wir den Ansatz auf die Mechanik der Kontinua übertragen, so machen wir einen Versuch, die Deformationsvorgänge besser zu beschreiben, als dies die rein-elastischen Gleichungen zu tun vermögen. Im weiteren Verlauf zeigt sich, dass dieser Versuch misslingt, zumindest soweit man kurzperiodische Vorgänge im Erdinneren im Auge hat. Den Grund für das Misslingen darf man darin sehen, dass die Vorgänge innerhalb eines elastisch beanspruchten Mediums doch von anderer Art sind als jene, auf die die Differentialgleichungen mit Dämpfungsglied im Allgemeinen angewandt werden.

Gleichgiltig, welche Art von Deformationsvorgängen untersucht wird, müssen die Oberflächenbedingungen erfüllt werden. Wie üblich, verlangen wir freie, d.h. spannungsfreie Oberfläche, also

$$P_{13} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0, \quad P_{23} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \quad [22]$$

$$P_{33} = \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

für $z = 0$.

Die Dichte ρ wird als konstant angenommen.

Zur Integration des Systems [21] spalten wir den Verrückungsvektor \vec{s} (u, v, w) additiv in zwei Teilvektoren \vec{s}_1 (u_1, v_1, w_1) und \vec{s}_2 (u_2, v_2, w_2), entsprechend

$$\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 \tag{23}$$

mit

$$\vec{s}_1 = \begin{cases} u_1 = a_1 e^{\sigma_1} \\ v_1 = a_2 e^{\sigma_1} \\ w_1 = b_3 e^{\sigma_1} \end{cases}, \quad \vec{s}_2 = \begin{cases} u_2 = b_1 e^{\sigma_2} \\ v_2 = b_2 e^{\sigma_2} \\ w_2 = b_{\dots} e^{\sigma_2} \end{cases} \tag{24}$$

wo

$$\sigma_\alpha = f_\alpha x + g_\alpha y + h_\alpha z + \omega_\alpha t, \quad \alpha = 1, 2. \tag{25}$$

Die auftretenden Parameter $f_\alpha, g_\alpha, h_\alpha, \omega_\alpha, a_\alpha, b_\alpha$ sollen komplexe Konstanten sein. Physikalisch bedeutet die Aufspaltung eine Zerlegung des Vektorfeldes in zwei Summanden, deren jeder für sich eine Elementarschwingung mit komplexem Ausbreitungsvektor darstellt.

Wir verlangen von \vec{s}_1 und \vec{s}_2 speziell

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{s}_1 = 0, \quad \operatorname{div} \vec{s}_2 = 0, \quad \vec{s}_2 = \operatorname{rot} a \\ \vec{s}_1 = \operatorname{grad} \Phi_1, \quad (\operatorname{div} a \text{ verfügbar, z. B.} = 0) \end{aligned} \tag{26}$$

d. h. wir spalten das Verschiebungsfeld auf in einen wirbelfreien [s_1] und einen quellenfreien [s_2] Anteil, womit wir uns, zusammen mit dem complexen Charakter der auftretenden Parameter, grösste Allgemeinheit der Partikularlösungen von [21] sichern.

Das System [21] wird dann durch die *speziellen Annahmen*

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + 2\nu \frac{\partial u_1}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \Delta u_1 \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \tag{27a}$$

und

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + 2\nu \frac{\partial u_2}{\partial t} = \mu \Delta u_2 \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \tag{27b}$$

sicher befriedigt. Zwischen den Komponenten der Verrückungen müssen wegen [26] die Beziehungen bestehen

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0, \quad [28]$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0. \quad [29]$$

Wegen [24] und [25] hat die durch [28] ausgedrückte Wirbelfreiheit des Feldes s_1 drei Bindungen unter den Konstanten zur Folge:

$$\begin{aligned} & * -a_2 h_1 + a_3 g_1 = 0 \\ & a_1 h_1 \quad * -a_3 f_1 = 0 \\ & -a_1 g_1 + a_2 f_1 \quad * = 0. \end{aligned}$$

Man kann diese drei Gleichungen als Linearsystem für a_1, a_2, a_3 auffassen und findet, da die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -h_1 & g_1 \\ h_1 & 0 & -f_1 \\ -g_1 & f_1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ausfällt,

$$a_1 = c f_1, \quad a_2 = c g_1, \quad a_3 = c h_1 \quad [30]$$

c willkürliche, komplexe Konstante.

Die Bedingung [29] der Quellenfreiheit des Feldes s_2 liefert, zusammen mit [24] und [25]

$$f_2 b_1 + g_2 b_2 + h_2 b_3 = 0. \quad [31]$$

Diese Gleichung reicht zur eindeutigen Bestimmung von b_1, b_2, b_3 nicht aus. Unter Verwendung dreier willkürlicher Konstanten c_1, c_2, c_3 kann man aber die allgemeinste Form der Lösung für die b_i angeben. Sie folgt aus

$$\begin{vmatrix} f_2 & g_2 & h_2 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = f_2(g_2 c_3 - h_2 c_2) - g_2(f_2 c_3 - h_2 c_1) + h_2(f_2 c_2 - g_2 c_1) = 0$$

und sieht so aus:

$$\begin{aligned} b_1 &= c_3 g_2 - c_2 h_2 \\ b_2 &= c_1 h_2 - c_3 f_2 \\ b_3 &= c_2 f_2 - c_1 g_1 \end{aligned} \quad [32]$$

Im folgenden werden jedoch diese Ausdrücke für die Koeffizienten b_i nicht verwendet, wir ziehen es vor, die b_i aus den Oberflächenbedingungen zu berechnen. Die Bedingung [29] bleibt dadurch unbenutzt und muss später berücksichtigt werden.

Zusammenfassend kann man bis jetzt sagen: Im Ansatz

$$\begin{aligned} u &= a_1 e^{\sigma_1} + b_1 e^{\sigma_2} \\ v &= a_2 e^{\sigma_1} + b_2 e^{\sigma_2} \\ w &= a_3 e^{\sigma_1} + b_3 e^{\sigma_2} \end{aligned} \quad [33]$$

für die (partikuläre) Lösung des Systems [21] ist die Aufspaltung des Verschiebungsvektors \vec{s} in einen wirbelfreien Anteil s_1 und einen quellfreien s_2 enthalten (Dilations — und Scherungswellen). In ihm sind von den 14 complexen Parametern a, b, f, g, h, ω drei, nämlich die a_i , auf die übrigen (nämlich auf f_1, g_1, h_1) zurückgeführt. Es bleiben mithin noch 11 Parameter willkürlich.

6. Um weitere Konstanten festzulegen, ziehen wir die Oberflächenbedingungen [22] heran. Die erste von ihnen lautet mit Rücksicht auf [24]

$$p_{13} = \mu (a_1 h_1 + a_3 f_1) e^{\sigma_1} + (b_1 h_2 + b_3 f_2) e^{\sigma_2} \quad [34]$$

für $z = 0$.

Wir schreiben sie explizit

$$e^{(\omega_1 - \omega_2)t} \left[(f_1 - f_2)x + (g_1 - g_2)y + (\omega_1 - \omega_2)t \right] = - \frac{b_1 h_2 + b_3 f_2}{a_1 h_1 + a_3 f_1} \quad [35]$$

und bemerken, dass die linke Seite eine Funktion von x, y, t die rechte Seite aber eine Konstante ist. Implizit sind in [35] vier Bedingungen enthalten, die wir nacheinander anführen:

1.) $z = 0, y = t = 0$. Aus der dann verbleibenden Gleichung

$$e^{(f_1 - f_2)x} = - \frac{b_1 h_2 + b_3 f_2}{a_1 h_1 + a_3 f_1}$$

wird auf $f_2 = f_1 = f$ geschlossen, da nur auf diese Weise auch die linke Seite zu einer Konstanten wird.

2.) $z = 0, x = t = 0$. Es verbleibt

$$e^{(g_1 - g_2)y} = - \frac{b_1 h_2 + b_3 f_2}{a_1 h_1 + a_3 f_1}$$

woraus auf analoge Weise $g_2 = g_1 = g$ folgt.

3.) $z = 0, x = y = 0$. Die verbleibende Gleichung ist

$$e^{(\omega_1 - \omega_2)t} = - \frac{b_1 h_2 + b_3 f_2}{a_1 h_1 + a_3 f_1}$$

und die Schlussfolgerung $\omega_2 = \omega_1 = \omega$.

4.) In allen drei Fällen ist

$$b_1 h_2 + b_3 f_2 = - (a_1 h_1 + a_3 f_1)$$

(vierte Bedingung). Durch die *eine* Oberflächenbedingung [34] werden mithin drei weitere Parameter (nämlich f_2, g_2, ω_2) auf die übrigen (nämlich $f_1 = f, g_1 = g, \omega_1 = \omega$) zurückgeführt und ausserdem eine zusätzliche Bedingung hergestellt:

$$f_2 = f_1 = f, g_2 = g_1 = g, \omega_2 = \omega_1 = \omega \quad [36]$$

$$b_1 h_2 + b_3 f = - (a_1 h_1 + a_3 f) . \quad [37]$$

Willkürlich bleiben demnach nur mehr $11 - 3 = 8$ Parameter.

Die zweite Oberflächenbedingung [22] liefert im Hinblick auf [36] nur mehr die *eine* Beziehung

$$b_2 h_2 + b_3 g = - (a_2 h_1 + a_3 g) . \quad [38]$$

Die Divergenz θ wird an der Oberfläche $z = 0$ zu

$$\theta_{z=0} = [(a_1 + b_1)f + (a_2 + b_2)g + h_1 a_3 + h_2 b_3] e^t$$

$$\gamma = f x + g y + \omega$$

oder, im Hinblick auf die Quellenfreiheit von s_3 ,

$$\theta_{z=0} = a_1 f + a_2 g + a_3 h_1. \quad [39]$$

Die dritte Oberflächenbedingung lautet daher

$$2 \mu h_2 b_3 + \lambda (a_1 f + a_2 g) + (\lambda + 2 \mu) a_3 h_1 = 0. \quad [40]$$

Sie gestattet die Berechnung von b_3 . Wir substituieren [30] und führen vermöge

$$f^2 + g^2 = m^2 \quad [41]$$

die complexe Grösse m ein. Dann erhalten wir aus [40]

$$b_3 = - \frac{c}{2 \mu h_2} [\lambda m^2 + (\lambda + 2 \mu) h_1^2]. \quad [42]$$

Die heiden Gleichungen [37] und [38] geben b_1 hezw. b_2 :

$$b_1 = \frac{c f}{2 \mu h_2^2} [\lambda m^2 + (\lambda + 2 \mu) h_1^2] - \frac{2 c h_1}{h_2} f, \quad [43]$$

$$b_2 = \frac{c g}{2 \mu h_2^2} [\lambda m^2 + (\lambda + 2 \mu) h_2^2] - \frac{2 c h_1}{h_2} g.$$

Damit sind auch die δ_i auf die übrigen Parameter zurückgeführt, es bleiben deren nur noch $8 - 3 = 5$ willkürlich, nämlich f, g, h_1, h_2, ω . An Bedingungsgleichungen stehen noch zur Verfügung die Divergenzgleichung [29] und die Wellengleichungen [27a] und [27b].

7. Die Divergenzgleichung [29] schreiben wir jetzt in der Form

$$f b_1 + g b_2 + h_2 b_3 = 0 \quad [44]$$

und tragen in sie für die b die Ausdrücke [43] ein. Wir erhalten

$$\left(\frac{c m^2}{2 \mu h_2^2} - \frac{c}{2 \mu} \right) [\lambda m^2 + (\lambda + 2 \mu) h_1^2] - \frac{2 c h_1}{h_2} m^2 = 0$$

oder

$$(n^2 - h_2^2) [\lambda m^2 + (\lambda + 2 \mu) h_1^2] = 4_1 h_1 h_2 m^2. \quad [45]$$

Wir wollen diese Gleichung als « Kopplungsgleichung » bezeichnen. Sie sagt etwas mehr aus als jene, die man aus ihr durch beiderseitiges Quadrieren erhält:

$$(m^2 - h_2^2)^2 [\lambda m^2 + (\lambda + 2\mu) h_1^2]^2 = 16 \mu^2 m^4 h_1^2 h_2^2 . \quad [46]$$

Zur Auswertung der Wellengleichungen [27a], [27b] tragen wir die Ausdrücke [24] für die Verschiebungen ein und erhalten

$$\frac{\rho \omega^2 + 2\nu \omega}{\lambda + 2\mu} = m^2 + h_1^2 , \quad \frac{\rho \omega^2 + 2\nu \omega}{\mu} = m^2 + h_2^2 . \quad [47]$$

Die drei Gleichungen [46], [47] müssen zwischen den fünf complexen Konstanten f , g , h_1 , h_2 , ω bestehen, sodass nur noch 2 Parameter willkürlich bleiben.

Für die weiteren Rechnungen setzen wir

$$f = f' + if'' , \quad g = g' + ig'' , \quad \omega = \varepsilon - ip , \quad (p > 0) \quad [48]$$

und

$$h_1 = -q_1 + ik_1 , \quad h_2 = -q_2 + ik_2 , \quad [49]$$

$$q_1 , q_2 > 0 .$$

Zufolge [41] ist dann

$$m^2 = m'^2 - m''^2 + 2iP$$

mit

$$m'^2 = f'^2 + g'^2 , \quad m''^2 = f''^2 + g''^2 , \quad P = f' f'' + g' g'' . \quad [50]$$

Die aus den Wellengleichungen hervorgehenden Bedingungsgleichungen [47] werden nun zu

$$\frac{1}{\lambda + 2\mu} [\rho(\varepsilon^2 - p^2) - 2i\varepsilon\rho p + 2\nu\varepsilon - 2i\nu p] = m'^2 - m''^2 + 2iP$$

$$+ q_1^2 - k_1^2 - 2iq_1 k_1 ,$$

$$\frac{1}{\mu} [\rho(\varepsilon^2 - p^2) - 2i\varepsilon\rho p + 2\nu\varepsilon - 2i\nu p] = m'^2 - m''^2 + 2iP$$

$$+ q_2^2 - k_2^2 - 2iq_2 k_2 .$$

und lassen sich in Real- und Imaginärteil trennen:

$$\begin{aligned}
 (m_1'^2 + q_1'^2) - (m_1''^2 - k_1'^2) &= \frac{\rho(\varepsilon^2 - p^2) + 2\varepsilon\nu}{\lambda + 2\mu}, \\
 P - q_1 k_1 &= -\frac{\varepsilon P \rho + \nu P}{\lambda + 2\mu}, \\
 (m_2'^2 + q_2'^2) - (m_2''^2 - k_2'^2) &= \frac{\rho(\varepsilon^2 - p^2) + 2\varepsilon\nu}{\mu}, \\
 P - q_2 k_2 &= -\frac{\varepsilon P \rho - \nu P}{\mu}.
 \end{aligned} \tag{51}$$

Die Kopplungsgleichung in ähnlicher Weise aufzuspalten ist nicht zweckmässig. Mit Hilfe der Abkürzungen

$$\rho \omega^2 + 2\nu \omega = X, \quad \lambda + 2\mu = \beta \tag{52}$$

entnehmen wir vielmehr den Gleichungen [47] die Beziehungen

$$h_1'^2 = \frac{X}{\beta} - m^2, \quad h_2'^2 = \frac{X}{\mu} - m^2 \tag{53}$$

und substituieren in [46]:

$$\left(2m^2 - \frac{X}{\mu}\right)^2 (-2\mu m^2 + X) = i\sigma \rho^2 m^2 \left(\frac{X}{\beta} - m^2\right) \left(\frac{X}{\mu} - m^2\right).$$

Nach einer kleinen Umformung und der neuen Substitution

$$\frac{X}{2\mu m^2} = x = \frac{\rho \omega^2 + 2\nu \omega}{2\mu m^2} \tag{54}$$

erhält man aus der Kopplungsgleichung eine algebraische Gleichung 4. Grades in x , die nach Abspalten einer ersten Wurzel $x=0$ in eine cubische übergeht:

$$x^3 - 4x^2 + \frac{2(3\lambda + 4\mu)}{\beta} x - \frac{2(\lambda + \mu)}{\beta} = 0. \tag{55}$$

Es ist die bekannte Rayleigh'sche Gleichung 3. Grades, die im dem oft angenommenen Fall $\lambda = \mu$ zu

$$3x^3 - 12x^2 + 14x - 4 = 0 \tag{56}$$

mit den Wurzeln

$$z_1 = 2, \quad z_2 = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = 1.5773 \dots, \quad z_3 = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = 0.4226 \dots$$

[57]

wird. Die cubische Gleichung [55] stellt also zufolge [54] eine Bindung her zwischen den Grössen ω , ν , m , die zu [51] hinzutritt und ebenfalls in Real- und Imaginärteil aufgespalten werden kann.

In der Partikularlösung

$$\left. \begin{aligned} u &= e^{\sigma'} (a_1 \epsilon^{(-q_1 + ik_1)z} + b_1 \epsilon^{(-q_2 + ik_2)z}) e^{i\sigma''} \\ v &= e^{\sigma'} (a_2 \epsilon^{(-q_1 + ik_1)z} + b_2 \epsilon^{(-q_2 + ik_2)z}) e^{i\sigma''} \\ w &= e^{\sigma'} (a_3 \epsilon^{(-q_1 + ik_1)z} + b_3 \epsilon^{(-q_2 + ik_2)z}) e^{i\sigma''} \\ \sigma' &= f'x + g'y + \varepsilon t, \quad \sigma'' = f''x + g''y - pt \end{aligned} \right\} [58]$$

sind mithin nicht nur für die a_i und b_i die in [30] und [42], [43] gefundenen Ausdrücke zu setzen, sondern es sind auch noch die durch [51] und [54] ausgedrückten Bindungen zwischen den restlichen Konstanten zu berücksichtigen.

8. Bis hierher sind die Rechnungen in voller Allgemeinheit gehalten. Sie gelten — mit entsprechenden Abänderungen — auch für voll- und visko-elastische Medien, soferne als Oberflächenbedingung die Spannungsfreiheit der Oberfläche angesetzt wird. Da Einzelwellen nur in Ausnahmefällen den Oberflächenbedingungen zu genügen vermögen, mussten als Partikularlösungen *Wellenpaare* angenommen werden. Von einer Spezialisierung auf Oberflächenwellen (Rayleigh-Wellen) war bisher nicht die Rede. Hier handelt es sich in erster Linie darum, die Brauchbarkeit des Ansatzes [21] für die Seismik zu erproben. Dazu genügt es, das Verhalten des Mediums hinsichtlich der Oberflächenwellen zu untersuchen. Die Theorie der Wellenpaare, deren Einzelwellen nicht oberflächenparallel sondern ins Innere des Mediums laufen, soll bei anderer Gelegenheit entwickelt werden.

Wir verlangen also, dass das Wellenpaar die Oberfläche $z = 0$ entlang laufe, dass also

$$k_1 = k_2 = 0$$

sei. Das Fortschreiten der Wellen wird in der imaginären e-Potenz angezeigt, während die reellen e-Potenzen die Amplituden als Orts- und Zeitfunktionen, die Wellen also — zumindest dem Anschein nach — als inhomogene Wellen ausweisen.

Mit der Spezialisierung auf Oberflächenwellen werden die Bedingungsleichungen [51] zu

$$\begin{aligned} (m'^2 - m''^2) + q_1^2 &= \frac{\rho(\varepsilon^2 - p^2) + 2\varepsilon\nu}{\lambda + 2\mu}, \\ (m'^2 - m''^2) + q_2^2 &= \frac{\rho(\varepsilon^2 - p^2) + 2\varepsilon\nu}{\mu}, \end{aligned} \tag{59}$$

$$P = -\frac{\nu\rho + \nu}{\lambda + 2\mu} p,$$

$$P = -\frac{\varepsilon\rho + \nu}{\mu} p.$$

Die beiden letzten dieser Bedingungsleichungen sind nur dann mit einander verträglich, wenn gleichzeitig

$$P = f' f'' + g' g'' = 0 \tag{60}$$

und

$$\boxed{\varepsilon = -\frac{\nu}{\rho}} \tag{61}$$

eintritt. Die zeitliche Dämpfung ε wird mithin direkt durch die Reibungskonstante ν/ρ gemessen, wie zu erwarten.

Sie erweist sich als periodenunabhängig. An späterer Stelle soll die Bedeutung dieser Tatsache näher erörtert werden. Aus [60] folgt

$$f' = \alpha g'' \quad , \quad g' = -\alpha f'' \quad , \quad m'^2 = \alpha^2 m''^2 \tag{62}$$

α willkürliche, reelle Konstante.

Da jetzt $m^2 = m'^2 - m''^2 = (\alpha^2 - 1) m''^2$ ausfällt, werden die beiden ersten Gleichungen von [59] zu

$$\begin{aligned} (\alpha^2 - 1) m''^2 + q_1^2 &= \frac{\rho(\varepsilon^2 - p^2) + 2\varepsilon\nu}{\lambda + 2\mu} \\ (\alpha^2 - 1) m''^2 + q_2^2 &= \frac{\rho(\varepsilon^2 - p^2) + 2\varepsilon\nu}{\mu}. \end{aligned} \tag{63}$$

Was die cubische Gleichung [55] anlangt, so soll hier auf ihre Theorie noch nicht eingegangen werden, es genügt zu wissen, dass sie im Bereich der geophysikalisch denkbaren Werte λ , μ neben der ständig reellen Wurzel noch zwei weitere reelle Wurzeln haben kann. In [54] darf daher die linke Seite als eine reelle Grösse angesehen werden. Die Grösse m im Nenner reduziert sich wegen [60] auf $(\alpha^2 - 1) m''^2$, sodass auch der Nenner des Bruches auf der rechten Seite reell anfällt. Der Imaginärteil des Zählers ist $(\varepsilon \rho + \nu) \rho$, verschwindet mithin wegen [61]. Die Gleichung [54] reduziert sich daher auf die Aussage

$$\rho(\varepsilon^2 - p^2) + 2\varepsilon\nu = 2(\alpha^2 - 1)m''^2 \mu \alpha,$$

die aber im Hinblick auf die Bedeutung [61] von ε zu

$$-\left(\rho p^2 + \frac{\nu^2}{\rho}\right) = 2(\alpha^2 - 1)m''^2 \mu \alpha \quad [64]$$

wird. Man kann daraus eine Aussage über die Phasengeschwindigkeit ableiten wie folgt:

$$\begin{aligned} \rho p^2 &= 2\alpha m''^2 \mu (1 - \alpha^2) - \frac{\nu^2}{\rho}, \\ \frac{p^2}{m''^2} &= V^2 = 2\alpha \frac{\mu}{\rho} (1 - \alpha^2) - \frac{\nu^2}{\rho^2 m''^2}. \end{aligned} \quad [65]$$

Es gilt jetzt die Konstante α zu bestimmen. Wir bemerken zunächst, dass im Hinblick auf [30] und [62]

$$a_1 = c(\alpha g'' + i f''), \quad a_2 = c(-\alpha f'' + i g''), \quad a_3 = -c q_1 \quad [66]$$

ausfällt, dass ferner zufolge [42], [43] und [62]

$$b_1 = c(\alpha g'' + i f'') M, \quad b_2 = c(-\alpha f'' + i g'') M, \quad b_3 = \frac{c}{q_2} N$$

mit [67]

$$M = \frac{\lambda(\alpha_2 - 1)m''^2 + (\lambda + 2\mu)q_1^2 - 4\mu q_1 q_2}{2\mu q_2^2}, \quad N = \frac{\lambda(\alpha_2 - 1)m''^2 + (\lambda + 2\mu)q_1^2}{2\mu}$$

wird.

In den Formeln [58] für die Komponenten der elastischen Verschiebung lassen wir die reellen e-Potenzen in ihrer bisherigen Form-

stehen, die imaginären verwandeln wir mit Hilfe der Euler'schen Formel in trigonometrische Funktionen. Dazu setzen wir

$$f'' x + g'' y \pm pt = m'' \left(\frac{f''}{u''} x + \frac{g''}{m''} y \pm \frac{P}{m''} t \right) = m'' (\gamma \pm Vt). \quad [68]$$

Das doppelte Vorzeichen vor V erklärt sich aus [65] und bedeutet das Laufen der Wellen nach *beiden* Richtungen.

Für das folgende sind ferner die Abkürzungen

$$\Gamma_1 = e^{-q_1 z} + M e^{-q_2 z}, \quad \Gamma_2 = -q_1 e^{-q_1 z} + \frac{N}{q_2} e^{-q_2 z} \quad [69]$$

zweckmässig.

Da die complexen Funktionen u, v, w Lösungen des Systems [21] sind, dieses aber linear ist und daher Superposition gestattet, müssen Realteil für sich und Imaginärteil für sich partikuläre Lösungen bilden. Man bekommt

Realteil:

$$\begin{aligned} u &= c \Gamma_1 e^\sigma [\alpha g'' \cos m'' (\gamma \pm Vt) - f'' \sin m'' (\gamma \pm Vt)], \\ v &= c \Gamma_1 e^\sigma [-\alpha f'' \cos m'' (\gamma \pm Vt) - g'' \sin m'' (\gamma \pm Vt)], \\ w &= c \Gamma_2 e^\sigma \cos m'' (\gamma \pm Vt); \end{aligned}$$

Imaginärteil:

[70]

$$\begin{aligned} u &= c \Gamma_1 e^\sigma [f'' \cos m'' (\gamma \pm Vt) + \alpha g'' \sin m'' (\gamma \pm Vt)], \\ v &= c \Gamma_1 e^\sigma [-\alpha f'' \cos m'' (\gamma \pm Vt) - g'' \sin m'' (\gamma \pm Vt)], \\ w &= c \Gamma_2 e^\sigma \sin m'' (\gamma \pm Vt), \end{aligned}$$

$$\sigma = \alpha m'' \left(\frac{g''}{m''} x - \frac{f''}{m''} y \right) - \frac{\nu}{c} t.$$

Die Ausdrücke [58] für die Verschiebungen zeigen, dass die Wellenfront (die Ebene $f''/m'' \cdot x + g''/m'' \cdot y - Vt = 0$) in Richtung des Strahles s fortschreitet, dessen Richtung in der Ebene $z = 0$ durch

$$\frac{f''}{m''} = \cos(sx), \quad \frac{g''}{m''} = \sin(sy)$$

bestimmt ist. Die Front erreicht den Aufpunkt $P(x, y, 0)$ zu jenem Zeitpunkt, für den $\gamma - Vt = 0$ ist; von da ab bewegt sich das Bodeiteichen in einer Vertikalebene durch P und s (Abb. 1).

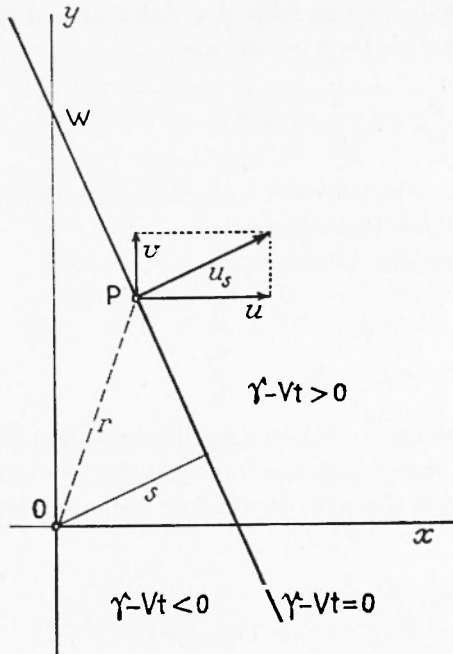


Abb. 1

sich wesentlich vereinfachen: Die vier Partikularlösungen (V behält zwei Vorzeichen) sind demnach nach Umhennennung der willkürlichen Konstanten c

$$u = -c \frac{f''}{m''} \Gamma_1 e^{-\frac{v}{\varrho} t} \sin m''(\gamma \pm Vt),$$

$$v = -c \frac{g''}{m''} \Gamma_2 e^{-\frac{v}{\varrho} t} \sin m''(\gamma \pm Vt),$$

$$w = +c \frac{c}{m''} \Gamma_2 e^{-\frac{v}{\varrho} t} \cos m''(\gamma \pm Vt)$$

und

$$u = +c \frac{f''}{m''} \Gamma_1 e^{-\frac{v}{\varrho} t} \cos m''(\gamma \pm Vt),$$

$$v = +c \frac{g''}{m''} \Gamma_1 e^{-\frac{v}{\varrho} t} \cos m''(\gamma \pm Vt),$$

$$w = +c \frac{c}{m''} \Gamma_2 e^{-\frac{v}{\varrho} t} \sin m''(\gamma \pm Vt).$$

Die Bewegung wird dann durch u_s und w vollständig beschrieben und es ist

$$u = u_s \cos(sx) = \frac{f''}{m''} u_s,$$

$$v = u_s \cos(sy) = \frac{g''}{m''} u_s,$$

$$u_s = \sqrt{u^2 + v^2}. \quad [71]$$

Die beiden Partikularlösungen [70] sind mit dieser Form dann und nur dann verträglich, wenn $\alpha = 0$ gemacht wird. Damit ist diese, bisher willkürlich gebliebene Konstante bestimmt und zwar in einer Weise, durch die die Ausdrücke für die Verschiebungskomponenten

[72]

Die Wellenhewegung ist zeitlich gedämpft, die räumliche Dämpfung ist weggefallen.

Jetzt vereinfacht sich auch die Berechnung der Phasengeschwindigkeit V und der in Γ_1, Γ_2 enthaltenen Grössen M, N, q_1, q_2 .

Aus [65] folgt wegen $m'' = \frac{2\pi}{L}$, wo L die Wellenlänge bedeutet

$$V = \pm \sqrt{2\alpha \frac{\mu}{\rho} - \frac{\nu^2}{\rho^2}} \cdot \frac{L^2}{4\pi^2} - \frac{\nu^2 L^2}{4\pi^2 \rho^2}, \quad [73]$$

d. h. die Phasengeschwindigkeit im Medium mit Reihung ist kleiner als jene im vollelastischen Körper. Es tritt normale Dispersion auf — für Grösseren Wellenlänge gehört die Kleiner Phasengeschwindigkeit. Man erkennt, dass für $\lim \nu \rightarrow 0$ die Phasengeschwindigkeit der Oberflächenwellen in jene bei vollelastischen Körpern übergeht.

Zur Berechnung von q_1 und q_2 geht man von [63] aus und berücksichtigt [61] und [73]:

$$q_1^2 = \frac{1}{\beta} [\rho(\varepsilon^2 - \nu^2) + 2\varepsilon\nu] + m''^2 = \frac{2m''^2 \mu \alpha}{\beta} + m''^2 = m'' \left(1 - 2 \frac{\mu}{\beta} \alpha \right),$$

$$q_2^2 = \frac{1}{\mu} [\rho(\varepsilon^2 - \nu^2) + 2\varepsilon\nu] + m''^2 = 2m''^2 \alpha + m''^2 = m''^2 (1 - 2\alpha).$$

Man findet daher wie im vollelastischen Fall

$$q_1 = m'' \sqrt{1 - 2 \frac{\mu}{\beta} \alpha}, \quad q_2 = m'' \sqrt{1 - 2\alpha}, \quad [74]$$

Wurzeln positiv.

Zur Berechnung der durch [67] definierten Grössen M und N beachten wir, dass zufolge der Kopplungsgleichung [45]

$$4\mu m'' q_1 q_2 = (m''^2 + q_2^2) (-\lambda m''^2 + \beta q_1^2)$$

ansfällt, was mit Rücksicht auf [74]

$$4\mu q_1 q_2 = 4\mu m''^2 (1 - \alpha)^2$$

nach sich zieht.

Daher ist

$$M = -(1 - z), N = m'' - (1 - z). \quad [75]$$

In [69] eingetragen, führt dies zusammen mit [74] auf die Beziehungen

$$\Gamma_1 = e^{-q_1 z} - (1 - z) e^{-q_2 z}, \quad \Gamma_2 = \frac{1 - z}{1 - 2z} [-(1 - z) e^{-q_1 z} + e^{-q_2 z}] \dots \quad [76]$$

Damit haben alle in den Partikularlösungen [72] vorkommenden Grössen ihre endgiltige Bedeutung erhalten und wir können die Wirkung der inneren Reihung im Sinne der Gleichungen [21] überblicken.

9. Zunächst stellen wir fest, dass die Wellen zeitlich gedämpft sind, dass also Absorption auftritt: das betrachtete Medium ist energieverzehrend.

Die Absorption wird geregelt durch den Dämpfungsfaktor $e^{-\frac{\nu}{\varrho} t}$, die Dämpfungskonstante $-\nu/\varrho$ ist frequenzunabhängig. Dieser Umstand ist entscheidend, denn er lässt erkennen, dass das hier betrachtete « Medium mit Reihung » für die Beschreibung seismischer Vorgänge nicht geeignet ist. Auch für die seismischen Wellen gilt nämlich eine Abhängigkeit der Extinktion oder Absorption von der Wellenlänge bzw. Periode. Die Erfahrung zeigt, dass kleine Perioden viel eher ausgetilgt werden als lange — der Absorptionsfaktor muss also in diesem Sinne periodenabhängig sein. Auch die übrige Physik kennt die Erscheinung der frequenzabhängigen Absorption, sodass wir uns im Widerspruch mit alltäglichen physikalischen Erfahrungen befinden, wenn wir frequenzunabhängige Absorption zulassen. Die Frequenzunabhängigkeit der Dämpfung hätte weiter zur Folge, dass sich ausbreitende Deformationsprofile zeitlich nicht verformen könnten, da sämtliche, an ihrem Zustandekommen beteiligten Perioden gleich stark gedämpft werden — ebenfalls entgegen der Erfahrung, die zeigt, dass sich seismische Wellen während des Ausbreitungsvorganges ändern.

Man weiss aus den Seismogrammen, dass Dispersion seismischer Wellen eine feststehende Tatsache ist. Sie lässt sich aber deshalb nicht gegen das hier betrachtete Medium anführen, weil sie andere Ursachen hat, nämlich die Mehrschichtigkeit der Erdkruste. Man könnte es sich zur Aufgabe machen, mit der an seismischen Oberflächenwellen beobachteten Dispersion auf die Schichtung zu schliessen. Aber selbst wenn man Schichtung beiseite lässt und das Medium als

homogen voraussetzt, dürfte die hier betrachtete Art von Dispersion so klein sein, dass sie unter der Messgrenze bleibt.

III.

10. Die Wiederaufnahme des Problems der *Rayleighwellen* in firmo-elastischen Medien ist deswegen nicht überflüssig, weil die bisherigen Untersuchungen zu keinem endgiltigen Ergebnis geführt haben. *E. Hardtwig* geht in seiner Arbeit ⁽⁹⁾ von Voraussetzungen bezw. Annahmen aus, die praktisch auf eine Näherungslösung hinauslaufen. In der verdienstvollen Arbeit von *P. Caloi* hingegen ⁽¹⁰⁾ wird der Ausbreitungsvektor nicht vollständig komplex angenommen, insoferne, als die dort eingeführte, den Zeitfaktor regelnde Grösse p nicht, wie es bei voller Allgemeinheit sein müsste, $\varepsilon + i \omega$ ($\omega =$ Kreisfrequenz) bedeutet, sondern allein die Kreisfrequenz. Zudem wird mit der Annahme $3\lambda' + 2\mu' = 0$ gearbeitet, die für visköse Flüssigkeitung nicht berechtigt ist. Im folgenden wird das Problem der Ausbreitung von *Rayleighwellen* in firmo-elastischen Körpern streng gelöst.

11. Wir suchen partikuläre Lösungen von [19]. Dazu nehmen wir, wie in Teil II, an, der Verrückungsvektor \vec{s} setze sich additiv zusammen aus einem wirbelfreien Vektor s_d und einem quellenfreien s_s (Dilatation und Torsion):

$$\vec{s} = \vec{s}_d + \vec{s}_s, \quad [77]$$

Wir haben also analog zu [26]

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{s}_d &= 0, & \text{div } \vec{s}_s &= \theta = 0 \\ \vec{s}_d &= \text{grad } \Phi, & \vec{s}_s &= \text{rot } \psi, & [78] \\ & & & (\text{div } \psi \text{ verfügbar, } z. B. = 0) \end{aligned}$$

Dem entspricht die Darstellung der Verrückungskomponenten durch ein skalares Potential Φ und ein Vektorpotential ψ_1, ψ_2, ψ_3 :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - \frac{\partial \psi_3}{\partial z}, & v &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x} \\ w &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2}{\partial y}. & [79] \end{aligned}$$

Für das System [19] bedeutet dies, wenn man die Dichte ρ als eine Konstante ansieht und die Ableitung nach der Zeit durch einen Punkt andeutet

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} [\rho \ddot{\Phi} - (\lambda - 2\mu) \Delta \Phi - (\lambda' + 2\mu') \Delta \dot{\Phi}] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} [\rho \ddot{\psi}_3 - \mu \Delta \dot{\psi}_3 - \mu' \Delta \dot{\psi}_3] - \frac{\partial}{\partial z} [\rho \ddot{\psi}_2 - \mu \Delta \dot{\psi}_2 - \mu' \Delta \dot{\psi}_2] = 0, \end{aligned} \quad [80]$$

mit drei analogen Gleichungen.

Diesem System kann speziell durch die Forderungen

$$\begin{aligned} & \rho \ddot{\Phi} - (\lambda + 2\mu) \Delta \Phi - (\lambda' + 2\mu') \dot{\Phi} = 0 \\ & \rho \ddot{\psi}_\alpha - \mu \Delta \dot{\psi}_\alpha - \mu' \Delta \dot{\psi}_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad [81]$$

Genüge getan werden. Sie sind hinreichend, nicht notwendig. Über das Vektorpotential soll so verfügt werden, dass

$$\operatorname{div} \psi = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_3}{\partial z} = 0 \quad [82]$$

ausfällt. Wir machen zunächst den Ansatz

$$\begin{aligned} & \Phi = A e^\sigma \\ & \sigma = fx + gy + hz + \omega t; \quad A, f, g, h, \omega \text{ komplex} \end{aligned} \quad [83]$$

und trachten damit die erste der Wellengleichungen [81] zu befriedigen. Wir finden, wenn wir dem m die alte Bedeutung beilegen und $\lambda' + 2\mu' = \beta'$ setzen,

$$m^2 + h^2 = \frac{\rho \omega^2}{\beta + \omega \beta'}. \quad [84]$$

Für die Komponenten des Vektorpotentials setzen wir analog

$$\begin{aligned} & \psi_\alpha = A_\alpha e^{\sigma_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3; \\ & \sigma_\alpha = f_\alpha x + g_\alpha y + h_\alpha z + \omega_\alpha t; \quad A_\alpha, f_\alpha, g_\alpha, h_\alpha, \omega_\alpha \text{ komplex} \end{aligned} \quad [85]$$

und substituieren in die drei letzten Gleichungen [81]. Es ergeben sich — entsprechen [84] — folgende drei Bedingungsgleichungen

$$m_\alpha^2 + h_\alpha^2 = \frac{\rho \omega_\alpha^2}{\mu + \omega_\alpha \mu'}, \quad \alpha = 1, 2, 3; \quad [86]$$

mit

$$m^2_\alpha = f^2_\alpha + g^2_\alpha \quad [87]$$

Die Ausdrücke für die Spannungen,

$$p_{xy} = \left(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \dots$$

$$p_{xx} = \left(\lambda + \lambda' \frac{\partial}{\partial t} \right) \theta + 2 \left(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial x}, \dots$$

[88]

werden nach Eintragen von [19] zu

$$p_{xy} = \left(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y \partial z} + \left(\frac{\partial^2 \psi_3}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x^2} \right) \right],$$

$$p_{xz} = \left(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} - \left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial y \partial z} \right],$$

$$p_{yz} = \left(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} + \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial z} \right],$$

$$p_{xx} = \left(\lambda + \lambda' \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta \Phi + 2 \left(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} \right),$$

$$p_{yy} = \left(\lambda + \lambda' \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta \Phi + 2 \left(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x \partial y} \right),$$

$$p_{zz} = \left(\lambda + \lambda' \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta \Phi + 2 \left(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y \partial z} \right).$$

[89]

Nach Eintragen von [83], [85] sehen diese Komponenten folgendermassen aus:

$$p_{xy} = (\mu + \mu' \omega) [2 A f g e^{\sigma_2} + A_1 f_1 h_1 e^{\sigma_1} - A_2 g_2 h_2 e^{\sigma_2} + A_3 (g_3^2 - f_3^2) e^{\sigma_3}],$$

$$p_{xz} = (\mu + \omega \mu') [2 A f h e^{\sigma} - A_1 g_1 h_1 e^{\sigma_1} + A_2 (f_2^2 - h_2^2) e^{\sigma_2} + A_3 g_3 h_3 e^{\sigma_3}],$$

$$p_{yz} = (\mu + \omega \mu') [2 A g h e^{\sigma} + A_1 (h_1^2 - g_1^2) e^{\sigma_1} + A_2 f_2 g_2 e^{\sigma_2} - A_2 f_2 h_2 e^{\sigma_2}],$$

$$p_{xx} = (\lambda + \omega \lambda') A (m^2 + h^2) e^{\sigma} + 2 (\mu + \omega \mu') [A f^2 e^{\sigma} + A_3 g_3 f_3 e^{\sigma_3} - A_2 f_2 h_2 e^{\sigma_2}],$$

$$p_{yy} = (\lambda + \omega \lambda') A (m^2 + h^2) e^{\sigma} + 2 (\mu + \omega \mu') [A g^2 e^{\sigma} + A_1 h_1 g_1 e^{\sigma_1} - A_3 f_2 g_3 e^{\sigma_3}],$$

$$p_{zz} = (\lambda + \omega \lambda') A (m^2 + h^2) e^{\sigma} + 2 (\mu + \omega \mu') [A h^2 e^{\sigma} + A_2 f_2 h_2 e^{\sigma_2} - A_1 g_1 h_1 e^{\sigma_1}].$$

[90]

Zum gleichen Ergebnis wäre man gekommen, wenn man [83] und [85] in [79] eingetragen

$$\begin{aligned} u &= A f e^{\sigma} + A_3 g_3 e^{\sigma_3} - A_2 h_2 e^{\sigma_2} \\ v &= A g e^{\sigma} + A_1 h_1 e^{\sigma_1} - A_3 f_3 e^{\sigma_3} \\ w &= A h e^{\sigma} + A_2 f_2 e^{\sigma_2} - A_1 g_1 e^{\sigma_1}, \end{aligned} \quad [91]$$

und diese Ausdrücke dann in [88] substituiert hätte. Dabei wäre zu berücksichtigen gewesen, dass

$$\theta = A(m^2 + h^2)e^{\sigma} \quad [92]$$

wird. Wegen der Forderung nach Spannungsfreiheit der Oberfläche werden hier nur die Ausdrücke für p_{xz} , p_{yz} , p_{zz} benötigt. Zu verlangen ist

$$\begin{aligned} -A_1 g_1 f_1 e^{\sigma_1 - \sigma} + A_2 (f_2^2 - h_2^2) e^{\sigma_2 - \sigma} + A_3 g_3 h_3 e^{\sigma_3 - \sigma} &= -2 A f h, \\ A_1 (h_1^2 - g_1^2) e^{\sigma_1 - \sigma} + A_2 f_2 g_2 e^{\sigma_2 - \sigma} - A_3 f_3 h_3 e^{\sigma_3 - \sigma} &= -2 A g h, \\ -A_1 g_1 h_1 e^{\sigma_1 - \sigma} + A_2 f_2 h_2 e^{\sigma_2 - \sigma} &= \\ &= A \left[\frac{(\lambda + \omega \lambda')(m^2 + h_2)}{2(\mu + \omega \mu')} + h^2 \right]. \end{aligned} \quad [93]$$

Diese Gleichungen müssen identisch für jedes Wertesystem x, y, t bestehen, woraus

$$f_1 = f_2 = f_3 = f, \quad g_1 = g_2 = g_3 = g, \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega \quad [94]$$

folgt.

Die Oberflächenbedingungen sind jetzt

$$\begin{aligned} -A_1 f g + A_2 (f^2 - h_2^2) + A_3 g h_3 &= -2 A f h \\ A_1 (h_1^2 - g^2) + A_2 f g - A_3 f h_3 &= -2 A g h \end{aligned} \quad [95]$$

und

$$-A_1 g h_1 + A_2 f h_2 = -A \left[\frac{(\lambda + \omega \lambda')(m^2 + h^2)}{2(\mu + \omega \mu')} + h^2 \right]. \quad [96]$$

Wegen [82] ist zusätzlich für alle Werte von x, y, z, t

$$A_1 f e^{\sigma_1} + A_2 g e^{\sigma_2} + A_3 h_3 e^{\sigma_3} = 0 \quad [97]$$

zu verlangen, d.h. es besteht auch noch

$$h_1 = h_2 = h_3 = h_s. \tag{98}$$

Wir haben den gemeinsamen Wert dieser drei Grössen mit h_s bezeichnet um anzudeuten, dass er sich auf die Scherungswelle bezieht. Den entsprechenden, auf die Verdichtungswelle bezüglichen Wert h wollen wir fortab sinngemäss mit h_d bezeichnen. Aus [97] folgt nun

$$A_1 f + A_2 g + A_3 h_s = 0. \tag{99}$$

Diese Beziehung, zusammen mit den beiden ersten Oberflächenbedingungen [95] kann man nun zu einem Linearsystem für die Unbekannten A_1, A_2, A_3 zusammenfassen, dessen Determinante

$$\begin{vmatrix} -fg & f^2 - h_s^2 & gh_s \\ h_s^2 - g^2 & f & -fh_s \\ f & g & h_s \end{vmatrix} = h_s (h_s^2 - m^2) (h_s^2 + m^2) \tag{100}$$

nicht identisch verschwindet. Für die A_a findet man

$$A_1 = -\frac{2Ag h_d}{h_s^2 - m^2}, \quad A_2 = +\frac{2Afh_d}{h_s^2 - m^2}, \quad A_3 = 0. \tag{101}$$

Die Potentiale lauten demnach mit $\sigma_d = fx + gy + h_d z + \omega t$ und $\sigma_s = fx + gy + h_s z + \omega t$

$$\Phi = A e^{\sigma_d}, \quad \psi_1 = -g \frac{2h_d A}{h_s^2 - m^2} e^{\sigma_s}, \quad \psi_2 = \frac{2fh_d A}{h_s^2 - m^2} e^{\sigma_s}, \quad \psi_3 = 0. \tag{102}$$

Gemäss [79] leiten sich aus ihnen die (vorläufigen) Ausdrücke für die Komponenten der elastischen Verschiebung ab:

$$\begin{aligned} u &= Af \left[e^{h_d z} - \frac{2h_d h_s}{h_s^2 - m^2} e^{h_s z} \right] e^{\sigma_s}, \\ v &= Ag \left[e^{h_d z} - \frac{2h_d h_s}{h_s^2 - m^2} e^{h_s z} \right] e^{\sigma_s}, \quad \sigma_s = fx + gy + \omega t \tag{103} \\ w &= A \left[h_d e^{h_d z} - \frac{2h_d m^2}{h_s^2 - m^2} e^{h_s z} \right] e^{\sigma_s}. \end{aligned}$$

Die dritte Oberflächenbedingung [96] ist noch nicht berücksichtigt.

12. Wir setzen die in [101] gefundenen Ausdrücke für die A_α in [96] ein und finden die « Kopplungsgleichung » in Analogie zu Gleichung [45] des II. Abschnittes — hier für den Fall des firmoelastischen Mediums:

$$(h_a^2 - m^2)[(\lambda + \omega \lambda') m^2 + (\beta + \omega \beta') h_a^2] = -4 h_a h_s m^2 (\mu + \omega \mu'). \quad [104]$$

Durch beiderseitiges Quadrieren entsteht

$$(h_a^2 + m^2)[(\lambda + \omega \lambda') m^2 + (\beta + \omega \beta') h_a^2]^2 = 16 h_a^2 h_s^2 m^4 (\mu + \omega \mu')^2. \quad [105]$$

Die Wellengleichungen [84] und [86] werden unter Beachtung von $m_\alpha = m$, $\omega_\alpha = \omega$ zu

$$h_a^2 = \frac{\rho \omega^2}{\beta + \omega \beta'} - m^2, \quad h_s^2 = \frac{\rho \omega^2}{\mu + \omega \mu'} - m^2. \quad [106]$$

Diese Ausdrücke für die h^2 werden in die Kopplungsgleichung [104] eingetragen und führen auf

$$(\beta + \omega \beta')[\rho \omega^2 - 2m^2(\mu + \omega \mu')]^4 = 16 m^4 (\mu + \omega \mu')[\rho \omega^2 - m^2(\beta + \omega \beta')][\rho \omega^2 - m^2(\mu + \omega \mu')]. \quad [107]$$

Nun soll durch

$$U = \frac{\omega}{m} \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} = \frac{\omega}{m V_s} \quad [108]$$

mit $\sqrt{\frac{\rho}{\mu}} = V_s =$ Phasengeschwindigkeit einer Scherungswelle im vollelastischen Medium eine complexe Grösse U definiert werden, vermöge deren die Kopplungsgleichung [107] die Form einer algebraischen Gleichung 9. Grades in U annimmt:

$$\begin{aligned} (\beta + m \beta' V U)[\mu U^2 - 2 \mu' m V U - 2 \mu]^4 = \\ = 16 (\mu + m \mu' V U)^3 [\mu U^2 - \beta' m V U - \beta][\mu U^2 - \mu' m V U - \mu]. \end{aligned} \quad [109]$$

Die Wurzeln dieser Gleichung, $U_1, U_2, U_3, \dots, U_9$ werden bestimmt durch die Materialgrössen $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ sowie m und V und geben jedesmal Veranlassung zu einer Gleichung [108]. Damit ist nicht gesagt, dass jede dieser Gleichungen auf eine physikalisch reelle Welle

führt. Man weiss aus der Theorie der *Rayleighwellen*, dass von den drei Wurzeln der zugehörigen Gleichung 3. Grades, von denen je nach der Wahl der Poisson'schen Konstanten entweder alle drei oder nur eine Wurzel reell sind, nur *eine* Wurzel Veranlassung zu einer Oberflächenwelle gibt. Ebe nicht eine eingehende Diskussion der Gleichung [109] stattgefunden hat, lässt sich über die Anzahl der durch sie zugelassenen Wellenpaare nichts aussagen. Wegen der grossen Anzahl der in [109] auftretenden Parameter ist jedoch die numerische Auflösung der Gleichung technisch schwierig. Für $\lambda' = \mu' = 0$ fällt man, wie zu erwarten, auf die *Rayleigh'sche* cubische Gleichung zurück. In der Tat folgt aus dieser Annahme zunächst

$$\beta [U^2 - 2]^4 = 16 [\mu U^2 - \beta] \{U^2 - 1\} \quad [110]$$

und dann, mit $U^2 = 2x$, sofort Gleichung [55].

Die Frage liegt nahe, welche Annahmen über λ' , μ' , λ , μ zu machen seien, um [109] zu vereinfachen. Dazu bemerken wir, dass [109] auch in der Form geschrieben werden kann

$$(X - 2)^4 = 16 (Y - 1) (X - 1), \quad [111]$$

wo

$$X = \frac{\rho \omega^2}{m^* (\mu + \omega \mu')}, \quad Y = \frac{\rho \omega^2}{m^* (\beta + \omega \beta')} \quad [112]$$

gesetzt wurde.

Aus der mit [110] gleichwertigen Beziehung

$$X^4 - 8 X^3 + 24 X^2 - 16 XY - 16 X + 16 Y = 0 \quad [113]$$

ist ersichtlich, dass eine cubische Gleichung resultieren würde, wenn Y und X proportional würden.

In der Literatur sind verschiedene Annahmen gemacht worden.

Ist $\lambda = \mu = 0$, so fällt man auf den Fall der Hydrodynamik visköser Flüssigkeiten zurück.

Die Annahme $\lambda' = -\frac{2}{3}\mu'$ gilt nur für Gase mit drei Freiheitsgraden, also ein-atomige Gase, für die der Adiabatenexponent $\gamma = 5/3$ ist. Allerdings wird in der Literatur diese Beziehung oft *ohne* diese Beschränkung angeführt, was nicht berechtigt ist. Auf Grund gaskinetischer Überlegungen empfiehlt *Busemann*, $\lambda' = (1 - \gamma)\mu'$ zu setzen, was besser, aber noch nicht endgiltig richtig sein dürfte. Sicher ist,

dass die *Stokes'sche* Beziehung $3\lambda' + 2\mu' = 0$ nur auf Gase angewandt werden darf. Was man für Flüssigkeiten berechtigterweise setzen darf, ist eine offene Frage.

Hier bleibt nun nichts übrig, als auf den Ansatz [12] von *Larmor* und *Jeffreys* zurückzugreifen, der, nach Einführen der Relaxationszeit τ , auf

$$\mu' = \tau \mu \quad [114]$$

führt. Sinnemäss überträgt man diese Beziehung auch auf λ' :

$$\lambda' = \tau \lambda . \quad [115]$$

Hierin steckt die Annahme, dass nicht nur die Scherung mit der Relaxationszeit τ abklingt, sondern auch die Verdichtung oder Verdünnung. Selbst wenn beide Relaxationszeiten nicht ganz gleich sein sollten dürfen wir doch annehmen, dass sie sich nicht wesentlich unterscheiden. Das in dieser Weise definierte Medium ist so beschaffen, dass die durch scherende und drückende Kräfte hervorgerufenen Deformationen in gleicher Weise exponentiell abklingen, wenn die Kräfte aufhören.

Die Gleichungen [114], [115] sind gleichbedeutend mit

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\mu'}{\mu} \quad \lambda' = c' \mu' , \quad \lambda = c' \mu , \quad [116]$$

c' willkür. reelle Konstante,

sodass

$$\beta = \lambda + 2\mu = (c' + 2)\mu , \quad \beta' = \lambda' + 2\mu' = (c' + 2)\mu' = \tau(c' + 2)\mu$$

ausfällt. Setzen wir noch $c' + 2 = c$, so wird wegen [111]

$$X = \frac{\rho \omega^2}{m^2 \mu (1 + \omega \tau)} , \quad Y = \frac{1}{c} X . \quad [117]$$

Nach der Definition der Lamé'schen Konstanten

$$\lambda = \frac{\sigma E}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} ; \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)}$$

$E =$ Elastizitätsmodul, $\sigma =$ Poisson'sche Konstante, ist

$$c' = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2\sigma}{1 - 2\sigma} , \quad c = 2 \frac{1 - \sigma}{1 - 2\sigma} . \quad [118]$$

Die algebraische Gleichung [112] wird dann zu

$$X \left[X^3 - 8 X^2 + 8 \frac{2 - \sigma}{1 - \sigma} X - 8 \frac{1}{1 - \sigma} \right] = 0 \quad [119]$$

und, nach Substitution

$$X = \frac{\rho \omega^2}{m^2 \mu (1 + \omega \tau)} = 2 \kappa \quad [120]$$

und Abwerfen des physikalisch sinnlosen Faktors X , zu

$$f(\kappa/\sigma) = \kappa^3 - 4 \kappa^2 + 2 \frac{2 - \sigma}{1 - \sigma} \kappa - \frac{1}{1 - \sigma} = 0 . \quad [121]$$

Man bekommt also wieder die *Rayleigh'sche* cubische Gleichung — allerdings mit anderer Bedeutung der Wurzeln κ .

Diese sind jetzt durch die Beziehung [120] mit den noch unbestimmten Parametern des Wellenpaares verbunden.

Die Gleichung [121] hat, wie immer σ innerhalb des zulässigen Bereiches $0 < \sigma < 0,5$ variiert, sicher eine reelle Wurzel.

Dies bedeutet, dass in [120], wenn man unter κ diese reelle Wurzel versteht, auch die linke Seite reell sein muss. Man kann auch sagen, dass durch [120] eine Bindung hergestellt wird zwischen den komplexen Parametern ω und m^2 und der reellen Grösse

$$v^2 = 2 \kappa \frac{\mu}{\rho} . \quad [122]$$

Der Parameter v ist die Phasengeschwindigkeit der *Rayleighwelle* im vollelastischen Medium:

$$\omega^2 = v^2 m^2 (1 + \omega \tau) . \quad [123]$$

Daneben bestehen die beiden Gleichungen [106] weiter, die nun in der Form geschrieben werden können

$$h_d^2 = m^2 (\kappa \gamma - 1) , \quad h_s^2 = m^2 (2 \kappa - 1) \quad [124]$$

$$\gamma = \frac{1 - 2 \sigma}{1 - \sigma}$$

Im Ganzen bestehen mithin zwischen den noch freien Parametern die drei Beziehungen [123] und [124].

13. Die *Rayleigh'sche* Gleichung dritten Grades wurde behandelt von *Rayleigh* selbst ⁽¹³⁾, von *Lamb* ⁽¹⁴⁾ und von *Uller* ⁽¹⁵⁾. Hier soll sie nochmals, und zwar unter dem Gesichtspunkt variierender Poisson'scher Konstanten untersucht werden. Um eine Übersicht über die Möglichkeiten zu gewinnen ist es zweckmässig, eine graphische Darstellung der Funktion $\eta = f(x|\sigma)$ in einem rechtwinkligen $x-\sigma$ -System vorzunehmen (Abb. 2).

Die Funktion ist von einem Parameter σ mit beschränktem Variabilitätsbereich ($0 < \sigma < 0.5$) abhängig, stellt also eine Schar von ∞^1 Kurven dritter Ordnung dar (Abb. 2). Die Schnittpunkte dieser Kurven mit der x -Achse sind dann die Wurzeln der zu dem betreffenden σ gehörenden Gleichung $f(x|\sigma) = 0$. Mathematisch kann der Parameter natürlich über die hier angegebenen Intervallgrenzen hinaus variieren, physikalisch bedeutsam sind hingegen nur die Werte innerhalb des Intervalles. Die Grenzen sind $\sigma \sim 1/2$ für Kautschuk und gallertartige Körper, $\sigma \sim 0$ für ganz starre Körper. Für Metalle und Gläser kann man etwa $\sigma \sim 1/3$, für Gesteine $\sigma \sim 1/4$ annehmen, doch kommen beträchtliche Unterschiede innerhalb der Gruppen vor.

Die Kurvenschar hat eine « obere » und eine « untere » Grenzkurve. Erstere, für $\sigma = 1/2$ hat die Gleichung

$$\eta = f\left(x \mid \frac{1}{2}\right) = x^3 - 4x^2 + 6x - 2$$

mit den Nullstellen

$$x_0 = 0,381\ 966 \dots, \quad x_{1,2} = 1,771\ 845 \pm i. 1,115\ 142 \dots$$

Nur eine Nullstelle ist also reell. Die Kurve geht ersichtlich durch den Punkt $x = 1, \eta = 1$.

Letztere, für $\sigma = 0$, hat die Gleichung

$$\eta = f(x|0) = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$$

und die zugehörige cubische Gleichung ist auf eine quadratische zurückführbar:

$$x^3 - 4x - 1 = (x^3 - 1) - 4x(x - 1) = (x - 1)(x^2 - 3x + 1) = 0.$$

Die Nullstellen der Funktion, d. h. die Wurzeln der zugehörigen Gleichung sind ersichtlich

$$x_0 = 0.381\ 966 \dots$$

$$x_1 = 1, \quad x_{0,2} = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5}), \quad x_2 = 2.618\ 034 \dots$$

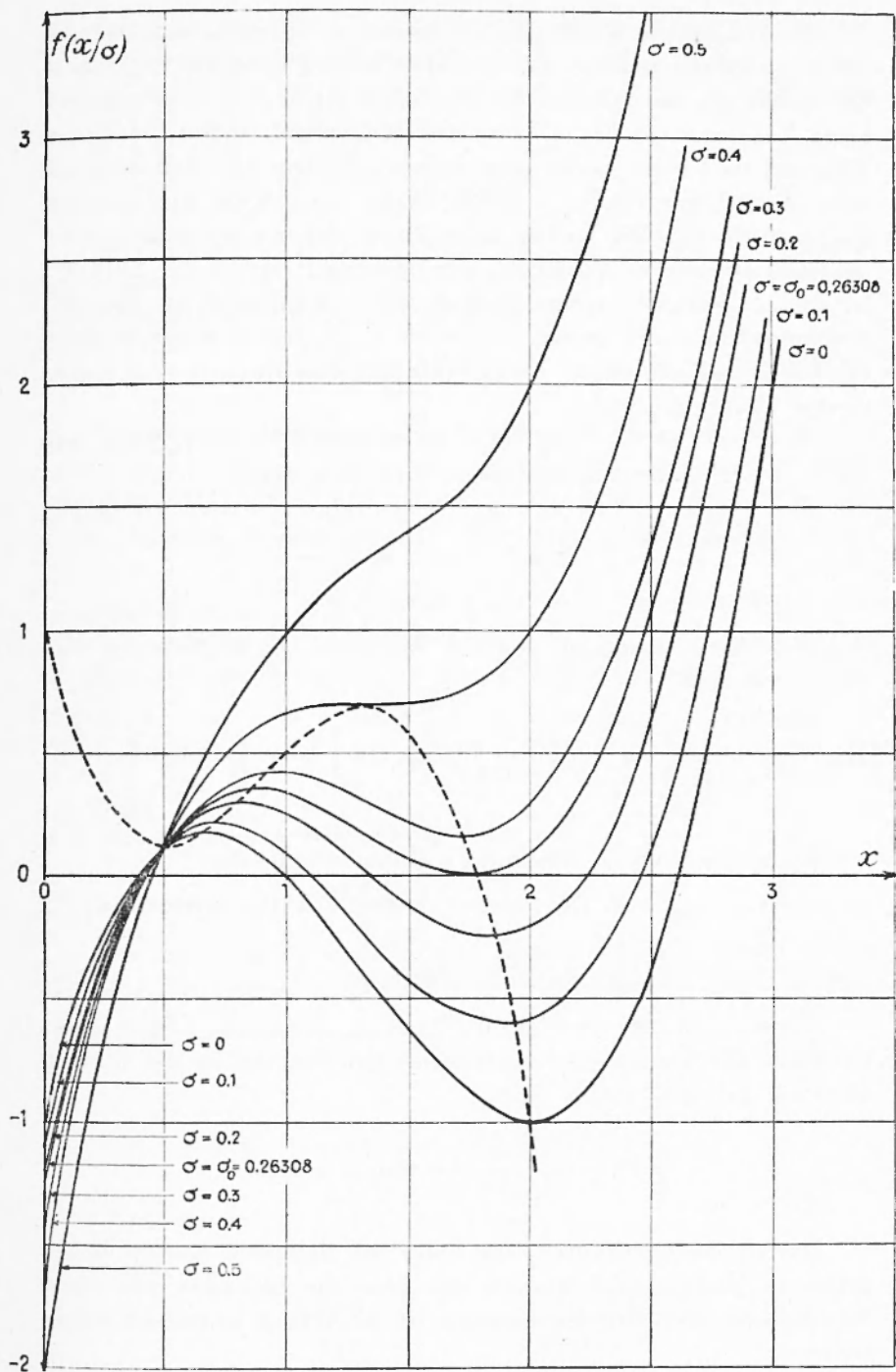


Abb. 2

(In der abbildung muss man K an Stelle von x lesen).

Das konjugierte Wurzelpaar wurde mit x_0, x_2 bezeichnet. Dadurch sollte angedeutet werden, dass die eine Wurzel desselben, x_0 , die in der Zeichnung am weitesten links gelegene ist und sich in unmittelbarer Nachbarschaft des x_0 vom andern Grenzfall $\sigma = 1/2$ befindet. Während des Variierens des σ im ganzen zulässigen Intervall schwankt diese Wurzel nur von $x_0 = 0,381\ 966$ bis $x_0 = 0,456\ 311$, also um $\Delta x_0 = 0,074\ 345$. Wir wollen diese Wurzel daher als « isolierte » bezeichnen. Die zweite Wurzel des konjugierten Paares, $x_2 = 2,618\ 034$ ist die am weitesten rechts liegende. Das Auffallende ist, dass mit zunehmendem σ die beiden Nullstellen x_1, x_2 immer enger aneinanderrücken und schliesslich zusammenfallen, dass sie aber kein konjugiertes Wurzelpaar bilden.

Das Zeichnen der einzelnen Kurven wird erleichtert, wenn man die Lage der Extrema kennt. Sie sind gegeben durch

$$\eta' = \frac{df(x|\sigma)}{dx} = 3x^2 - 8x + 2 \frac{2-\sigma}{1-\sigma} = 0,$$

es gibt also ein Maximum und ein Minimum. Die zugehörigen Abszissenwerte sind

$$x_{\max} = \frac{1}{3} \left(4 - \sqrt{16 - 6 \frac{2-\sigma}{1-\sigma}} \right), \quad x_{\min} = \frac{1}{3} \left(4 + \sqrt{16 - 6 \frac{2-\sigma}{1-\sigma}} \right).$$

[125]

Sie variieren mit σ . Man findet z. B. für $\sigma = 0$ sofort

$$x_{\max} = \frac{1}{3}, \quad x_{\min} = 2. \text{ Die entsprechenden Funktionswerte sind}$$

$$\eta_{\max} = f\left(\frac{2}{3} \mid 0\right) = \frac{5}{27}, \quad \eta_{\min} = f(2/0) = -1.$$

Mit wachsendem σ rücken die Extrema zusammen, es gibt einen Grenzfall, für den sie ganz zusammenfallen. Für ihn ist der Wurzelausdruck in [125] gleich Null:

$$\sqrt{16 - 6 \frac{2-\sigma}{1-\sigma}} = 0 \text{ also } \sigma = 0,4.$$

Das ist die Grenzkurve: die *unter* ihr liegenden Kurven haben getrennte Maxima und Minima, die *über* ihr liegenden nur einen Wendepunkt. Der Ort der Extrema ist in Abb. 2 gestrichelt eingezeichnet.

Es gibt einen Wert σ , für den die beiden Wurzeln z_1, z_2 zusammenfallen. Für ihn tangiert die Kurve $\eta = f(z|\sigma)$ die z -Achse. Um ihn zu finden, hat man die Diskriminante $D(\sigma)$ der Gleichung $f(z|\sigma) = 0$ gleich Null zu setzen:

$$D(\sigma) = 32\sigma^3 - 16\sigma^2 + 21\sigma - 5 = 0. \quad [126]$$

Diese Gleichung dritten Grades in σ hat, wie man sich überzeugen kann, nur eine reelle Wurzel σ_0 , die man durch ein Näherungsverfahren bestimmen kann. Man findet

$$\sigma_0 = 0,263\ 0821 \dots \quad [127]$$

Für alle σ , die kleiner sind als dieser Wert, haben die Kurven ausser der isolierten, immer reellen Nullstelle zwei weitere, reelle Nullstellen; für alle σ , die grösser als dieser Wert sind, ist die isolierte Nullstelle die einzige reelle. Die beiden andern sind konjugiert komplex.

Den Wert der Doppelwurzel kann man angeben, wenn man beachtet, dass an der zugehörigen Nullstelle die Kurve die z -Achse berührt, also ein Minimum hat. Die Bedingung lautet

$$z_{\min} = z_1 = z_2 = -\frac{1}{3} \left(4 + \sqrt{16 - 6 \frac{2-\sigma}{1-\sigma}} \right)$$

und die numerische Berechnung führt auf

$$z_1 = z_2 = 1,787\ 692 \dots$$

Die Auflösung der cubischen Gleichung $f(z|\sigma) = 0$ hält sich im Rahmen des Üblichen. Man führt die Tschirnhausen-Transformation

$$z = \xi + \frac{4}{3} \quad [128]$$

aus und erhält die Gleichung in der Normalform

$$\xi^3 + a\xi + b = 0 \quad [129]$$

mit

$$a = \frac{10\sigma - 4}{3(1-\sigma)}, \quad b = \frac{56\sigma - 11}{27(1-\sigma)}. \quad [130]$$

Die Diskriminante $D(\sigma)$ ist durch

$$D(\sigma) = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 - \frac{32\sigma^3 - 16\sigma^2 + 21\sigma - 5}{108(1-\sigma)} \quad [131]$$

definiert (vergl. dazu [126]).

Mit Hilfe der Grössen

$$u = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{D(\sigma)}}, \quad v = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{D(\sigma)}} \quad [132]$$

und der dritten Einheitswurzeln

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3} \quad [133]$$

sind die Wurzeln von [129] in der Form darstellbar

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= u + v \\ \zeta_1 &= \alpha_1 u + \alpha_2 v \\ \zeta_2 &= \alpha_1^2 u + \alpha_2^2 v = \alpha_2 u + \alpha_1 v \end{aligned} \quad [134]$$

und jene der *Rayleigh'schen* Gleichung zufolge [128] in der Form

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{4}{3} + u + v \\ x_1 &= \frac{4}{3} + \alpha_1 u + \alpha_2 v = \left(\frac{4}{3} - \frac{\mu + v}{2}\right) + i \frac{u - v}{2} \sqrt{3} \\ x_2 &= \frac{4}{3} + \alpha_2 u + \alpha_1 v = \left(\frac{4}{3} - \frac{\mu + v}{2}\right) - i \frac{u - v}{2} \sqrt{3} \end{aligned} \quad [135]$$

(Auflösung mit Hilfe der Cardani'schen Formel).

Für die Berechnung selbst ist der Wert der Diskriminante massgebend.

Erster Fall: $D(\sigma) > 0$.

Schwierigkeiten treten hier nicht auf, denn u und v bleiben reell. Wegen [131] tritt dieser Fall sicher dann auf, wenn $a > 0$, also, zufolge [130], wenn $\sigma > 0,4$ angenommen wird. Er tritt auch für $a = 0$ oder $\sigma = 0,4$ ein. Dann wird nämlich $u = 0$ und $v = \sqrt[3]{-b}$, mithin

$$x_0 = \frac{4}{3} - \sqrt[3]{b}, \quad x_{1,2} = \frac{4}{3} + \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3}\right) \sqrt[3]{b} \quad [136]$$

und, nach Einsetzen des Zahlenwertes für σ ,

$$z_0 = 0,443\ 866\ 2 \dots \quad z_{1,2} = 1,778\ 066\ 9 \dots \pm 0,770\ 294\ 8 \dots i$$

Er tritt schliesslich auch für $u = 0$ ein, solange, $\sigma > \sigma_0$ ist.

Die Berechnung der Wurzeln der *Rayleigh'schen* Gleichung ist dann ohne Schwierigkeiten möglich, nur insoferne zeitraubend, als die *cardanischen* Formeln logarithmisch unterbrochen sind. Man geht daher zweckmässigerweise den Weg über die *Hyperbelfunktionen*.

Zweiter Fall: $D(\sigma) = 0$.

Es ist $u = v = \sqrt[3]{-b/2}$, also $u + v = 2 \sqrt[3]{-b/2}$ und $u - v = 0$. Die gesuchten Wurzeln sind daher

$$z_3 = \frac{4}{3} + 2 \sqrt[3]{-\frac{b}{2}}, \quad z_1 = z_2 = \frac{4}{3} - \sqrt[3]{-\frac{b}{2}} \quad [137]$$

oder

$$z_0 = 0,424\ 615\ 9 \dots \quad z_1 = z_2 = 1,787\ 692\ 0 \dots, \quad [138]$$

in Übereinstimmung mit früher.

Dritter Fall: $D(\sigma) < 0$.

Unter den *Kubikwurzeln* von [132] stehen nun *complexe* Zahlen, u und v sind von der allgemeinen Form $A + iB$ und $A - iB$ (A, B reell), daher bleiben $u + v$ und $u - v$ reell bzw. rein imaginär. Nach [135] sind daher sämtliche Wurzeln reell, wir haben den Fall vor uns, der uns in erster Linie interessiert. Da die Berechnung von A und B jedoch wieder auf Gleichungen 3. Grades führt, lassen sich die Wurzeln im allgemeinen nicht elementar auswerten (*casus irreducibilis*). Zur Berechnung der Wurzeln führt hier die *trigonometrische* Methode zum Ziel. Sollen die Wurzeln genauer bekannt sein als die aus *Tafeln* entnommenen *trigonometrischen* Funktionen, muss die gewünschte Anzahl von Stellen durch ein *Näherungsverfahren* ermittelt werden.

Die beiliegende *Tabelle* enthält für den in Frage kommenden Bereich der *Poisson'schen* Konstanten die zugehörigen Wurzeln der *Rayleigh'schen* Gleichung. Wegen ihrer Bedeutung für *Oberflächenwellen* sind auch die entsprechenden Werte der Ausdrücke $\sqrt[3]{1 - \gamma z_0}$ und $\sqrt[3]{1 - 2 z_0}$ angeführt.

TABELLE
Wurzeln der Rayleigh'schen Gleichung
für verschiedene Werte der Poisson'schen Konstanten σ .

σ	α_0	$\sqrt{1-\gamma\alpha_0}$	$\sqrt{1-2\alpha_0}$	α_1	α_2	$\sqrt{1-\gamma\alpha_v}$ $\sqrt{1-2\alpha_v}$ $v = 1, 2.$
0.5	0,4563	1,0000	0,2956	1,7718 + 1,1151i		complex
0,45	0,4503	0,9582	0,3153	1,7749 + 0,9423i		
0,40	0,4439	0,9231	0,3350	1,7781 + 0,7703i		
0,35	0,4371	0,8935	0,3547	1,7814 ± 0,5882i		
0,30	0,4300	0,8685	0,3742	1,7850 + 0,3684i		
0,28	0,4271	0,8597	0,3818	1,7864 ± 0,2457i		
0,27	0,4256	0,8555	0,3858	1,7872 ± 0,1560i		
0,268	0,4253	0,8546	0,3865	1,7873 + 0,1313i		
0,266	0,4251	0,8538	0,3870	1,7875 ± 0,1010i		
0,264	0,4248	0,8530	0,3878	1,7876 + 0,0566i		
0,263...	0,4246	0,8526	0,3883	1,7877		
0,260	0,4242	0,8514	0,3894	1,8912	1,6846	imaginar
0,258	0,4239	0,8506	0,3901	1,9206	1,6556	
0,256	0,4235	0,8498	0,3912	1,9444	1,6321	
0,254	0,4232	0,8491	0,3919	1,9650	1,6118	
0,252	0,4229	0,8483	0,3927	1,9833	1,5937	
0,250	0,4226	0,8475	0,3935	2,0000	1,5774	
0,248	0,4223	0,8467	0,3942	2,0154	1,5622	
0,246	0,4220	0,8460	0,3950	2,0298	1,5482	
0,244	0,4217	0,8452	0,3957	2,0433	1,5350	
0,242	0,4214	0,8445	0,3965	2,0560	1,5225	
0,240	0,4211	0,8436	0,3972	2,0681	1,5107	
0,238	0,4208	0,8430	0,3980	2,0797	1,1995	
0,236	0,4205	0,8423	0,3988	2,0908	1,4867	
0,234	0,4202	0,8415	0,3995	2,1014	1,4784	
0,232	0,4199	0,8408	0,4003	2,1116	1,4685	
0,230	0,4196	0,8401	0,4010	2,1215	1,4589	
0,228	0,4193	0,8394	0,4018	2,1310	1,4417	
0,226	0,4190	0,8385	0,4025	2,1403	1,4407	
0,224	0,4187	0,8380	0,4032	2,1492	1,4321	
0,222	0,4184	0,8373	0,4040	2,1579	1,4237	
0,220	0,4181	0,8366	0,4047	2,1664	1,4155	
0,200	0,4150	0,8299	0,4123	2,2406	1,3444	
0,150	0,4070	0,8154	0,4313	2,3769	1,2161	
0,100	0,3988	0,8034	0,4499	2,4760	1,1252	
0,050	0,3903	0,7939	0,4684	2,5512	1,0585	
0,000	0,3820	0,7861	0,4858	2,6180	1,0000	

Die Zahlen wurden auf sieben Stellen genau gerechnet und auf vier Stellen abgerundet.

14. Bisher wurde vom complexen Charakter der Parameter kein Gebrauch gemacht. Von jetzt ab wollen wir wieder [48] voraussetzen und die Abkürzung

$$m'^2 - m''^2 = M \quad [139]$$

eingeführen. Die Bedingungsgleichungen [124] lassen sich nun wie folgt aufspalten:

$$\begin{aligned} q_d^2 - k_d^2 &= (-M)(1 - \gamma z), & q_s^2 - k_s^2 &= (-M)(1 - 2z), \\ q_d k_d &= P(1 - \gamma z), & q_s k_s &= P(1 - 2z). \end{aligned} \quad [140]$$

Wir beschränken uns wieder auf den Fall horizontaler Wellenzüge, setzen also $k_d = k_s = 0$. Wegen $q_d, q_s > 0, 1 - 2z \neq 0$ folgt daraus

$$P = 0, \text{ also } f' = \alpha g'', \quad g' = -\alpha f'', \quad \alpha f'', \quad M = m''^2 (\alpha^2 - 1) \quad [141]$$

$\alpha = \text{reeller Proportionalitätsfaktor}$

und weiter

$$q_d^2 = m''^2 (1 - \alpha^2) \sqrt{1 - \gamma z}, \quad q_s^2 = m''^2 (1 - \alpha^2) \sqrt{1 - 2z}. \quad [142]$$

Zur Bestimmung der Proportionalitätskonstanten α greifen wir auf [103] zurück und beachten, dass die dort auftretenden Ausdrücke in den eckigen Klammern nunmehr reell sind:

$$\begin{aligned} L_1 &\equiv \frac{h_d z}{h_s^2 - m^2} - \frac{2 h_d h_s}{h_s^2 - m^2} e^{-q_d z} = e^{-q_d z} - \frac{2 q_d q_s}{q_s^2 + m^2 (1 - \alpha^2)} e^{-q_s z} = \\ &= e^{-q_d z} - \frac{\sqrt{(1 - \gamma z)(1 - 2z)}}{1 - \alpha^2} e^{-q_s z}, \end{aligned} \quad [143]$$

$$\tilde{L}_2 \equiv h_d e^{h_d z} + \frac{2 h_d m^2}{h_s^2 - m^2} e^{h_s z} = q_d e^{-q_d z} + \frac{m'' \sqrt{(1 - \alpha^2)(1 - \gamma z)}}{1 - \alpha^2} e^{-q_s z}.$$

Damit wird

$$\left. \begin{aligned} u &= A (\alpha g'' + i f'') L_1 e^{\sigma'} e^{i\sigma''} \\ v &= A (-\alpha f'' + i g'') L_1 e^{\sigma'} e^{i\sigma''} \\ w &= A \frac{1}{2} e^{\sigma'} e^{i\sigma''} \\ \alpha' &= \alpha (g'' x - f'' y) + \varepsilon t, \quad \sigma'' = f'' x + g'' y - p t. \end{aligned} \right\} \quad [144]$$

Die Anwendung der Euler'schen Satzes $e^{i\sigma''} = \cos \sigma'' + i \sin \sigma''$ und Trennung nach Reell und Imaginär führt auf die beiden Partikularlösungen

$$\begin{aligned} u &= A L_1 e^{\sigma'} [\alpha g'' \cos \sigma'' - f'' \sin \sigma''] , \\ v &= -A L_1 e^{\sigma'} [\alpha f'' \cos \sigma'' + g'' \sin \sigma''] , \\ w &= A L_2 e^{\sigma'} c \cdot s \sigma'' ; \\ & \hspace{20em} [145] \\ u &= A L_1 e^{\sigma'} [f'' \cos \sigma'' + \alpha g'' \sin \sigma''] , \\ v &= -A L_1 e^{\sigma'} [-g'' \cos \sigma'' + \alpha f'' \sin \sigma''] , \\ w &= A L_2 e^{\sigma'} \sin \sigma'' . \end{aligned}$$

Bezeichnet man den Winkel zwischen Wellennormaler und x -Achse mit ϑ , so ist

$$\frac{f''}{m''} = c \cdot s \vartheta , \quad \frac{g''}{m''} = \sin \vartheta$$

und die Verrückungskomponenten u_n , u_{\perp} in Richtung der Wellennormalen bezw. senkrecht dazu (also parallel zur Wellenfront) sind gegeben durch

$$\begin{aligned} u_n &= u \cdot \cos \vartheta + v \cdot \sin \vartheta \\ u_{\perp} &= -u \cdot \sin \vartheta + v \cdot \cos \vartheta . \end{aligned} \quad [146]$$

Aus [145] folgt daher nach einer kleinen Umbenennung des willkürlichen Faktors

$$\begin{aligned} u_n &= -C L e^{\sigma'} \sin \sigma'' & u_n &= C L e^{\sigma'} \cos \sigma'' \\ & \hspace{10em} \text{und} & & \\ u_{\perp} &= -\alpha C L e^{\sigma'} \cos \sigma'' & u_{\perp} &= -\alpha C L e^{\sigma'} \sin \sigma'' . \end{aligned} \quad [147]$$

In Richtung der Wellenfront kann keine elastische Verrückung stattfinden, daher muss $\alpha = 0$ angenommen werden. Aus [142] folgt somit endgültig

$$q_d = + m'' \cdot \sqrt{1 - \gamma z} , \quad q_s = + m'' \cdot \sqrt{1 - 2z} . \quad [148]$$

Zur weiteren Vereinfachung der Ausdrücke [143] genügt der Hinweis, dass zufolge [111]

$$\sqrt{(1 - 2z)(1 - \gamma z)} = -(z - 1)^2$$

ausfällt. Daher wird, wenn wieder die Grössen Γ_1, Γ_2 vermöge

$$\Gamma_1 = e^{-q_1 z} - (1 - \alpha) e^{-q_2 z}, \quad \Gamma_2 = -(1 - \alpha) e^{-q_1 z} + e^{-q_2 z}$$

eingeführt werden, $L_1 = \Gamma_1, \quad L_2 = m'' \cdot \frac{1 - \alpha}{\sqrt{1 - 2\alpha}}$

und die Partikularlösungen sehen folgendermassen aus:

$u_n = -c \Gamma_1 e^{\varepsilon t} \sin \sigma'', \quad w = c m'' \frac{1 - \alpha}{\sqrt{1 - 2\alpha}} \Gamma_2 e^{\varepsilon t} \cos \sigma''$ <p style="text-align: center;">und</p> $u_n = +c \Gamma_1 e^{\varepsilon t} \cos \sigma'', \quad w = c m'' \frac{1 - \alpha}{\sqrt{1 - 2\alpha}} \Gamma_2 e^{\varepsilon t} \sin \sigma'' \quad . [149]$ $\sigma'' = m'' \left(\frac{f''}{m''} x + \frac{g''}{m''} y - \frac{p}{m''} t \right) = m'' (n - V t)$
--

15. Es erübrigt noch die Bestimmung von ε und V .

Ausgehend von [123] und unter Berücksichtigung von $\omega = \varepsilon - ip$ sowie $m^2 = -m''^2$ findet man nach Trennung von Reell und Imaginär

$$\varepsilon^2 - p^2 = -v^2 m''^2 (1 + \varepsilon \tau) \tag{150}$$

$$2\varepsilon = -v^2 m''^2 \tau .$$

Wegen der Bedeutung von m'' ist die Dämpfungskonstante ε daher

$\varepsilon = -\frac{2\pi^2}{T} \delta$	[151]
--	-------

d. h., die Dämpfung fällt für grosse Perioden schwächer aus als für kleine, sie ist aber auch umso schwächer, je kleiner das Verhältnis Relaxationszeit: Periode ($=\delta$) ist. Für $\lim \delta \rightarrow 0$ ist die Welle ungedämpft.

Für die Phasengeschwindigkeit $V = -p/m''$ findet man aus der ersten Gleichung [150]

$$V^2 = \frac{p^2}{m''^2} = v^2 (1 + \varepsilon \tau) + \frac{\varepsilon^2}{m''^2}$$

und, nach Substitution des aus der zweiten Gleichung [150] folgenden Ausdruckes für ε ,

$$V = \pm v \sqrt{1 - \pi^2 \delta^2} \quad , \quad [152]$$

in Übereinstimmung mit einem älteren Ergebnis des Verfassers ⁽⁹⁾.

Das Vorhandensein einer inneren Reihung des Mediums im Sinne der hier vorgetragenen Theorie bewirkt mithin *erstens* eine Verminderung der Phasengeschwindigkeit der Oberflächenwellen, *zweitens* das Auftreten einer periodenabhängigen Dämpfung.

Den grössten Wert erreicht V für $\delta = 0$, also für ein vollelastisches Medium, denn dann ist $V = \pm v$; den kleinsten erreicht es für $1 - \pi^2 \delta^2 = 0$, also für $\delta = 1/\pi = 0,31\ 830 \dots$ mit $V = 0$.

Für Werte $\delta > 1/\pi$ wird der Ausdruck unter der Wurzel in [152] negativ, diese selbst also imaginär — eine Wellenausbreitung findet nicht mehr statt. Dies bedeutet für die Relaxationszeit τ eine Beschränkung $\tau \leq 0,31\ 830 \dots T$.

Nimmt man an, die seismischen Wellen haben Perioden von $T = 100$ sec so ergibt sich, dass, um diese Wellen fortzuleiten zu können, $\tau \leq 31,830 \dots \text{sec} \sim 32$ sec ausfallen muss.

Für die Erdkruste wurde eine Relaxationszeit von etwa $2 \cdot 10^{-2}$ sec errechnet ⁽²⁾. Damit befinden wir uns also noch weit unter der hier angegebenen Grenze für τ . Man kann aber umgekehrt aus der Ungleichung $2 \cdot 10^{-2} \leq 0,31\ 830 \dots T$ ermitteln, dass $T \geq 0,062\ 832 \dots$ ausfallen müsste, wenn die Perioden überhaupt als Oberflächenwellen weitergeleitet werden sollen. Der gefundene Grenzwert erscheint etwas hoch, sodass wir wohl annehmen müssen, dass zumindest in den allerobersten Erdschichten eine kleinere Relaxationszeit herrscht.

Hier ergibt sich eine Methode zur Bestimmung der Relaxationszeit. Es wäre zu untersuchen, für welchen Wert T_0 von variierenden Perioden, die dem Erdboden aufgeprägt wurden, die Oberflächenwellen weghleiben. Die Gleichung $\tau = 0,31\ 830 \dots T_0$ gäbe dann die Relaxationszeit.

Die Existenz einer Grenzperiode für die Ausbreitung der Wellen lässt sich anschaulich erklären. Solange die Relaxationszeit klein ist gegen die Periode haben die Teilchen des Mediums die Möglichkeit, den Impulsen rasch zu folgen — für vollkommen elastische Körper tun sie das augenblicklich. Mit wachsenden Relaxationszeiten oder,

was auf dasselbe hinauskommt, mit abnehmenden Perioden wird das Verhältnis dieser beiden Zeiten immer ungünstiger, bei rasch sich ändernden Impulsen werden die Teilchen des Mediums kaum mehr den Deformationen folgen können, bis schliesslich die Deformationen so rasch erfolgen, dass sie « ins Leere » greifen, weil eben die Teilchen von der vorangehenden Periode her ihre alten Lagen noch nicht wieder eingenommen haben. Das ist dann der Fall, wenn Relaxationszeit und Periode von gleicher Grössenordnung sind.

Die periodenabhängige Dämpfung ε sorgt für das bevorzugte Ausbreiten grosser Perioden: wie auch in anderen Gebieten der Physik werden kurze Perioden schneller ausgetilgt als lange. Wieder ist für die Geschwindigkeit dieser Extinktion das Verhältnis Relaxationszeit: Periode massgebend.

Bei einer Relaxationszeit von $2 \cdot 10^{-2}$ sec und einer durchschnittlichen Periode von $T = 20$ sec wird $\delta = 0,001$, sodass zufolge [151] $\varepsilon = -0,00098 \dots \sim 0,001$ ausfällt — ein etwas grosser Wert, der ebenfalls darauf schliessen lässt, dass die Relaxationszeit der Erdkruste etwas zu gross angenommen wurde. Wollte man, wie *P. Caloi* a.a.O. auf einen Wert von $\varepsilon = 0,0003$ kommen, so müsste man eine Relaxationszeit von etwa $6 \cdot 10^{-3}$ sec annehmen. Ihr entspräche eine Untergrenze von $T > 0,018\ 849 \dots$ sec für die Weiterleitung der Perioden als Oberflächenwellen. Diese kleine Unstimmigkeit mag wohl darin begründet sein, dass *Caloi* die Beziehung $\lambda' = -2/3 \cdot \lambda$ annimmt, die, wie schon erwähnt, nur für Gase mit drei Freiheitsgraden giltig ist.

Im Grenzfall des Aufhörens der Wellenbewegung, also dann, wenn $1 - \pi^2 \delta^2 = 0$ oder $\tau = 1/\pi \cdot T$ ist, wird die Dämpfung dem Betrag nach zu $\varepsilon = 1/\tau$, nimmt also einen verhältnismässig grossen Wert an.

Mit zunehmender Viskosität nimmt die Dämpfung sehr stark zu, und die sich verlangsamenden Wellenzüge würden schon aus diesem Grunde sehr bald ausgetilgt sein.

16. Durch das Aufstellen der Partikularlösungen ist noch nicht viel gewonnen, denn die Natur bietet nur die Lösungen von Anfangs- und Randwertproblemen. Um auch in der Theorie solche Probleme behandeln zu können, muss man von der allgemeinen Lösung statt von partikularen ausgehen. Man wird also die in m'' steckende Willkür der Lösungen [149] ausnutzen und alle, zu den verschiedenen (kontinuierlichen) m'' — Werten gehörigen Lösungen [149] superponieren, d. h. das bestimmte Integral von 0 bis ∞ bilden, wobei die willkürliche Konstante C als Funktion von m'' aufzufassen ist. Die so

gewonnene allgemeine Lösung muss dann den Anfangs- und Randbedingungen angepasst werden.

Entscheidend ist, dass m'' auch in ε steckt, d. h. dass die ein Kontinuum bildenden Glieder nach Massgabe des Parameters m'' (bzw. nach Massgabe der Wellenlänge L) verschieden stark extinguiert werden. Kurze Perioden (d. h. auch kleine Wellenlängen) werden zeitlich schneller ausgetilgt. Physikalisch bedeutet dies eine Deformation des Wellenzuges im Sinne einer Glättung und Abflachung bzw. einer Verlängerung der « Periode », wenn es sich um periodische Vorgänge handelt. Reinperiodische Vorgänge bedürfen keiner Integraldarstellung, werden lediglich gedämpft, behalten aber naturgemäss ihre Periode bei. Die Verhältnisse liegen hier ähnlich wie bei der Entwicklung willkürlicher, periodischer Funktionen in eine Fourier-Reihe. Periodische Funktionen lassen sich in eine Fourier-Reihe entwickeln; eine Funktion aber, die schon von sich aus die Form eines der Glieder der Fourier-Entwicklung hat, kann nicht entwickelt werden, bzw. die Entwicklung reduziert sich auf ein einziges Glied und wird zu einer Identität.

Hierin liegt der grosse Vorteil der periodenabhängigen Dämpfungskonstanten. *O. Förtsch* hat in einem Vortrag anlässlich der 19. Tagung der Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft Oktober 1953 in Hannover gegen die Theorie der Visko-Elastizität eingewendet, die Theorie sei nicht geeignet, die tatsächlichen Vorgänge wiederzugeben. Er könne sich z. B. bei einer periodischen Störung (etwa von der Form einer « Sägekurve ») eine Periodenänderung — hier Periodenverlängerung — nicht vorstellen, da « einzelne Zähne ausfallen müssten, um den übrigbleibenden Platz zu einer Vergrösserung zu geben ». Eine solche Vorstellung wäre absolut unphysikalisch. Natürlich würden nie einzelne Perioden zugunsten der restlichen « ausscheiden », sondern der ganze Wellenzug als solcher wird langsamen und stetigen Deformationen unterliegen. Dass es so etwas gibt, dass dieser Umstand sogar sehr störend für die Identifizierung gleicher Wellen an verschiedenen seismischen Stationen ist, hat bereits *Galitzin* in der Frühzeit seismologischer Forschung hervorgehoben.

Bei periodenunabhängiger Dämpfung, wie sie *O. Förtsch* [1] propagiert, begibt man sich dieses Vorteiles, abgesehen davon, dass man auch sonst den Rahmen des physikalisch Gewohnten verlässt.

Auch die übrigen Einwände von Förtsch sind nicht stichhaltig. Wenn er darauf hinweist, dass die Beziehungen $\mu' = \tau \mu$, $\lambda' = \tau \lambda$ der Gleichung $3\lambda' + 2\mu' = 0$ widersprechen, so kann nur nochmals gesagt

werden, dass diese letztere Beziehung für Körper, wie sie hier angenommen werden, gar nicht gilt. Völlig abwegig aber ist eine Argumentation, die sich an die Grösse τ anschliesst.

Die Relaxationszeit τ für Quecksilber wurde von mir seinerzeit mit allen Vorbehalten abgeschätzt (siehe (9), Seite 19, oben) und es ergab sich $\tau < 7,4 \cdot 10^{-9}$ sec. Dies geschah, um überhaupt einen Anhaltspunkt für die Grössenordnung von τ für irgendeine bekannte Substanz zu gewinnen. Aus der Tatsache nun, dass die Hebung der Fenoskandinavischen Platte auf einen Viskositätskoeffizienten von etwa 10^{21} bis 10^{22} a. E. führt (¹²), glaubt Förtsch auf einen Widerspruch zu dem oben angeführten Wert der Relaxationszeit von Quecksilber schliessen zu sollen, weiterhin aber auch auf die Nichteignung der Theorie der visko-elastischen Medien zur Beschreibung geophysikalischer Vorgänge. Beide Grössen: Relaxationszeit und Viskositätskoeffizient stellen aber physikalisch ganz verschiedene Begriffe dar, genau so verschiedene wie etwa Kraft und Arbeit, die miteinander überhaupt nicht kommensurabel sind. Man darf sie daher auch nicht miteinander verwechseln oder, wenn sie zahlenmässig nicht übereinstimmen, den Schluss ziehen, dass sie falsch sind, oder dass die Theorie, aus der heraus sie bestimmt werden können, falsch sei — es sind eben ganz verschiedene Dinge.

Förtsch versucht auch (¹¹), den *Jeffrey'schen* Ansatz für firmo-elastische Körper durch eine vermeintlich bessere Annahme zu ersetzen. Leider vermisst man eine klare Formulierung seiner Annahme — er beschränkt sich auf die Bemerkung, man könne, ähnlich wie es bei der gleitenden Reibung geschieht, Reibungskraft und Spannung proportional setzen gemäss $R = rP$, wo r den Reibungskoeffizienten bedeuten soll. So erhalte man eine frequenzunabhängige Absorption. Abgesehen davon, dass es sehr gewagt ist, das Bild von den aufeinander mit Reibung gleitenden Granitblöcken (a.a.O., S. 64) auf elastische Verformungen zu übertragen, wird auch nicht gesagt, was unter « Reibung », was unter « Spannung » verstanden werden soll. Soll P die Komponenten des Spannungstensors darstellen, so müsste, ein universelles r vorausgesetzt, auch ein « Reibungstensor » bestehen, und davon ist nicht die Rede. Oder soll R eine « gewöhnliche » Kraft mit drei Komponenten darstellen, dann müsste r Tensorcharakter haben — auch dafür fehlt in der angeführten Arbeit jeglicher Hinweis. Die mit der Gleichung $R = rP$ zu verknüpfenden Vorstellungen sind also äusserst vage. Auch aus dem von Förtsch angeführten « einfachsten

Beispiel » für ebene Transversalwellen wird man nicht viel entnehmen können. Die Schwingungsgleichung soll lauten

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \pm r \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

wobei sich das Vorzeichen des Gliedes auf der rechten Seite nach dem Vorzeichen der momentanen Geschwindigkeit richten soll — die Differentialgleichung muss also sozusagen selbst wissen, wann sie das obere, wann das untere Zeichen annimmt (!). « Die Geschwindigkeitswerte, Phasen- und Gruppengeschwindigkeit, werden durch die Reibung nicht beeinflusst ». Man braucht die als Musterbeispiel angeführte Gleichung nur in der Form

$$\frac{\rho}{\mu(1 \pm r)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

anzuschreiben, um sofort zu erkennen, dass die Phasengeschwindigkeit

$$V_{\text{Tr}} = \sqrt{\frac{\mu(1 \pm r)}{\rho}}$$

sehr wohl von der Reibung (d. h. vom Reibungskoeffizienten) abhängt. Darüber hinaus zeigt ein Blick auf die Form der Gleichung, dass sie Absorption nicht zulässt — die Einführung der Grösse r läuft in der hier vorgeschlagenen Form auf eine Änderung in der Definition des Starrheitsmoduls hinaus. So geht es also nicht. Und solange man keinen besseren und auch voll durchrechenbaren Ansatz zur Verfügung hat, ist es immer noch zweckmässiger, zur Beschreibung der im Erdinnern stattfindenden elastischen Verformungen auf das firmo-elastische Medium zurückzukommen, zumal hier die Untersuchungen über die zu wählenden Materialkonstanten erst in den Anfängen stecken.

ZUSAMMENFASSUNG

In einem ersten einleitenden Abschnitt wird auf die Grundbegriffe eingegangen, insbesondere werden die Möglichkeiten für die Beziehung Spannung-Deformation erörtert, die Grenzen für das

Hooke'sche Gesetz werden angegeben. Näher betrachtet werden die Ansätze von Maxwell, von Larmor-Jeffreys und von Galitzin für energie verzehrende Medien. Im zweiten Abschnitt wird der Galitzin'sche Ansatz für ein « Medium mit Reibung » vollständig durchgerechnet. Es wird erkannt, dass die Dämpfung der Wellen von der Frequenz nicht abhängt, ebenso die Phasengeschwindigkeit. Der dritte Abschnitt befasst sich mit dem firmo-elastischen Medium. Das Aufstellen der Particularlösungen der Impulsgleichungen hängt von der Auflösung einer algebraischen Gleichung 9. Grades ab, die sich erst dann auf die bekannte Rayleigh'sche Gleichung 5. Grades reduziert, wenn man für die Viscositätskonstanten bestimmt Spezialisierungen vornimmt. Die Theorie der cubischen Gleichung, die als Parameter die Poisson'schen Konstante 6 enthält, wird entwickelt, die Particularlösungen werden aufgestellt. Die Dämpfung erweist sich als abhängig von der Periode, Dämpfung und Phasengeschwindigkeit enthalten das Verhältnis Relaxationszeit: Periode, von dem das physikalische Verhalten des Mediums stark beeinflusst wird.

RIASSUNTO

Nel primo capitolo preliminare vengono discusse le fondamentali ipotesi e nozioni sulla propagazione di onde superficiali in mezzi non perfettamente elastici, con particolare riguardo alle possibilità per la relazione tensione-deformazione; vengono inoltre indicati i limiti di validità della legge di Hooke. Vengono accuratamente discusse le teorie di Maxwell, di Larmor-Jeffreys e di Galitzin per mezzi con assorbimento di energia.

Nel secondo capitolo si sviluppa estesamente l'ipotesi di Galitzin per un mezzo che ammette attrito interno. È supposto che lo smorzamento delle onde non dipenda né dalla frequenza, né dalla velocità di fase.

Il terzo capitolo riguarda i mezzi firmo-elastici. La ricerca di soluzioni particolari dipende dalla risoluzione di un'equazione algebrica di nono grado, che, con l'introduzione di alcune semplificazioni circa le costanti di viscosità, è riducibile alla ben nota equazione di Rayleigh di terzo grado. Viene sviluppata la teoria dell'equazione cubica, contenente la costante di Poisson come parametro, e determinate le soluzioni particolari. Lo smorzamento risulta dipendente dal periodo.

Lo smorzamento e la velocità di fase contengono la relazione « tempo di rilassamento: periodo », che esercita una influenza considerevole sul comportamento fisico del mezzo.

SUMMARY

In a first preliminary chapter the fundamental conceptions, especially the possibilities for the relation tension-deformation are discussed, the limits for the law of Hooke are indicated. The position of Maxwell, of Larmor-Jeffreys and of Galitzin for energy-absorbing media are examined more closely. In the second chapter the position of Galitzin for a medium with friction is completely treated. It is admitted, that the damping of waves does not depend of the frequency neither the velocity of phases. The third chapter is treating the firmo-elastic medium. The setting up of the particular solutions depends of the solution of an algebraic equation of the ninth degree, which is reduced to the well-known equation of Rayleigh of 3rd degree only, if certain specialisations are made for the constants of viscosity. The theory of the cubic equation which contains the constant of Poisson as parameter is developed, the particular solutions are set up. The damping proves dependent of the period. Damping and phase-velocity contain the relation « relaxation time: period », which is exerting a considerable influence on the physical conduct of the medium.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) J. C. MAXWELL: *Phil. Mag.* 35, 134, 1868.
- (2) P. CALOI: *Sull'attrito interno nella crosta terrestre*. La Ricerca Scientifica, anno 14, Nr. 1, 1943.
- (3) B. GUTENBERG: *Physic of the Earth, VII*, McGraw-Hill Book Comp., New York and London, 1939.
- (4) H. JEFFREYS: *The Earth, 2^d Edition*. Cambridge 1929.
- (5) W. VOIGT: *Über die innere Reibung der festen Körper*. *Abh. d. Königl. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen* 36, 1889.
- (6) G. H. C. TOMPSON: *On the Theory of Visco-Elasticity*. *Phil. Trans. (A)*, 231, 339, 1933.
- (7) G. G. STOKES: *Trans. Cambridge Phil. Soc.* vol. 8, Part III, 1845, 287-319.
- (8) B. GALITZIN: *Vorlesungen über Seismometrie*. Leipzig 1914, daselbst auch Hinweise auf andere Arbeiten.

(9) E. HARDTWIG: *Die Wellenausbreitung in einem visko-elastischen Medium*. Ztschr. f. Geophysik, Jg. 18, Heft 1/2, 1943.

(10) P. CALOI: *Comportamento delle onde di Rayleigh in un mezzo firno-elastico indefinito*. Annali di Geofis. 1. Nr. 4, 1948.

(11) LORD RAYLEIGH: *On Waves Propagated along the Plane Surface of an Elastic Solid*. Lond. Math. Soc. Proc. 17, 1885; 30, 1899.

(12) H. LAMB: *On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid*. Phil. Trans. (A), 203, 1904.

(13) K. ULLER: *Elastische Oberflächenwellen*. Ann. d. Physik, Bd. 56, 1918.

(14) O. FÖRTSCH: *Beiträge zur Ausbreitung elastischer Oberflächenwellen*. Ztschr. f. Geophysik, Sonderband 1953.

(15) E. NISKANEN: *On the Viscosity of the Earth's Interior and Crust*. Publ. Isostat. Inst. of the Intern. Assoc. of Geodesy, Nr. 20. Helsinki 1948.

— *On the elastic Resistance of the Earth's Crust*. Ebenda, Nr. 23, Helsinki 1949.