

## FORMATION DES FISSURES PRIMAIRES DE L'ÉCORCE TERRESTRE

MATTHIAS MATSCHINSKI

§ 1. *Fissures primaires et fissures secondaires. Fissures de premier type et de seconde type. Considérations générales.* --- Dans tout ce qui suit, nous distinguons entre fissures primaires et fissures secondaires en introduisant ces expressions dans le sens suivant. Nous appliquons l'expression *fissure primaire* aux fissures apparues et en grande partie formées sans influencer (ou presque sans influencer) les unes sur les autres. Elles surgissent sous l'influence de forces encore presque uniformes sur toute l'écorce terrestre. Le fait qu'elles commencent à se former en tel ou tel endroit est déterminé par la distribution non-uniforme de la solidité de l'écorce liée aux variations locales de son épaisseur ou de ses propriétés physiques. Au contraire la naissance des fissures qui surgissent après la formation de ces fissures primaires est due aux inégalités de la disposition géométrique des forces. En fait, lorsque quelques fissures sont formées, les forces ne peuvent rester uniformément distribuées sur l'écorce, — les parties de cette dernière au voisinage des fissures sont déjà déchargées en direction perpendiculaire aux fissures, tandis que dans d'autres parties de l'écorce les forces peuvent encore augmenter. C'est pourquoi il convient de nommer toutes ces fissures dont la formation est due à l'existence des fissures primaires, *fissures secondaires*. Elles peuvent apparaître soit sous forme de bifurcation simultanées (fig. 1a), ou de bifurcation retardées (fig. 1b) soit même sans toucher, au premier moment, d'autres fissures (fig. 1c). Au contraire le cas de la fig. 1d représente les fissures primaires.

Du point de vue des applications (en géographie, en géophysique, en géologie, etc.) ce sont les fissures primaires qui déterminent les grands traits de l'écorce terrestre, comme dans toute autre écorce (bombes volcaniques « à croûte de pain », corps expérimentaux, etc.). Du point de vue mathématique ce sont aussi les fissures primaires dont la théorie est de beaucoup la plus simple en raison de la symétrie approximative des forces qui provoquent ces fissures, tandis que les fissures secondaires sont provoquées par des forces essentiellement asymétriques. C'est pourquoi pour décrire l'état au moment de la nais-

sance des fissures primaires, on peut introduire, comme première approximation, la condition de symétrie sphérique dans les équations du

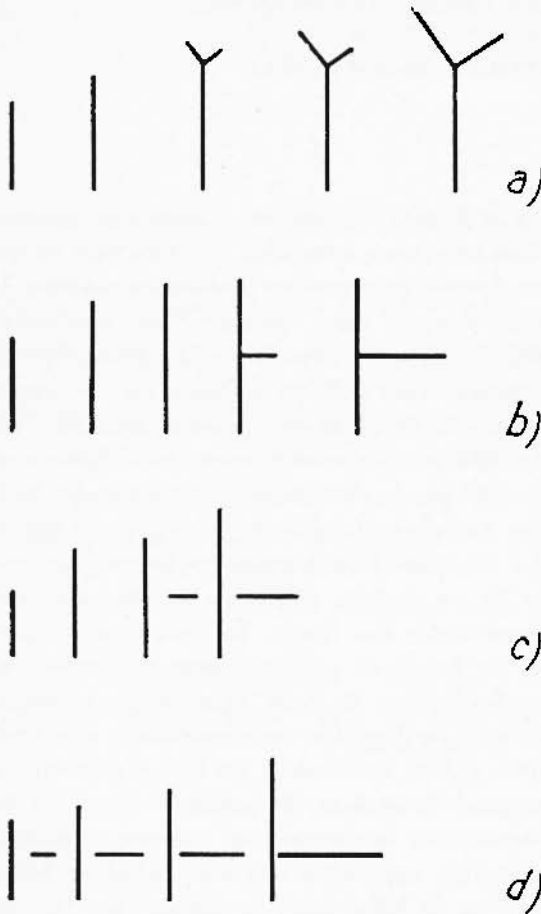


Fig. 1

Soulignons seulement que les fissures primaires peuvent être aussi bien du premier que du second type, comme on le verra plus loin. La même chose est vraie des fissures secondaires.

(\*) Dans la note citée (1), décrivant les bombes volcaniques avec les fissures de ces deux types, nous avons appliqué l'expression « la fissure primaire » pour « la fissure de premier type » et l'expression « la fissure secondaire » pour celle « de second type ». Ici nous préférons employer seulement les expressions « de premier type » et « de second type » pour indiquer la différence des propriétés des fissures au sens de la note (1), et conserver les expressions « primaire », « secondaire » pour la distinction liée à l'époque de l'apparition des fissures, comme nous venons de les définir au début du paragraphe.

problème, ce qui est entièrement impossible pour les fissures secondaires.

Mais on doit clairement distinguer que cette différence entre fissures primaires et secondaires n'est pas la différence entre fissures « de premier type » et « de second type » décrite par l'auteur (1) (\*). Cette dernière est la différence entre une fissure « ouverte » (voir la fig. 2a) et une fissure aux « versants » perpendiculaires à la surface du corps (fig. 2b). Les détails sont décrits dans la note citée (1) et dans notre étude sur les bombes volcaniques prises comme modèles approximatifs de la terre (2), nous n'y revenons pas ici.

Pour beaucoup de raisons parmi lesquelles la plus importante est la nécessité d'appliquer des méthodes mathématiques très différentes, il convient de considérer séparément le cas des fissures primaires et celui des fissures secondaires. Et dans la présente étude nous ne considérons que les primaires.

Il est clair que *prima causa* de ce phénomène de fissuration est le régime thermique du globe terrestre; c'est la distribution des températures, qui détermine

les tensions éventuelles; sans ces tensions l'apparition de fissures est imaginable. Or, les mesures directes ne nous donnent que la distribution des températures dans la couche d'épaisseur minimale en comparaison avec les 6000 km environ du rayon terrestre. Beaucoup d'essais théoriques ont été faits (2, 3, 5, 6) pour déter-

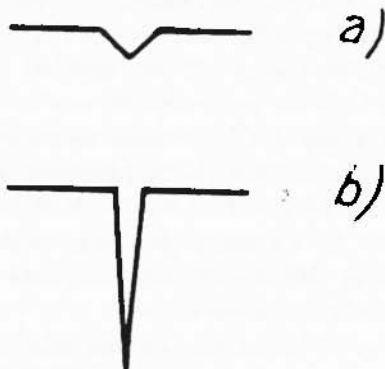


Fig. 2

miner cette distribution à l'aide de telles ou telles autres données d'observation indirectes. Les plus connues sont les six résultats suivants: I. La courbe de Holmes (7), la plus ancienne peut-être, qui ait encore conservé de l'intérêt de nos jours; II. La courbe d'Adams (8); III. Celle de Jeffreys (9, 10) appliquée par son auteur au problème de déformations (11) et développée après lui par Bullard (12); IV. De Wolff (13); V. De Gutenberg (14, 15). Toutes ces courbes ont été calculées en partant des considérations purement mécanique et thermique; là où la radioactivité a été prise en considération on l'a pris seulement en qualité d'un générateur de chaleur. La dernière possibilité VI — possibilité d'un calcul basé sur les considérations de la théorie de la conductibilité électrique existe — elle est fondée sur les résultats de Chapman (16) et de ses collaborateurs et récemment reprise par Rikitake (17, 18). Birch (19) et Verhoogen (20, 21) se sont occupés de la distribution subcrustale des températures. En liaison avec la dernière publication de Verhoogen on doit citer Valle (22, 23). La méthode de Jeffreys a été récemment reprise par Wilson (24) et Schneidegger (25). Le problème des tensions (problème qui consiste à calculer les tensions d'après telle ou telle autre distribution admise) a été également

le sujet de nombreuses publications, qui commencent par celles de Davison C. <sup>(26)</sup> et Darwin G. <sup>(27)</sup> faites encore en XIX siècle. Parmi les contemporains citons Jeffreys <sup>(11, 28)</sup> (modèle très connu), Coulomb <sup>(29)</sup> (sphère du liquide visqueux sans l'écorce), Schneidegger <sup>(30)</sup> (écorce incompressible et noyau compressible). En liaison avec tout ce problème des températures et des tensions on doit encore mentionner: Lord Rayleigh <sup>(30)</sup>, Lowan <sup>(31, 32, 33)</sup>, Slichter <sup>(34)</sup>, Urry <sup>(35)</sup>, Gentry <sup>(36)</sup>, Kuhn et Rittmann <sup>(37)</sup>, enfin Umbgrove <sup>(38)</sup>. On peut en avoir un aperçu dans le livre très intéressant de Wasiutinski <sup>(39)</sup>. Mais malheureusement tous ces résultats diffèrent sensiblement les uns des autres. Ce n'est pas étonnant, car — faute de mesures directes — ils sont basés sur des hypothèses fortuites et très différentes. De plus, on ne doit pas oublier que le problème se complique essentiellement, si on se place au point de vue de la théorie de courants subcrustaux, théorie dont les éléments on trouve déjà chez Pekeris <sup>(40)</sup> et qui a été largement développée dans sa partie mathématique et géophysique par Vening Meinesz <sup>(41, 42)</sup>.

Pour toutes ces raisons on doit essayer de revoir toute la question en s'efforçant d'éliminer les hypothèses intermédiaires sur la distribution des températures dans l'intérieur du Globe.

Pour la description complètement exacte du processus de refroidissement de l'écorce et de formation des fissures, ce sont les équations thermocinétiques sur lesquelles on doit se baser. Ces équations réunissent en un seul système les équations de la mécanique et celles de la théorie de la conductibilité de la chaleur: ce système est très compliqué et même non-linéaire. Cependant ce ne sont pas seulement les difficultés de résolution du système des équations thermocinétiques qui nous forcent à introduire des simplifications dans ce système, mais surtout des considérations purement théoriques et générales. En effet un tel système contient entre autres de très nombreux états qui ne se réalisent jamais dans les cas qui nous intéressent.

De plus, il n'est pas toujours convenable de prendre en considération même les états et les distributions qui se réalisent. C'est le théorème bien connu de Stokes <sup>(43, 44)</sup> qui nous permet de nous limiter dans nos considérations à l'écorce proprement dite et à la couche peu épaisse des parties liquides sousjacentes. Dans les cas stationnaires ou quasi-stationnaires — et comme on le verra, nous nous bornerons plus bas à de tels cas — le théorème de Stokes est applicable dans sa forme classique. De fait, l'équation de la conductibilité de chaleur se dégénère dans ces cas et prend la forme d'une simple équation poten-

tielle:  $\Delta T = 0$  (voir l'alinéa suivant). Grâce à cette forme simple ( $\Delta T = 0$ ), on peut laisser de côté différentes généralisations du théorème de Stokes et se baser ici simplement sur le théorème classique. Comme il est connu / voir (44) /, la théorème de Stokes prouve que n'importe quelle redistribution des sources thermiques (les masses - les sources du potentiel) ne change pas le champ des températures externes (du potentiel) sous les conditions: 1) que le flux total de la chaleur à travers la surface englobant les sources n'ait pas varié et 2) que cette surface même (— surface isothermique) n'ait pas non plus changée pendant lesdites redistributions. Le flux total de chaleur passant dans le milieu ambiant dégagé par la Terre est bien connu (\*); beaucoup mieux que la distribution des sources énergétiques dans le noyau. Se borner aux domaines à quelques dizaines de kilomètres au dessous de la surface est également beaucoup plus facile que faire des hypothèses incontrôlables sur les températures des couches profondes du noyau. Alors, le théorème de Stokes nous permet d'accepter pour instant des hypothèses complètement arbitraires; si les conditions que nous venons de mentionner sont réalisées, le résultat du calcul sera exact. Pour cette raison nous avons déjà appliqué ce théorème dans notre note (45), et nous agissons dans le même sens ici.

En considérant seulement l'écorce même et les couches proches sous-jacentes liquides, nous pourrions faire une autre simplification importante, notamment la simplification qui nous donnera la possibilité de considérer l'équation de la conductibilité de chaleur sous sa forme la plus simple ( $\Delta T = 0$ ), mentionnée déjà ci-dessus.

Considérons la fig. 3, représentant la coupe de l'écorce  $00'$  et des couches sous-jacentes  $AB$ ,  $A'B'$ , etc. Dans les couches liquides ou semi-liquides surgissent les courants de convection apportant la chaleur vers l'écorce. Etant donnée la masse spécifique différente de ces couches  $AB$ ,  $A'B'$ , etc. et l'agitation thermique intensive durant le temps proche à la naissance de l'écorce (et c'est la période qui nous intéresse ici), la formation des courants de convection de la forme  $abcd$  est très peu probable; ce sont les courants de la forme  $efgh$  qui se produisent (\*\*). Ces courants  $efgh$  peuvent être considérés, comme on le fait

---

(\*) Il ne s'agit pas ici de fixer la valeur du flux que nous introduisons dans notre calcul: la valeur d'aujourd'hui ou la valeur augmentée d'après telle ou telle autre hypothèse. Il s'agit plus de fait que, dans tous ces cas, on peut admettre une valeur constante pendant le temps de la formation de fissures.

(\*\*) Il est nécessaire de souligner qu'avec cette remarque nous ne nous opposons

habituellement, comme quelque sorte des « tourbillons » de Bénard (46).

Sans entrer dans le détail sur les formes et sur le caractère du mouvement de ces « tourbillons »  $efgh$ , on peut remplacer le courant global dû à la convection dans l'espace  $CDEF$  à un vecteur dont la direction coïncide avec celle de  $r$ . Dans le cas d'un corps sphérique (p. e. la Terre) cette grandeur  $r$  n'est que le rayon. C'est pourquoi dans un

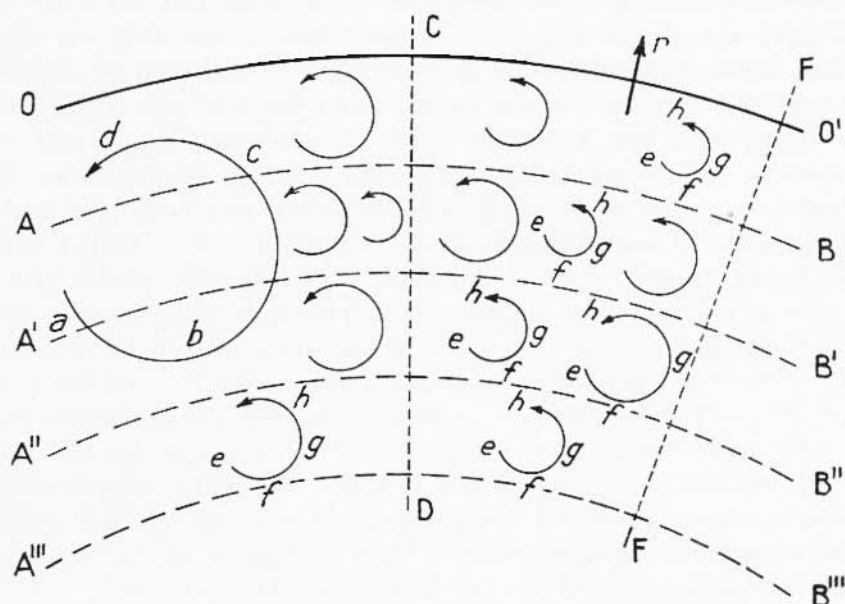


Fig. 3

corps sphérique en voie de refroidissement les courants de chaleur: 1) courant de convection globale et 2) courant de conductibilité, coïncident en direction: le premier comme le second suivent les rayons de la sphère orientés vers l'extérieur. Soit  $Q_1$  le premier,  $Q_2$  le second courant,  $Q = Q_1 + Q_2$  leur somme qui détermine le changement de la température:

$$\operatorname{div} Q = c \frac{\partial T}{\partial t} \quad [1]$$

pas l'existence des courants subcrustaux à grande échelle (comme ceux considérés p.e. par Vening Meinesz). Nous insistons seulement que l'effet du transport est dû aux courants de la fig. 3, mais non aux courants ayant des dimensions considérables.

( $T$  température,  $t$  temps,  $c$  chaleur spécifique).  $Q_1$  est déterminé par le gradient thermométrique:

$$Q_1 = k_1 \text{ grad } T, \quad [2]$$

$Q_2$  par la vitesse moyenne  $v$  de la convection:

$$Q_2 = c_1 v; \quad v = a \text{ grad } \left( \frac{1}{\rho} \right) \quad [3]$$

où  $\rho$  est la densité. Cette dernière déterminée de nouveau par la température:

$$\frac{1}{\rho} = b_1 T + b_2 \quad [4]$$

nous permet, dans le cas de la coïncidence des directions de  $Q_1$  et  $Q_2$ , d'écrire l'expression pour le courant total:

$$Q = Q_1 + Q_2 = (k_1 + c_1 a b_1) \text{ grad } T \quad [5]$$

De cette expression [5] avec [1] on tire définitivement:

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div} / (k_1 + c_1 a b_1) \text{ grad } T \cong (k_1 + c_1 a b_1) \Delta T \quad [6]$$

équation de la conductibilité, dans sa forme classique, avec la seule différence qu'au lieu de la conductibilité  $k_1$  on voit la somme  $k_1 + c_1 a b_1$  exprimant la « conductibilité totale » par la conductibilité proprement dite et par la « conductibilité » conventionnelle de la convection. Pour cette conductibilité totale nous introduisons la lettre  $k$  sans indice. Il est facile de voir que pour la partie solide (c'est-à-dire pour l'écorce elle-même) la grandeur  $k$  se réduit à  $k_1$ , la convection n'existant pas. Aussi, bien que la conductibilité classique  $k_1$  soit moins élevée pour les liquides que pour les solides:

$$k_{l,1} < k_{l,s} \quad [7]$$

il en va tout autrement avec la grandeur  $k$ :

$$k_l \gg k_s. \quad [8]$$

l'inégalité étant d'autant plus marquée que l'agitation du liquide est plus intense. Enfin, en égard aux sources de chaleur dégagée dans le noyau, l'équation [6] s'écrira:

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = k \Delta T + S(t, x, y, z), \quad [9]$$

où  $S$  est l'intensité de ces sources. Pour les processus stationnaires, et quasi-stationnaires, d'après le théorème classique de Stokes, il n'est pas nécessaire de chercher à établir la vraie distribution des sources et des températures dans le noyau. Au contraire on peut prendre telle distribution qui facilite la résolution (voir (45)). Nous ne revenons pas sur ce problème partiel ici en dépit de tout son intérêt pro-

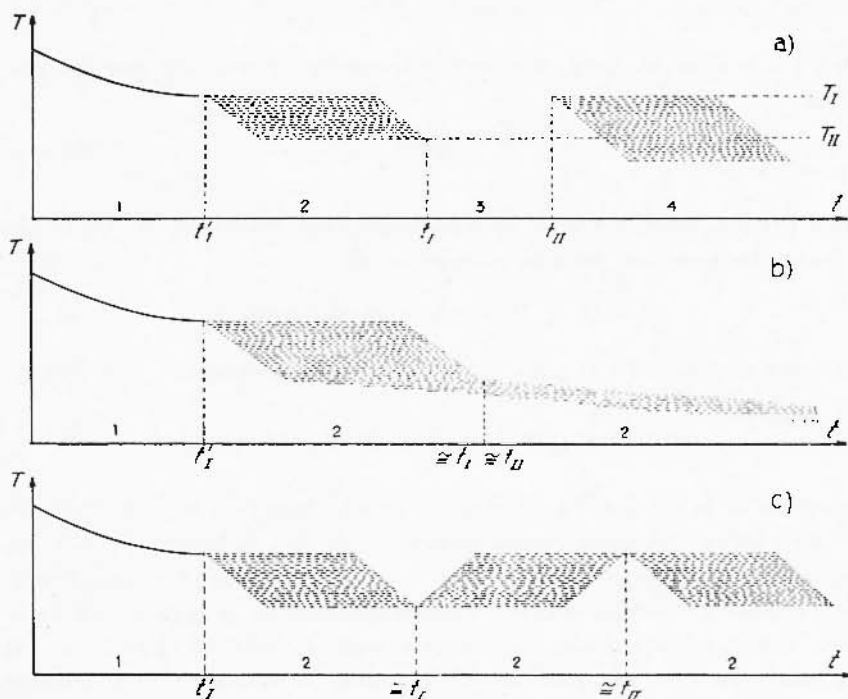


Fig. 4 - 1) Etats non stationnaires; 2) Etats quasi-stationnaires; 3) Etats non stationnaires; 4) Etats quasi-stationnaires.

pre, parce que le vrai problème de la formation des fissures est le problème des équations de la mécanique, où l'on doit introduire les changements de volume, déterminés par les changements de la température / selon [4] /. En ce qui concerne le calcul de la température, ce calcul est lié à l'équation [9]. Mais à cause de l'extrême lenteur de ces changements le processus thermique n'est que le processus quasi-stationnaire ou presque stationnaire. Par l'expression « *quasi-stationnaire* » nous entendons le processus composé des processus purement stationnaires, c'est-à-dire, le processus de changements tellement lents que à chaque instant donné la distribution des



températures est une distribution stationnaire, en dépit de ces changements. Ce processus quasi-stationnaire peut être illustré, pour le cas du refroidissement de la Terre, par les figs. 4a, 4b et 4c où trois variantes possibles de ce phénomène sont représentées. La fig. 4a est empruntée à notre note (45).

Pour un tel processus quasi-stationnaire la distribution particulière de la température sera donnée par l'équation [9] / où  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$  / de façon très exacte. Mais le changement avec le temps reste indéterminable à l'aide de [9], il n'est déterminé que par le changement de  $S$  avec le temps. Au cas où  $S$  est provoqué par l'activité radioactive, ce changement est de la forme d'une fonction exponentielle, en cas d'autres hypothèses, il sera de telle ou telle autre forme plus compliquée. Nous n'entrons pas ici dans tout ce détail; ces questions sont étudiées ailleurs. Ici nous prenons ce changement de la température comme une fonction donnée: fonction à variation extrêmement lente.

On peut aller encore plus loin dans la voie des simplifications. Comme un cas limite parmi les possibilités de traiter notre problème d'une façon thermocinétique (voir § 3) on peut considérer le cas d'une sphère, dont le processus de solidification consiste en une suite d'états non seulement thermocinétiquement stables mais, plus simplement encore, isothermiques. Dans un tel cas il s'agit d'une solidification infiniment lente, tous les courants de chaleur étant infiniment petits, et la seule grandeur thermique qui ne doit pas être négligée est le changement de volume au point de fusion.

Certes, la solidification se propage en réalité avec une vitesse finie donnant lieu à des courants de chaleur qui ne sont pas infiniment petits; mais, à titre de description approximative des processus lents, le cas de la solidification à température constante peut être intéressant.

Ce cas ne se réalise naturellement pas pour la Terre, mais il est facilement réalisable par l'expérience et de plus il est une réalité pour certaines bombes volcaniques. Enfin, ce processus « isothermique » présente les moindres difficultés du calcul. Nous le considérons en détail dans le paragraphe suivant (§ 2). Dans le § 3 nous revenons au cas plus général d'un processus « quasi-stationnaire ».

§ 2. *Refroidissement « isothermique ». Formation des fissures du premier type.* — Nous avons déjà parlé plus haut des « équations de la mécanique » qui doivent être appliquées. La mécanique des corps solides connaît deux espèces de telles équations: équations de l'élasti-

cité et équations de la plasticité. Tandis que les premières sont applicables sans conditions spéciales l'application des secondes est inséparablement liée à la condition dite de Tresca (47) - Saint-Venant (48, 49) dans sa forme ancienne ou dans la forme donnée par Huber (47) - Mises (49, 50). Quelle qu'en soit la forme, cette condition exige toujours soit un état très tendu soit un état sous grand pression. Aux époques voisines de la naissance de l'écorce terrestre tel n'est pas le cas. C'est seulement longtemps après qu'on peut attendre les pressions

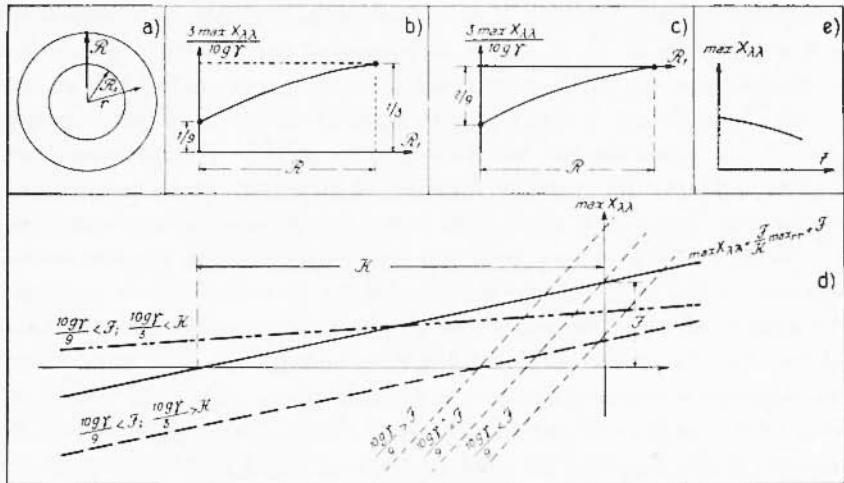


Fig. 5

ou les tensions. De plus, les roches ne peuvent être tendues plastiquement, elles se rompent avant de couler. Ce n'est que sous la pression de tous côtés que les roches coulent. Pour toutes ces raisons il convient pour traiter la question de la fissuration, de se limiter à l'emploi des équations de l'élasticité; aux premiers stades elles sont seules applicables. Certes, lors de l'apparition des grandes pressions les équations de la plasticité doivent être ajoutées; mais, comme nous le verrons, ce sont des tensions, et non pas des pressions qui apparaissent.

Partons donc des équations de l'élasticité, mais supposons de surcroît que la partie solidifiée (décrite par ces équations) a diminué à la solidification de la valeur  $\gamma$ , c'est-à-dire que le volume  $V$  (avant la solidification) devient après elle le volume  $V$  ( $1 - \gamma$ ).

Considérons le moment où la solidification de la sphère de rayon  $R$  a atteint les points se trouvant à la distance  $R_1$  du centre, le reste

de la sphère étant encore liquide (voir la fig. 5a). Si la cavité sphérique du rayon  $R_1$ , remplie en fait par un liquide, était vide, l'écorce diminuerait dans le rapport  $\gamma$ . Mais en fait cette écorce, étant remplie par un liquide peu compressible, sera tendue par les pressions très élevées qui peuvent se produire dans cette dernière. Il est évident que pour cette sphère liquide de rayon  $R$ , on a :

$$u_1 = \frac{p_1 R_1}{3k} \quad [1]$$

où  $u_1$  est le déplacement de la surface de cette sphère provoqué par la pression  $p_1$ ,  $k$  le module de la compressibilité de volume.

Nous n'écrivons pas les équations de l'élasticité sous leur forme complète (voir, p. e. (17)). D'après la remarque du § 1 sur l'étude des fissures primaires, on peut introduire les conditions de la symétrie sphérique, qui, appliquée aux équations de l'élasticité, permettent de transformer ces dernières dans le système (\*) suivant :

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 X_{rr}) = 2r X_{\lambda\lambda} \quad [2]$$

$$X_{rr} = 2G \left( \frac{\partial u}{\partial r} + 1/2 \theta \right); \quad X_{\lambda\lambda} = X_{\theta\theta} = 2G \left( \frac{u}{r} + \frac{1}{2} \theta \right) \quad [3]$$

$$\theta = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^3 u); \quad [4]$$

d'où il s'ensuit successivement :

$$r^2 u'' + 2r u' = 2u \quad [5]$$

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r^2} \quad [6]$$

Puisque l'on avait exprimé la position de la limite du liquide non comprimé en coordonnées déplacées de l'écorce, le déplacement de cette position sera évidemment  $R_1 \gamma$  3; le déplacement provoqué par

(\*) Dans ce système le coefficient de Poisson  $m$  est pris égal à 4 ce que est très proche à la valeur moyenne pour les roches — équations (3). — De plus, les forces de pesanteur ont été omises — équation (2), parce que l'influence de poids est minime pour les phénomènes de refroidissement et de fissuration de corps expérimentaux, même ayant des rayons jusqu'aux centaines de mètres. On ne peut naturellement négliger cette influence pour les corps célestes et pour la Terre. En considérant cette dernière, nous introduirons dans § 4 la correction provenant de l'action de poids.

la compression sera [1]; ainsi la position de la limite du liquide comprimé devra coïncider avec le déplacement de l'écorce à cette limite:

$$R_1 \gamma / 3 + u_1 \left| \begin{array}{l} = u \\ r = R_1 \end{array} \right|_{r = R_1} \quad [7]$$

Les pressions à cette limite étant aussi égales:

$$p_1 \left| \begin{array}{l} = X_r \\ r = R_1 \end{array} \right|_{r = R_1} \quad [8]$$

les formules [1] et [7] nous amènent à la première condition de la limite:

$$R_1 \gamma / 3 + \frac{R_1}{3k} X_r \left| \begin{array}{l} = u \\ r = R_1 \end{array} \right|_{r = R_1} \quad [9]$$

La deuxième condition est évidente:

$$X_{rr} \left| \begin{array}{l} = 0 \\ r = R_1 \end{array} \right. \quad [10]$$

En introduisant l'abréviation:

$$\frac{G}{3k} = \varepsilon; \quad [11]$$

on obtient de [10]

$$5 C_1 - \frac{4 C_2}{R^3} = 0; \quad C_2 = R^3 \frac{5}{4} C_1, \quad [12]$$

et de [9]:

$$C_1 = \frac{4 R_1^3 \gamma}{3/4 R_1^3 + 5 R^3 + 20 \varepsilon (R^3 - R_1^3)} \quad [13]$$

$$C_2 = \frac{5 R^3 R_1^3 \gamma}{3/4 R_1^3 + 5 R^3 + 20 \varepsilon (R^3 - R_1^3)} \quad [14]$$

Maintenant à l'aide de [6] on a les formules pour le déplacement conditionnel:

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r^2} = \frac{\gamma R_1^3}{3} \frac{4 R_1^3 \left( \frac{r}{R_1} \right) + 5 R^3 \left( \frac{R_1}{r} \right)^2}{4 R_1^3 + 5 R^3 + 20 \varepsilon (R^3 - R_1^3)}; \quad [15]$$

et pour le déplacement réel:

$$u_{\text{total}} = -\frac{R_1 \gamma}{3} + u. \quad [16]$$

Ensuite de [3] on tire:

$$X_{rr} = \frac{G \gamma}{3} \frac{20 R_1^3}{4 R_1^3 + 5 R^3 + 20 \varepsilon (R^3 - R_1^3)} \left[ 1 - \left( \frac{R}{r} \right)^3 \right]; \quad [17]$$

avec les corollaires:

$$\begin{aligned} X_{rr} & \left| \begin{array}{l} < 0; \text{ (pression); } u \\ r < R \end{array} \right. & \left| \begin{array}{l} -X_{rr} \\ r = R_1 \end{array} \right. & \left| \begin{array}{l} \frac{R_1}{3k} = R_1 \gamma / 3; \\ r = R_1 \end{array} \right. \\ X_{\theta\theta} & \left| \begin{array}{l} = 0; \\ r = R \end{array} \right. & & \end{aligned} \quad [18]$$

(le premier montre que  $X_{rr}$  est la *pression*) et:

$$\begin{aligned} X_{\lambda\lambda} = X_{\theta\theta} & = G \left( 5 C_1 + \frac{r'^2}{r^3} \right) = \\ & = \frac{G \gamma}{3} \frac{10 R_1^3}{4 R_1^3 + 5 R^3 + 20 \varepsilon (R^3 - R_1^3)} \left[ 2 + \left( \frac{R}{r} \right)^3 \right] > 0; \quad [19] \end{aligned}$$

d'où on constate que  $X_{\lambda\lambda}$  et  $X_{\theta\theta}$  sont les *tensions* en accord avec l'évidence.

Dans toutes ces expressions la grandeur [11] est très petite, étant donné que la compressibilité des liquides est négligeable en comparaison de la compressibilité des corps solides. Ainsi pour simplifier l'analyse, peut-on commencer l'étude des formules [17] et [19] en partant du cas d'un liquide incompressible ( $k = \infty$ ,  $\varepsilon = 0$ ). Ici la formule [17] se transforme en:

$$X_{rr} = \frac{20 G \gamma R_1^3}{3 (5 R^3 + 4 R_1^3)} \left[ 1 - \left( \frac{R}{r} \right)^3 \right], \quad [20]$$

(le maximum de  $X_{rr}$  au moment donné sera

$$\max X_{rr} \left| \begin{array}{l} = \frac{20 G \gamma (R_1^3 - R^3)}{3 (5 R^3 + 4 R_1^3)} < 0; \\ r = R_1 \end{array} \right. \quad [20a]$$

au point  $r = R_1$  et la formule [19] se simplifie en :

$$X_{\lambda\lambda} = X_{00} = \frac{10 G \gamma R_1^3}{3 (5 R^3 + 4 R_1^3)} \left[ 2 + \left( \frac{R}{r} \right)^3 \right]. \quad [21]$$

Le maximum de cette tension sera toujours au fond de l'écorce (au point  $r = R_1$ ; il sera égal à :

$$\max X_{\lambda\lambda} \left|_{r=R_1} = \max X_{00} \left|_{r=R_1} = \frac{10 G \gamma (2 R_1^3 + R^3)}{3 (5 R^3 + 4 R_1^3)} > 0 ; \quad [21a]$$

ayant le minimum à la surface :

$$\min X_{\lambda\lambda} \left|_{r=R} = \min X_{00} \left|_{r=R} = \frac{10 G \gamma R_1^3}{5 R^3 + 4 R_1^3} > 0. \quad [22]$$

Ces résultats / [20], [21], [21a] et [22] / sont représentés sur les figures 5b et 5c.

Enfin, pour le déplacement total on a dans ce cas :

$$u_{\text{total}} = - \frac{5 \gamma R^3 R_1}{3 (5 R^3 + 4 R_1^3)} \left[ \frac{r}{R_1} - \left( \frac{R_1}{r} \right)^2 \right] \quad [23]$$

expression qui a les propriétés évidentes :

$$\begin{aligned} u_{\text{total}} &= 0, \quad \text{si : } r = R_1 ; \\ u_{\text{total}} &< 0, \quad \text{si : } r > R_1. \end{aligned} \quad [24]$$

En revenant au cas le plus général on doit étudier les grandeurs :

$$\max X_{\lambda\lambda} \left|_{r=R_1} = 10/3 G \gamma M(R_1) ; \quad [25]$$

$$M_1(R) = \frac{2 R_1^3 + R^3}{4 R_1^3 + 5 R^3 + 20 \epsilon (R^3 - R_1^3)} ; \quad [26]$$

$$\min X_{\lambda\lambda} \left|_{r=R} = 10/5 G \gamma m(R) ; \quad [27]$$

$$m(R_1) = \frac{3 R_1^3}{4 R_1^3 + 5 R^3 + 20 \epsilon (R^3 - R_1^3)} . \quad [28]$$

Etant donné qu'au voisinage de  $R_1 = R$  on peut écrire :

$$\delta = R - R_1, \quad R_1^3 = R^3 - 2R^2\delta, \quad [29]$$

il est très facile de se persuader que :

$$M_1(R) = \frac{3R^3 - 4R^2\delta}{9R^3 - 8R^2\delta + 20\varepsilon \cdot 2R^2\delta} = 1/3 \quad [1 + \text{les termes négatifs}] \quad [30]$$

En général on a toujours :

$$M_1(R) < \frac{2R_1^3 + R^3}{4R_1^3 + 5R^3} = \frac{3}{10G\gamma} \max X_{\lambda\lambda} \Big|_{r=R_1} ; \quad [31]$$

sauf le cas où  $R_1 = R$ ; là on a :  $M_1(R) = 1/3$ . Mais revenons au cas du liquide incompressible.

Avant de tirer les conclusions des résultats [20a] et [21a], il est intéressant de faire encore une remarque.

Ayant calculé la dérivée  $\frac{d(\max X_{\lambda\lambda})}{d(\max X_{rr})}$  à l'aide de :

$$\frac{d(\max X_{\lambda\lambda})}{d(\max X_{rr})} = \frac{d(\max X_{\lambda\lambda})}{d(R_1/R)} : \frac{d(\max X_{rr})}{d(R_1/R)} = 1/3, \quad [32]$$

on obtient une relation très simple :

$$\max \bar{X}_{\lambda\lambda} = 1,3 \max X_{\lambda\lambda} + \frac{10G\gamma}{9} \quad [33]$$

(voir la fig. 5d). Introduisons les valeurs critiques de  $X_{\lambda\lambda}$  et  $X_{rr}$  auxquelles commencent les ruptures et les écoulements :

$$\text{crit. } X_{\lambda\lambda} \text{ et crit. } X_{rr}. \quad [34]$$

Les grandeurs [34] ne sont ni constantes, ni indépendantes; ce sont seulement les grandeurs :

$$F = \text{crit. } X_{\lambda\lambda} \Big|_{X_{rr} = 0} \quad \text{et} \quad K = \text{crit. } X_{rr} \Big|_{X_{\lambda\lambda} = 0} \quad [35]$$

qui peuvent être considérées comme les constantes de matière (en dépit qu'elles ne sont pas, elles non plus, les constantes physiques dans

le sens propre). Les conditions de Tresca — Saint-Venant ou Huber — Mises ne s'appliquent pas aux états tendus des roches (voir § 1), il convient d'introduire une relation approximative entre les deux grandeurs [34]; p. e. la relation:

$$\text{crit. } X_{\lambda\lambda} = \frac{F}{K} \text{ crit. } X_{rr} + F. \quad [36]$$

Or, des données expérimentales:

$$5 F < K < 25 F \quad [37]$$

on peut déduire que [36] et [33] sont incompatibles (voir la fig. 4d).

De tout cela on peut tirer les conclusions suivantes:

1. Lorsque:

$$\text{max. } X_{\lambda\lambda} = \frac{10 G \gamma}{9} > F \quad [38]$$

les fissures du premier type se forment obligatoirement.

2. Lorsque:

$$\frac{10 G \gamma}{9} < F, \text{ mais } K < \frac{10 G \gamma}{3} \quad [39]$$

la formation des fissures de second type est logiquement possible, mais en raison de l'incompatibilité de [36] et de [33] il n'existe pas de substance constituant l'écorce terrestre correspondant à ce cas. Ainsi ce cas est physiquement impossible.

3. Lorsque:

$$\frac{10 G \gamma}{3} < F, \text{ et } K > \frac{10 G \gamma}{3} \quad [40]$$

aucune fissure ne se forme.

Comme nous l'avons déjà dit, tout cela n'est directement applicable qu'aux corps pas très grands. Dans le § 4 une correction sera indiquée qui est nécessaire dans les cas des corps ayant des rayons de plus de 100 mètres.



§ 3. *Refroidissement « quasi-stationnaire »*. *Formation des fissures du deuxième type.* — Revenons maintenant au cas plus général, cas d'un processus « quasi-stationnaire ». Les températures considérées dans ce cas variant avec le temps, varient aussi d'un endroit à l'autre et, ce qui est pour nous le plus important, elles ne sont pas les mêmes dans l'écorce et dans les parties liquides sousjacentes. Pour les calculer approximativement on peut appliquer les mêmes simplifications que celles de la note citée (45): 1) la constance de la température extérieure:  $T_{\text{ext.}} = \text{const}$ ; 2) la coïncidence de l'isotherme  $T = T_{\text{fus.}}$  (où  $T_{\text{fus.}}$  est la température de la fusion) avec la limite entre les phases liquide et solide des roches; 3) l'applicabilité de la loi simple de radiation sur la surface extérieure ( $T_0$  — la température sur cette surface):

$$T_0 - T_{\text{ext.}} = \beta \frac{\partial T}{\partial r}, \quad [1]$$

4) la distribution presque linéaire des températures dans l'écorce naissante, permettant d'appliquer les relations simples: pour la température moyenne de l'écorce

$$T \simeq \frac{T_{\text{fus.}} + T_0}{2}, \quad [2]$$

pour le gradient:

$$\frac{\partial T}{\partial r} \simeq \frac{T_0 - T_{\text{fus.}}}{\Delta R}, \quad [3]$$

et pour le changement de la température moyenne:

$$\Delta T \simeq \frac{T_{\text{fus.}} - T_0}{2}, \quad [4]$$

déterminé par le changement de  $T_0$  (baisse en cas de refroidissement), etc. (voir la fig. 6a).

A partir des expressions [1] et [3] on obtient une formule déterminant la température sur la surface de limite

$$T_0 = \frac{T_{\text{ext.}} \cdot \Delta R - \beta \cdot T_{\text{fus.}}}{\Delta R - \beta} \quad [5]$$

et le changement de celle-ci:

$$\Delta T = \frac{\Delta R (T_{fus.} - T_{ex.})}{2 (\Delta R - \beta)} < 0 . \quad [6]$$

Etant donné que l'épaisseur de l'écorce  $\Delta R$  parte de 0 et reste toujours moindre que  $\beta$ , la valeur absolue de  $\Delta T$  est approximativement égale à

$$|\Delta T| = \frac{T_{fus.} - T_{ex.}}{2 \beta} \Delta R = \frac{\gamma'}{\alpha} \Delta R \quad [7]$$

où:

$$\gamma' = \alpha \frac{T_{fus.} - T_{ex.}}{2 \beta} . \quad [7a]$$

C'est cette valeur  $\Delta T$  qui provoque le changement thermométrique du volume, s'ajoutant au changement de volume au point de fusion ( $\gamma$ ), voir le commencement du § 2. Cela revient à dire qu'au lieu de  $\gamma$  de la théorie du § 2, il convient d'utiliser la grandeur totale:

$$\gamma_{total} = \gamma + \gamma' \Delta R . \quad [8]$$

Etant donné que le calcul avec  $\gamma_{total} = \gamma$  est déjà réalisé (voir § 2), considérons pour simplifier les transformations mathématiques le cas contraire  $\gamma_{total} = \gamma' \Delta R$ . L'état de l'écorce en voie de refroidissement, — état d'un corps polycristalin et en partie même visqueux —, est tel que l'influence du terme  $\gamma' \Delta R$  prévaut sur l'influence du terme  $\gamma$ . C'est pourquoi en supprimant ce dernier nous ne faisons pas une faute essentielle. En outre il n'est pas difficile de traiter mathématiquement le problème dans la forme complète [8], mais ceci ne donne aucun résultat fondamentalement différent, parce que la considération des deux cas extrêmes (cas du § 2 et celui-ci de  $\gamma_{total} = \gamma' \Delta R$ ) jette une lumière suffisante sur les cas intermédiaires.

En introduisant dans notre calcul la valeur  $\gamma' \Delta R$  au lieu de  $\gamma$ , nous ne changeons rien d'essentiel dans les considérations et les transformations mathématiques du § 2. Avec ce changement, au lieu des formules [17] et [18] du § 2, nous trouvons:

$$X_{cr} = \frac{20 G \gamma' \Delta R}{3} \cdot \frac{R_t^3 \left[ 1 - \left( \frac{R}{r} \right)^3 \right]}{\sqrt{4 R_t^3 + 5 R^3 + 20 \varepsilon (R^3 - R_t^3)}} , \quad [9]$$

et :

$$X_{\lambda\lambda} = X_{00} = \frac{10 G \gamma' \Delta R}{3} \cdot \frac{R_1^3 \left[ 2 + \left( \frac{R}{2} \right)^3 \right]}{\text{simile}} \quad [10]$$

Supprimant enfin, comme nous l'avons fait dans § 2, les termes avec  $\varepsilon$ , — c'est-à-dire se bornant aux cas où le noyau est peu compressible, — on trouve :

$$X_{rr} = \frac{20 G \gamma' \Delta R \cdot R_1^3}{3 (5 R^3 + 4 R_1^3)} \left[ 1 - \left( \frac{R}{r} \right)^3 \right], \quad [11]$$

et :

$$X_{\lambda\lambda} = X_{00} = \frac{10 G \gamma' \Delta R \cdot R_1^3}{3 (5 R^3 + 4 R_1^3)} \left[ 2 + \left( \frac{R}{r} \right)^3 \right]. \quad [12]$$

ayant les maxima, comme auparavant auprès de l'isotherme  $T = T_{\text{inv}}$ , (où  $r = R_1$ ):

$$\max X_{rr} \Big|_{r=R_1} = \frac{20 G \gamma' \Delta R (R_1^3 - R^3)}{3 (5 R^3 + 4 R_1^3)}, \quad [13]$$

$$\max X_{\lambda\lambda} \Big|_{r=R_1} - \max X_{00} \Big|_{r=R_1} = \frac{10 G \gamma' \Delta R (2 R_1^3 + R^3)}{3 (5 R^3 + 4 R_1^3)} \quad [14]$$

Entre  $\max X_{rr}$  et  $\max X_{\lambda\lambda}$  existe dans ces cas la même liaison que celle du cas du § 2 :

$$\max X_{\lambda\lambda} = 1/3 \max X_{rr} + 10/9 G \gamma' \Delta R. \quad [15]$$

Les fonctions [13] et [14] sont, en dépit de leur apparence compliquée très simples; dans l'intervalle ayant le sens physique:  $0 < R_1 < R$  elles n'ont ni maxima ni minima. En introduisant la fonction

$$R \sqrt{5 + 4y^3} \quad [16]$$

d'un arcument  $y = \frac{R_1}{R}$  de mesure, on a :

$$= \frac{10 G \gamma' R}{3} M \left( \frac{R_1}{R} \right) \quad [17]$$

et, d'après [15]:

$$\max X_{rr} = 10 G \gamma' R \cdot M\left(\frac{R}{R_1}\right) - 10/3 G \gamma' R \left(1 - \frac{R_1}{R}\right). \quad [18]$$

La fonction  $M(y)$  est représentée sur le tableau suivant:

$y$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,10
$M(y)$	0,200	0,180	0,162	0,145	0,129	0,114	0,0978	0,0791	0,0574	0,0311	0,0000

[19]

et illustrée par la fig. 6b. On voit facilement que, dans les intervalles plus restreints,  $M(y)$  peut être représentée d'une façon très simple: par exemple:

$$M(y) \cong 0,32(1-y) \text{ pour } 0,9 \leq y \leq 1,0 \text{ (5700 km } \leq R_1 \leq 6350 \text{ km)}$$

[20]

avec une erreur  $\leq 4\%$ , ou:

$$M(y) \cong 0,3333(1-y) \text{ pour } 0,99 \leq y \leq 1,0 \text{ (6280 km } \leq R \leq 6350 \text{ km)}$$

[20a]

avec une erreur  $\leq 1\%$ , ou enfin:

$$M(y) \cong 0,32(1-y) - 0,13(1-y)^2 \text{ pour } 0 \leq y \leq 1,0 \text{ (0 } \leq R \leq 6350 \text{ km)}$$

[20b]

avec une erreur ne dépassant pas essentiellement la précédente.

Pour le problème de la fissuration de l'écorce on n'a besoin des très grandes profondeurs; on peut délibérément se borner au cas [20]. Alors, les fonctions déterminant la tension et la pression au point  $r = R_1$ , s'écriront:

$$\left. \begin{aligned} \max X_{\lambda\lambda} &\cong 10/3 G \gamma' \cdot 0,32(R - R_1) \\ \max X_{rr} &\cong -10 G \gamma' \cdot 0,01(R - R_1) \end{aligned} \right\} \quad [21]$$

cependant pour la deuxième est préférable l'expression:

$$\max X_{rr} \cong -10 G \gamma' / 0,01 (R - R_1) + 0,12 \frac{(R - R_1)^2}{R} \quad [22]$$

$\lambda$  découlant de [20b] /. On se convainc facilement que la forme de la liaison entre  $\max X_{\lambda\lambda}$  et  $\max X_{rr}$  reste inchangée (voir la formule [15]). Mais une grande différence apparaît entre la formule [33] du § 2 et la formule [15] de ce paragraphe. Là la valeur donnée d'une des grandeurs  $\max X_{\lambda\lambda}$ ,  $\max X_{rr}$  détermine complètement la seconde. Ici, au contraire l'une de ces grandeurs n'est pas déterminée par l'autre; on doit connaître la profondeur de l'écorce formée à ce moment pour avoir la possibilité de réaliser un tel calcul. C'est pourquoi le raisonnement du type du § 2 (voir la fig. 5d) est ici impossible: le processus correspondant au refroidissement « quasi-stationnaire » a un caractère complète-

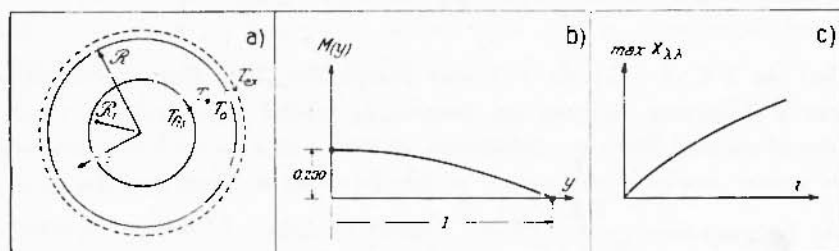


Fig. 6

ment différent de celui qui correspond au refroidissement « isothermique ».

L'endroit avec la plus forte tensions (— l'endroit où commencera la fissure) est toujours près de la surface  $r = R_1$  à la profondeur de l'écorce mais le sens de variation de la plus forte tension en fonction de développement de l'écorce est opposé au sens de cette variation dans le cas précédent: dans le cas du § 2, cette tension a été la plus considérable au moment de la formation de l'écorce, dans le cas considéré ici, cette tension est nulle au commencement de la formation et elle croît avec l'épaisseur. Pour l'intervalle de temps pendant lequel l'écorce augmente d'épaisseur cette tension maximale est représentée en fonction du temps par la fig. 5e dans le cas du processus « isothermique » et par la fig. 6c dans le cas du processus « quasi-stationnaire » où  $\gamma_{\text{totale}} = \gamma' \Delta R$ . Enfin, on voit les cas intermédiaires sur la fig. 6d.

De tout cela, on peut tirer les conclusions sous forme d'inégalités, comme celles qui se trouvent à la fin du paragraphe précédent et qui ne sont applicable qu'aux cas sans influence de poids — comme ceux du § 2 (voir aussi § 4). Ces conclusions sont:

1. Aussi longtemps que la grandeur  $\Delta R$  croissante, reste encore telle que la valeur correspondante de  $\max X$  satisfasse à l'inégalité:

$$\max X_{\lambda\lambda} = \frac{10 G \gamma' \Delta R [2(R - \Delta R)^2 + R^2]}{3 [4(R - \Delta R)^2 + 5 R^2]} < \frac{F}{K - 3F} (K - 10/3 G \gamma' \Delta R) \quad [23]$$

aucune fissure ne se produit, parce que les conditions [36] du § 2 et [15] de ce paragraphe sont encore incompatibles. Au moment où

$$\max X_{\lambda\lambda} = \frac{F K}{K - 3F} \left( 1 - \frac{10}{3} \cdot \frac{G \gamma' \Delta R}{K} \right), \quad [24]$$

[36] du § 2 et [15] du § 3 sont compatibles, les fissures commencent à se former. Ce sont des fissures de second type (voir § 1), car, nées (formées) dans la profondeur, et non pas à la surface, elles ont les pentes marquées et presque perpendiculaire à la surface du corps.

La grandeur  $\frac{F K}{K - 3F}$  étant d'après [37] du § 2, toujours positive, et les valeurs de  $\max X_{\lambda\lambda}$  et de  $\frac{10 G \gamma' \Delta R}{3 K}$  nulles au commencement de la formation de l'écorce, l'inégalité [23] est nécessairement valable lors de ce commencement. Enfin, la grandeur  $\Delta R$  ne dépassant jamais  $R$ , cette conclusion s'écrit définitivement: lorsque:

$$2 G \gamma' R > \frac{3 F K}{K + 2 F} \quad [25]$$

les fissures du second type se forment.

2. Lorsque:

$$2 G \gamma' R < \frac{3 F K}{K - 2 F} \quad [26]$$

aucune fissure ne se forme et le corps considéré se solidifie sans traces de fissuration extrêmes ou même internes.

§ 4. *Résumé des résultats du calcul. Quelques applications. Théorie de l'écorce terrestre.* — Les résultats du § 2 et du § 3 ne doivent pas créer l'impression que tout dépend du caractère du processus. Au contraire, c'est le fait de la prépondérance du terme  $\gamma$  ou du terme  $\gamma' \Delta R$  dans l'expression [8] du § 3 qui détermine l'apparition des fis-

sures du premier ou du second type. Mais, d'autre part, c'est seulement pour un processus non « isothermique » que l'on peut poser la question de cette prépondérance; pour un processus « isothermique » le terme  $\gamma' \Delta R$  égale toujours zéro. Alors, en résumant:

I. *Durant un refroidissement « isothermique » ou plus généralement « quasi-stationnaire », mais en ce deuxième cas sous condition d'une valeur de  $\gamma$  considérable devant  $\gamma' \Delta R$ , ce sont exclusivement les fissures du premier type qui peuvent se former.*

II. *Durant un refroidissement « quasi-stationnaire » et non « isothermique », sous condition d'une valeur de  $\gamma' \Delta R$  considérable devant  $\gamma$ , ce sont les fissures du second type que se forment exclusivement ou aucune fissure ne se forme. Enfin:*

III. *Durant un refroidissement « quasi-stationnaire » où aucune des valeurs:  $\gamma$  et  $\gamma' \Delta R$  ne prévaut sur l'autre, les fissures de tous les types peuvent se former.*

Il est à souligner encore une fois que les fissures se forment seulement à condition que les constantes physiques du corps en question satisfassent aux inégalités cruciales — [39] et [40] du § 2 dans le cas I et [26] du § 3 dans les cas II et III. En outre, on ne doit pas oublier que les fissures du second type naissent aussi de causes purement mécaniques, et non exclusivement de causes thermiques. C'est le cas, par exemple, pour les bombes volcaniques, où plusieurs des fissures du second type sont formées au moment où la bombe se casse en tombant sur le sol.

La simple théorie développée dans cette étude peut avoir des applications nombreuses. Mentionnons d'abord les fissures sur la surface des bombes volcaniques (certain types « à croûte de pain », etc.). Les deux types de ces fissures découverts par l'auteur (1) peuvent être maintenant examinés qualitativement, mais non seulement du point de vue purement statistique. Mais si l'hypothèse du processus « quasi-stationnaire » suffit totalement pour la description mathématique du refroidissement de l'écorce terrestre, ce n'est pas toujours le fait pour les bombes volcaniques — voir aussi (2). La théorie développée peut être également appliquée à la fissuration des corps artificiels en voie de refroidissement. Le résultat le plus général est le même que le procédé toujours appliqué dans la pratique: un refroidissement le plus lent possible (aussi voisin qu'il se peut d'un processus « isothermique ») est le meilleur procédé pour éviter la fissuration. Coïncidant

sur ce point avec la pratique, la théorie donne plus: les formules du calcul des tensions, les inégalités cruciales (que nous venons de mentionner) déterminant le commencement de la fissuration dans les cas divers, etc. En outre, la question qui n'est pas apparemment de grand intérêt pratique, — la question de la fissuration des scories coulées des hauts-fournaux, peut être également illustrée par cette théorie. On peut multiplier de pareils exemples presque à l'infini.

Or, nous laissons toutes ces possibilités d'application pour un examen ultérieur et d'autres endroits. C'est la question du refroidissement de l'écorce terrestre à laquelle nous donnons ici la place.

Cependant, comme nous l'avons fait remarquer dans les paragraphes précédents, la théorie développée n'est pas directement applicable qu'aux cas où l'influence de poids est négligeable. Pour les corps ayant, comme la Terre, les rayons de milliers de kilomètres, ce n'est pas le cas et les poids doivent être introduits. Si l'on considère la solidification d'un corps jusqu'au centre, la seule possibilité est d'introduire les poids dans l'équation [2] et de résoudre cette équation avec ce terme complémentaire. Cette méthode, étant irréprochable du point de vue théorique, n'est pas ni la plus simple, ni la seule possible. Si nous nous bornerons aux cas de l'écorce peu épaisse en comparaison avec le rayon — et c'est le cas de la Terre — on peut introduire l'influence de poids simplement sous la forme d'une correction et au lieu de  $\max X_{rr}$  et de  $\max X_{\lambda\lambda}$  / — formules [20a], [21a] du § 2, [13], [14] du § 3 / ou de  $X_{rr}$  et de  $X_{\lambda\lambda}$  / — formules [20], [21] du § 2, [11], [12] du § 3 / considérer correspondement:

$$\max X_{rr} = \varrho \Delta R \text{ et } \max \bar{X}_{\lambda\lambda} = \varrho/3 \Delta R \quad |A|$$

et

$$X_{rr} = \varrho (R - r) \text{ et } X_{\lambda\lambda} = \varrho/3 (R - r) \quad |B|$$

Cette correction ne donne naturellement pas une exactitude parfaite. Mais, si les formules des paragraphes précédents, appliquées à l'écorce terrestre amènent à des erreurs considérables, les valeurs calculées à l'aide de la corrélation indiquée, ne diffèrent pas des valeurs exactes de plus de 1%, même pour une écorce de 100 km d'épaisseur.

Le premier fait important découlant de la théorie exposée est le fait que l'écorce en voie de refroidissement a été *tendue*, et non pas comprimée comme l'a affirmé la théorie dite de la contraction. Sauf les cas des phases solides de l'eau et des fontes spéciales, — cas où



$\gamma < 0$  —, cas exceptionnels et éloignés de l'écorce réelle, pour tout corps réel, avec  $\gamma > 0$  l'existence de la *tension* est, d'après le calcul exposé dans § 2 et § 3, hors de doute. C'est pourquoi notre calcul exclut complètement la théorie de la contraction.

Objecter que l'écorce n'a pas été formée complètement et autour de toute la Terre, revient à dire, qu'on emploie le mot « écorce » dans un autre sens que celui appliqué plus haut. On peut affirmer naturellement qu'à certain moment une *pré-écorce* a existé ne s'étendant peut-être pas sur toute la surface du globe. Mais au moment de l'apparition de la phase liquide de *H.O* sur cette surface, — et ce moment a eu lieu bien avant les périodes géologiques (même avant le précambrien) — l'écorce existe, couvrant complètement et sans lacunes toute la surface du globe.

Et, comme le montre le calcul exposé, dès le moment de la formation de l'écorce, l'état de tension tangentielle a surgi dans la surface. Les pressions, beaucoup plus petites que les tensions, ne peuvent se former que dans les directions radiales, s'opposant aux poids. L'écorce entourant le globe, ne pouvant être tendue que tangentiellement, *est, de fait, tendue* et l'existence virtuelle des pressions verticales (radiales) ne change rien à ce phénomène.

Alors, peu importe, si la pré-écorce weguerienne a existé ou n'a pas existé, le moment venu, l'écorce au propre sens du mot se forme autour de tout le globe terrestre et se forme soumise à l'état de tensions.

Sculs les métaux possèdent des résistances peu différentes à la pression et à la tension. Pour les roches ce n'est pas le cas: ces dernières supportent très facilement des pressions énormes et rompent sous des tensions relativement faibles. Pour cette raison il est excessivement improbable que l'écorce ait pu résister aux tensions en question, spécialement — ce qui a été le cas — aux températures proches de celle de la fusion.

Tout cela nous permet de soutenir une théorie de l'écorce ayant pour but d'expliquer la formation des continents et des montagnes, — théorie basée sur l'existence des tensions. Cette théorie proposée par nous dès avant la guerre, est formulée en ses différentes parties dans plusieurs publications dont trois sont déjà citées: quelques unes des autres seront mentionnées plus bas. Voici les traits les plus importants de cette théorie de l'orogénèse.

On admet au départ que la Terre pendant une époque de son histoire éloignée de nos jours était liquide et qu'elle est en se refroidi-

dissant parvenue à son état actuel. Le refroidissement spontané, dû aux réserves d'énergie non infinies dans le noyau, a donné lieu à la formation de l'écorce. Cette dernière, étant tendue, n'a pu que se fractionner. Les morceaux ainsi formés, correspondant en état non tendu à un rayon moindres que celui du noyau et n'ayant pas possibilité de conserver leurs formes, sont devenus plissés parce que des parties de sphères de rayons différents ne son pas « applicables » (en langage mathématique) les unes sur les autres [voir <sup>(51)</sup>, où se trouvent les figures explicatives]. On peut considérer le refroidissement du Globe soit comme un processus mathématiquement monotone, soit avec un réchauffement au moment de la formation de l'écorce (voir <sup>(45)</sup>); cela ne change rien au fait mécanique que les variations des volumes de l'écorce et du noyau n'étaient pas et ne sont pas équivalentes en grandeur. Comme le calcul le montre, la variation du volume de l'écorce est plus considérable que celle du volume du noyau. Même pour le cas d'une extrême lenteur du refroidissement (— processus « isothermique ») ce rétrécissement thermique de l'écorce relativement au noyau est facilement établi — voir § 2. Dans les cas des processus plus « brusques » ce fait se met encore plus en relief.

On ne peut pas cependant penser que ce sont les raisonnements mathématiques et mécaniques qui jouent le rôle principale lorsqu'on décide d'affirmer ou de nier une théorie liée à la réalité. Ce sont plutôt les conclusions qu'on peut tirer de la théorie et leur coïncidence suffisante ou insuffisante avec les observations qui déterminent la décision. Et nous avons essayé de donner plusieurs preuves; même notre théorie nous a permis de découvrir les faits nouveaux. Sans entrer dans le détail, énumérons quelques uns de ces résultats tirés de notre théorie et la confirmant:

- 1) Relation entre l'altitude moyenne et la superficie des continents <sup>(52, 53)</sup>.
- 2) Distribution des volcans sur la surface de la Terre <sup>(54, 55)</sup>.
- 3) La théorie de volcanisme <sup>(56)</sup>.
- 4) Ressemblance des côtes atlantiques africaines et sud-américaines <sup>(57)</sup>.
- 5) Stades du développement du plissement <sup>(57, 58)</sup>.
- 6) Lois générales du relief terrestre <sup>(59)</sup>.
- 7) Les limites des blocs continentaux <sup>(60)</sup>.
- 8) La quantité de matière éruptée par les volcans en liaison avec la distribution de ceux-ci <sup>(61)</sup>.

9) La position du pli le plus important sur un continent de forme approximativement triangulaire <sup>(62)</sup>.

10) Le critérium d'orogénèse <sup>(63)</sup>.

Le nombre des publications faites par les géologues et les géophysiciens sur le sujet de l'écorce terrestre est énorme. Quelques indications peuvent se trouver dans nos travaux susmentionnés. De plus, nous avons publié une bibliographie spéciale sur ce sujet (voir <sup>64</sup>). Nous ne la reproduisons pas ici. Seules les publications sur le régime thermique de l'écorce sont en parties citées — voir de <sup>(3)</sup> jusqu'à <sup>(12)</sup>.

Revenant pour la dernière fois aux résultats de § 2 et § 3, soulignons que la valeur de tout ce calcul est — semble-t-il — plus qualitative que quantitative. Étant donné que toutes les constantes physiques nécessaires pour le calcul numérique, sont connues avec peu de précision, il semble qu'un tel calcul soit prématuré en dépit de l'exactitude du calcul théorique, — exactitude plus que suffisante pour les besoins des sciences de la Terre. Cependant, sans insister sur l'importance des chiffres susmentionnés, nous citons, à titre d'exemple, le calcul suivant très approximatif et très court.

Supposons pour la Terre un processus de refroidissement « quasi-stationnaire » et l'écorce peu épaisse au moment de l'apparition des fissures, ce qui concorde évidemment avec la réalité. Cela dit, on peut appliquer les formules [7a] et [21] du § 3. En portant la valeur de  $\gamma'$  d'après [7a] dans [21], on trouve (en cas de l'absence de poids):

$$\max X_{i\bar{i}} = \frac{10}{18} G \alpha/\beta (T_{\text{int.}} - T_{\text{ex.}}) \Delta R \quad [C]$$

Pour la même raison ( $\Delta R$  n'étant pas considérable) en cas de la présence de poids on peut appliquer la correction [A] et poser simplement:

$$\max \text{reel } X_{i\bar{i}} = \frac{10}{18} G \alpha/\beta (T_{\text{int.}} - T_{\text{ex.}}) \Delta R - \varrho/3 \Delta R \quad [D]$$

au moment de la naissance d'une fissure. Les conditions [D] et [36] du § 2 étant réunies, on a:

$$F \left( 1 + \frac{\varrho}{K} \Delta R \right) = \frac{10}{18} G \alpha/\beta (T_{\text{int.}} - T_{\text{ex.}}) \Delta R - \varrho/3 \Delta R \quad [E]$$

Essayons de calculer à l'aide de cette formule [E] l'épaisseur de l'écorce ( $\Delta R$ ) au moment de la naissance des fissures. Faute de connaître des valeurs exactes des constantes physiques pour les cas considérés, le calcul sera plus qu'approximatif. Les grandeurs  $G$  et  $F$  varient entre les valeurs:

$$\left. \begin{aligned} G &\cong 1000000 \text{ kg/cm}^2; \\ F &= 200 \text{ kg/cm}^2 - 100 \text{ kg/cm}^2 \text{ ou même encore moins} \end{aligned} \right\} \text{ [E]}$$

et:

$$\alpha \cong (1/5000)^\circ; T_{\text{int.}} - T_{\text{ex.}} = 1000^\circ - 1500^\circ$$

Le plus difficile est le calcul de  $\beta$ . Dans notre publication déjà citée (2) nous avons donné le détail sur le calcul numérique de  $\beta$ ; on peut également y trouver le tableau des valeurs dérivées (températures, temps, etc.) pour diverses valeurs de  $\beta$ . Il semble cependant que la valeur  $\beta = 300 - 100 \text{ km}$  est la plus convenable. En l'adoptant, on trouve:  $\Delta R = 30 \text{ km}$  (pour  $\beta = 200 \text{ km}$ ) et  $\Delta R = 2 \text{ km}$  (pour  $\beta = 150 \text{ km}$ ) — valeurs qui sont en principe admissibles. Pour le détail voir l'article cité.

Pour terminer, répétons encore une fois que le résultat principal de cette étude est le résultat qualitatif sur l'existence de l'état tendu de l'écorce (§ 2 et § 3); l'incertitude sur les valeurs des constantes, ne permet pas un calcul numérique exact.

### RIASSUNTO

*L'Autore calcola le tensioni nel mantello terrestre, durante la formazione delle spaccature « primarie » nella crosta terrestre. Sulla base del teorema di Stokes, egli ha potuto prescindere dalla necessità di prendere in considerazione l'ipotetica distribuzione delle temperature nell'interno della Terra.*

### SUMMARY

*In the present paper the author calculates the tensions in the earth's mantle during the formation of the primary fissures; on the base of the Stokes's theorem he has eliminated the necessity of taking into consideration the hypothetical distribution of the temperatures in the earth's interior.*

## LES AUTEURS CITÉS

- (1) MATSCHINSKI M., *Observation sur la morphologie des bombes volcaniques*. C.R.S. de la Soc. Géol. de Fr., n. 10, p. 149 (1951).
- (2) MATSCHINSKI M., *Surface des bombes volcaniques en tant que modèle approximatif de la surface terrestre*. Rev. Scientifique (1952).
- (3) KELVIN (Lord), *On the secular cooling of the earth*. Roy. Soc. Edinburgh Trans., 23, p. 157-69 (1862).
- (4) INGERSOLL L. R. - ZOBEL O., *Mathematical Theory of Heat Conduction*. Pp. 88-96 (1913).
- (5) SPICER H. C., *Tables of temperature, geothermal gradient and of a non-radioactive earth*. Geol. Soc. Amer. Bull., 48, p. 75-91 (1937).
- (6) LOVERING T. S., *Heat conduction in dissimilar rocks and the use of thermal models*. Geol. Soc. Amer. Bull., 47, p. 87-100 (1936).
- (7) HOLMES A., *Radioactivity and the earth's thermal history*. Geol. Mag., new ser., Decade VI, 2, p. 102-12 (1915).
- (8) ADAMS L. H., *Temperatures at moderate depths within the earth*. Washington Acad. Journ., 14, p. 459-72 (1924).
- (9) JEFFREYS H., *The Earth*, p. 148, 2d ed. Cambridge (1929).
- (10) JEFFREYS H., *Philosophical Magazine*, 2, p. 833 (1926).
- (11) JEFFREYS H., *The Deformation of the Earth due to Unsymmetrical Cooling*. Geoph. Suppl. to the M.N. of the R.A.S., vo. III, p. 53 (1936).
- (12) BULLARD E. C., M.N.R.A.S., *Geophys. Suppl.*, 4, p. 534 (1939).
- (13) WOLFF F. VON, *Das Temperaturgesetz in der Erdkruste*. Jahrb. Hallescher Verband Erforschung der mitteldeutschen Bodenschätze, 7 (neue Folge), p. 1 (1928).
- (14) GUTENBERG B., *Handbuch der Geophysik B. II (1933)*. Abkühlung und Temperatur der Erde. p. 33.
- (15) GUTENBERG B., *Physics of the earth*. New York and London (1939) VII Internal Constitution, Ch. VII. The cooling of the earth and the temperature in its interior.
- (16) CHAPMAN S. - PRICE A. T., *The electric and magnetic state of the interior of the earth...* Roy. Soc. London Phil. Trans. (A), 229, p. 427-60 (1930).
- (17) RIKITAKE T., *A Note on the Temperature - Distribution within the Earth*. Bull. of the Earthquake Research Inst., XXVII, part 1-4, p. 17 (1949).
- (18) RIKITAKE T., *Electrical Conductibility and Temperature in the Earth*. Ibid., XXX, part I, p. 13 (1952).
- (19) BIRCH F., *Flow of heat in the Front Range, Colorado*. Bull. Geol. Soc. of America, 61, p. 567-630 (1950).
- (20) VERHOOGEN I., *Volcanic heat*. Amer. Journ of Sci., 244, p. 745-71 (1946).
- (21) VERHOOGEN I., *The Adiabatic Gradient in the Mantle*. Trans. Amer. Geophys. Union, 32, p. 41 (1951).
- (22) VALLE P. E., *Sull'aumento di temperatura nel Mantello della Terra. etc.* Annali di Geofisica, vol. IV, p. 175 (1951).
- (23) VALLE P. E., *Sul gradiente adiabatico di temperatura nell'interno della terra*, Ibid, vol. V, n. 1, p. 41 (1952).
- (24) WILSON J. T. & SCHNEIDFEGGER A. E., *Proc. Geol. Assoc. Canada*, 3, p. 167 (1950).

- (25) SCHNEIDERGER A. E., *Physical aspects of the contraction hypothesis of orogenesis*. *Canad. Journ. of Physics*, 30, p. 14 (Jan 1952).
- (26) DAVISON C., *Phil. Trans. A*, 178, p. 231 (1887).
- (27) DARVIN G., *Phil. Trans. A*, 178, p. 242 (1887).
- (28) JEFFREYS H., *Earthquakes and Mountains*. Methuen, London (1950).
- (29) COULOMB J., *Tensions engendrées dans le globe terrestre par son refroidissement*. *Ann. Géoph.*, T. I., fasc. 2 (Mars 1944).
- (30) RAYLEIGH Lord., *Phil. Mag.*, 32, p. 529 (1916).
- (31) LOWAN A. N., *On the Cooling of a Radioactive Sphere*. *Phys. Rev.* vol. 44, sec. ser., p. 769 (1933).
- (32) LOWAN A. N., *Note on the Cooling of a Radioactive... Sphere*. *Amer. Journ. of Math.*, vol. LVI, p. 254 (1934).
- (33) LOWAN A. N., *On the Cooling of the Earth*. *Ibid.* vol. LVII, p. 174 (1935).
- (34) SLICHTER L. B., *Cooling of the earth*. *Bull. Geol. Soc. Amer.*, vol. 52, p. 561 (1941).
- (35) URRY W. D., *Significance of Radioactivity in Geophysics, thermal history of the Earth*. *Trans. Amer. Geoph. Un.*, vol. 30, p. 171 (1949).
- (36) GENTRY F. M., *Science*, n. 1814, 70, p. 332 (1929).
- (37) KUHN W. und RITTMANN A., *Über den Zustand des Erdinneren und seine Entstehung aus einem homogenen Urzustand* (1941).
- (38) UMBROVE J. H. F., *Contraction of the earth*. *Proc. of the Kkl. Nederl. Ak. v. Wetenschap.*, ser. B, n. 2, p. 105 (1952).
- (39) WASIUTYNSKI J., *Studies in Hydrodynamics and Structure of Stars and Planets*. *Astrophysica Norvegica*, vol. 4, Oslo (1946).
- (40) PEKERIS C. L., *Thermal convection in the interior of the earth*. *Monthly Not. Roy. Astronom. Soc.*, *Geophys. Suppl.*, 3, p. 343 (1935).
- (41) VENING MEINESZ F. A., *Major tectonic phenomena and the hypothesis of convection currents in the Earth*. *Quarterly Journ. of the Geol. Soc. of London*, vol. 103, p. 191 (1948).
- (42) VENING MEINESZ F. A., *Convection currents in the Mantle*. *Trans. Amer. Geophys. Union*, vol. 32, n. 4, p. 531 (1951).
- (43) STOKES, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 8, p. 672 (1849).
- (44) TISSERAND, *Traité de mécanique céleste*. § 149, t. II, Paris (1891).
- (45) MATSCHINSKI M., *La formation des continents et des forces géodynamiques*. *C. R. Ac. Sci. de France*, t. 230, p. 1882 (1950).
- (46) BÉNARD H., *Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide*. *Rev. gén. des Sci.*, XI, n. 23, p. 1261-71 (15.XII.1900), p. 1309-28 (30.XII.1900). — *Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportante de la chaleur par convection en régime permanente*, *Ann. de Chem. et de Phys.*, 7<sup>me</sup> série, t. XXIII, p. 62-144 (1901).
- (47) GEIGER und SCHEEL. *Handbuch der Physik*, Band VI, p. 463, Berlin Springer (1928).
- (48) SAINT-VENANT, *C. R. Ac. Sci. de France*, t. 70, p. 368 et 473 (1870); *ibid.* t. 73, p. 86, 1098, 1181 (1871).
- (49) *Colloquium on plastic flow and deformation within the earth*, n. 4, vol. 32 of the *Trans. Amer. Geophys. Union* 6 (1951).
- (50) MISES von R., *Göttinger Nachr.* (1913).

- (51) MATSCHINSKI M., *Sur l'origine des forces orogénétiques*. Cahiers Géol. de Thoiry, n. 4, p. 59 (1951).
- (52) MATSCHINSKI M., *Relation entre l'altitude moyenne et la superficie des continents*. C. R. Ac. Sci. de France, t. 233, p. 492 (1951).
- (53) MATSCHINSKI M., *Altitude moyenne des continents et forces géodynamiques*. Rev. Géomorph. Dyn., n. 1, p. 157 (1951).
- (54) MATSCHINSKI M., *Sur la distribution des volcans à la surface de la Terre*. C. R. Ac. Sci. de France, t. 233, p. 669 (1951).
- (55) MATSCHINSKI M., *Données numériques sur la distribution des volcans des bords de l'Océan Pacifique*. Rev. Géomorph. Dyn., n. 6, p. 276 (1951).
- (56) MATSCHINSKI M., *Quelques remarques sur les causes d'éruption et sur le rôle du gaz dégagé par rechauffement*. Cahiers Géol. de Thoiry, n. 9, p. 77 (1951).
- (57) MATSCHINSKI M., *Ressemblance des côtes atlantiques africaine et sud-américaine et développement du plissement d'un continent isolé*. C. R. Ac. Sci. de France, t. 233, p. 1653 (1951).
- (58) MATSCHINSKI M., *Stades de l'évolution du plissement sur un continent isolé*. Cahiers Géol. de Thoiry, n. 10, p. 171 (1952).
- (59) MATSCHINSKI M., *Lois générales du relief terrestre*. C. R. Ac. Sci. de France, t. 234, p. 1192 (1952).
- (60) MATSCHINSKI M., *Les limites des blocs continentaux*. C. R. S. de la Soc. Géol. de France, n. 7, p. 105 (1952).
- (61) MATSCHINSKI M., *Distribution des volcans sur la surface de la Terre*. C. R. S. de la Soc. Géol. de France, n. 12, p. 218 (1952). Errata: *ibid.* n. 14, p. 314 (1952).
- (62) MATSCHINSKI M., *Plissement d'un continent de forme approximativement triangulaire*. C. R. Ac. Sci. de France, t. 234, p. 2473 (1952).
- (63) MATSCHINSKI M., *Le critérium eulérien de la stabilité de blocs continentaux. critérium d'orogénèse*. Proc. Kkl. Nederl. Ak. Wetensch. ser. B, 55, n. 4, p. 411 (1952).
- (64) MATSCHINSKI M., *Bibliographie sur les questions de l'écorce terrestre et de l'isostasie*. Rev. Géomorph. Dyn., n. 6, Supplément, p. 1. (1953).