

Sulla correzione topografica nei rilievi gravimetrici geomnerari

M. BERNABINI

Ricevuto il 5 Gennaio 1963

RIASSUNTO. — Si mette in evidenza che, in certi casi, l'estendere a zone lontane (oltre 20 km) la sola correzione per la calotta o piastra, può introdurre errori notevoli nelle differenze tra le anomalie, anche nel caso di rilevamenti su piccole aree; l'errore è funzione crescente delle differenze tra le quote delle stazioni. Si propone un criterio per determinare le distanze cui conviene limitare la correzione per la calotta (o piastra) e la topografica in senso stretto.

Si riporta, come esempio, il caso di un rilevamento (regione del M. Amiata) in cui i limiti comunemente adottati (calotta fino alla zona O_2 di Hayford e topografica fino alla M) avrebbero introdotto errori superiori a quelli che si sarebbero ottenuti scegliendo, in base all'analisi preventiva proposta, limiti più ristretti per le correzioni.

SUMMARY. — Sometime to extend but Bouguer's correction to far zones (up to 20 km), may lead to large errors in differences between gravity anomalies in small surveys too. Error increases with the difference between stations elevations. A rule in order to determine the limit of the extension of Bouguer's and topographic correction is suggested.

An example of a field survey which was made in the Mt Amiata region is cited. In this case the limits which normally are used — Bouguer's correction up to Hayford's O_2 — zone and topographic correction up to M-zone — would have led to large errors. By adopting the suggested rule the correction was more correct and simpler.

I - PREMESSE.

Nell'ultimo ventennio, come è noto, vi sono stati notevoli progressi nella costruzione dei gravimetri, i quali consentono oggi, nelle misure, approssimazioni dell'ordine del centesimo di mgal.

Sono state inoltre sviluppate nuove tecniche di elaborazione ed interpretazione dei risultati. Mediante queste si tende, in certo senso, a frazionare le anomalie in modo da riconoscere le parti dovute alle diverse cause che le hanno prodotte; le anomalie « residue », che così si cerca di mettere in evidenza, sono spesso modeste frazioni di quelle totali.

Tutto ciò ha determinato la necessità di una maggiore accuratezza sulle correzioni che si apportano ai valori misurati; infatti gli errori delle correzioni si trasmettono integralmente sulle anomalie residue, rispetto alle quali acquistano perciò importanza percentualmente molto maggiore di quanto si abbia nelle anomalie totali.

Le correzioni relative al valore normale ed alla quota possono raggiungere l'approssimazione voluta in modo relativamente facile (*), cioè accrescendo l'approssimazione con cui vengono determinate le coordinate dei punti di stazione.

Per la correzione topografica completa (correzione per la piastra o calotta sferica più correzione topografica in senso stretto), il problema è invece meno semplice a causa delle difficoltà nella valutazione degli errori dovuti alle schematizzazioni che si debbono introdurre per non rendere i calcoli estremamente lunghi e laboriosi. Ciò è particolarmente sentito quando i rilevamenti interessano aree a topografia accidentata. In tal caso infatti, l'entità della correzione topografica completa può raggiungere valori notevoli (fino a decine di mgal ed oltre); errori percentualmente non rilevanti possono allora inficiare i risultati di una campagna gravimetrica, specialmente quando questa è eseguita per fini di una ricerca geomineraria, in cui la parte delle anomalie, dovuta alle masse « interessanti », può essere di modesta entità.

D'altra parte in tali casi la correzione topografica porta un cospicuo onere di lavoro, ed è dunque conveniente limitare all'indispensabile e semplificare al massimo la correzione stessa.

I problemi che entrano in gioco in tale correzione riguardano:

- a) la scelta del tipo di schematizzazione geometrica da adottare;
- b) la valutazione delle densità ed il modo di portarle in calcolo;
- c) la scelta della distanza cui limitare la correzione stessa.

Mentre i primi due problemi sono già stati discussi da vari autori (5 7 9 11 12 13) l'ultimo, almeno a quanto ci risulta, non è stato ancora trattato esaurientemente. La minore attenzione dedicata a questo pro-

(*) A meno che non intervengano valori anomali dei gradienti verticali (vedi Alfano (1)).

blema era del resto giustificata dato che, sino a poco tempo fa, l'impiego della gravimetria per fini geominerari era limitato ad aree pianeggianti; in tali casi il trascurare, nella correzione, zone lontane non introduce errori notevoli nelle differenze tra le anomalie di stazioni vicine.

II - SCHEMI DI CORREZIONI ATTUALMENTE IN USO E LORO CRITICA. — SCOPO DELLO STUDIO.

Alcuni tra i più usati schemi di correzioni (Hammer ⁽⁶⁾, Jung ⁽⁸⁾, Solami ⁽¹¹⁾ ecc.) prendono in considerazione la piastra indefinita di Bouguer e limitano la correzione topografica in senso stretto ad un raggio finito ed in genere non superiore ai 20-25 km. Del resto, anche con gli schemi che adottano la schematizzazione di Hayford, la correzione per la calotta, per rilievi regionali o locali, viene comunemente estesa fino alla zona O. (km 166,736) mentre si limita la correzione topografica in senso stretto ad un raggio minore.

Tali schematizzazioni sono perfettamente giustificate, in quanto permettono di ottenere risultati sufficientemente approssimati, nel caso di rilievi con stazioni situate a quote prossime alla quota media della parte di regione cui è stata estesa soltanto la correzione per la calotta. In tal caso, la ulteriore correzione topografica non effettuata, avrebbe dovuto eliminare solo gli effetti residui delle ondulazioni della superficie topografica intorno alla quota media, effetti che si smorzano rapidamente con la distanza dal punto di stazione, e che perciò, da una certa distanza in poi, possono essere trascurati.

Gli schemi usuali possono, invece, essere poco rispondenti nei casi, non rari, di stazioni situate a quote tutte superiori (o inferiori) alla quota media regionale. Con la correzione topografica dovrebbero infatti essere eliminate, oltre che le influenze delle ondulazioni della superficie topografica intorno alla quota media regionale, anche gli apporti delle masse ipotetiche (o esistenti), comprese tra la quota stazione e detta quota media, e considerate (o non considerate) nella correzione per la calotta sferica.

Un caso limite è quello di stazioni situate su un rilievo montuoso di non larga estensione circondato da una vasta regione a quota prossima al livello del mare. In tal caso sia la correzione per la calotta che quella topografica (in senso stretto), dovrebbero essere limitate ad un raggio pari alla dimensione massima del rilievo montuoso stesso. Estendere al di là di tale raggio la sola correzione per la calotta sferica porta infatti

ad errori notevoli nelle differenze tra le anomalie di stazioni prossime situate a quote differenti.

Si considerino ad es. le due stazioni *A* e *B* (Fig. 1) che si suppongono tanto vicine che la loro distanza sia trascurabile rispetto ai raggi delle zone più lontane; la correzione topografica sia estesa fino alla distanza r_1 , la correzione per la calotta fino alla distanza r_2 . In tal modo la correzione topografica non viene applicata alle zone comprese tra r_1 ed r_2 . Per la stazione *A*, nella correzione per la calotta, è stata considerata la zona di sezione *PQ.RS*, per la stazione *B* la zona considerata è quella di sezione *MN.RS*; la differenza tra i contributi della zona considerata

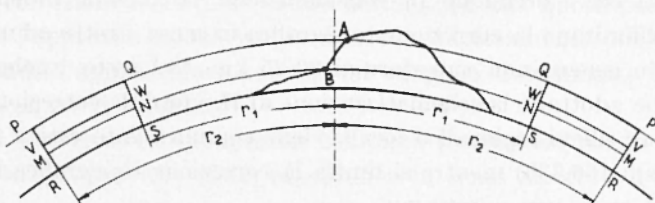


Fig. 1

sulle due stazioni (che rappresenta l'errore dovuto allo schema di correzione adottato) è pari all'apporto sulla stazione *A* della zona *VW.RS* (*) L'errore introdotto è sistematico in quanto funzione della differenza tra le quote delle due stazioni; esso sarebbe stato del tutto eliminato, contenendo la correzione per la calotta allo stesso raggio limite della correzione topografica.

Esistono pertanto casi in cui lo schema delle correzioni di uso corrente può portare ad errori notevoli e talvolta non tollerabili. Quando si opera in zone a topografia accidentata è necessario stabilire volta per volta i limiti di estensione delle correzioni in base ai valori degli errori massimi compatibili con la approssimazione richiesta.

Scopo del presente lavoro è fornire un criterio per la determinazione di tali limiti, per rilevamenti a scopo geominerario, nel caso che si sia scelta per la correzione una suddivisione in zone sferiche o cilindriche. Sarà portata la massima attenzione alle zone comprese tra i 20 km e il raggio esterno della zona O_2 di Hayford (166,736 km). Per le zone distanti meno di 20 km, infatti, le variazioni tra le correzioni di stazioni vicine sono influenzate non solo dalle variazioni della quota delle stazioni, ma anche dalla variazione della situazione planimetrica delle stazioni

(*) In cui $VW = PM$.

stesse, si che in genere è necessario calcolare le correzioni per ogni singola stazione o gruppi di stazioni (nel caso di stazioni molto ravvicinate).

Per le zone oltre i 20 km, invece, le variazioni delle correzioni per punti vicini alla stessa quota, diventano in genere tanto esigue da poter essere trascurate: in tal caso è possibile anche ricavare, con sufficiente approssimazione, formule semplificate che consentono la determinazione dei valori delle correzioni (e quindi degli errori, tra stazioni vicine, che si commettono non considerandole) in funzione delle sole quote delle stazioni, una volta determinate le quote medie delle singole zone o di complessi di zone.

In regioni, come l'Italia, per le quali non si trovino a distanze inferiori ai 5000 km, vastissime aree con quote medie elevate, le zone oltre la O_2 di Hayford, possono essere legittimamente trascurate almeno per stazioni con dislivelli non superiori ai 2000 m.

III — CRITERIO PER LA DETERMINAZIONE DELLE DISTANZE CUI LIMITARE LA CORREZIONE PER LA CALOTTA (O PIASTRA) E QUELLA TOPOGRAFICA IN SENSO STRETTO.

Il criterio proposto si basa su due serie di verifiche:

a) si calcolano le differenze tra stazioni vicine della componente verticale dell'attrazione delle masse, esistenti al disopra del geoide, nelle varie zone della suddivisione scelta per le correzioni; ciò consente di controllare fino a quale distanza tali differenze siano superiori ad un certo valore massimo compatibile con l'approssimazione che si vuole ottenere (*). Una volta raggiunta una distanza alla quale le differenze di attrazione risultano inferiori al valore predetto, si può evitare di estendere tutte le correzioni alle zone più lontane; in tali casi inoltre l'arrestare una delle correzioni ed applicare l'altra alle zone più lontane può anche portare ad errori maggiori.

b) Per le zone in cui la differenza degli apporti delle masse esistenti non è trascurabile, si potrà verificare se sia però trascurabile la

(*) La determinazione di tali errori massimi costituisce un problema a sé, già trattato da vari Autori (^{5 11}). In ogni modo si ricorda che per le zone più lontane il problema è il comprendere o meno tali zone nelle correzioni e pertanto ovviamente gli errori dovuti alla valutazione delle densità e quote medie dei compartimenti di tali zone debbono già risultare trascurabili. Quindi, come si è già detto, gli errori in tal caso sono sistematici.

differenza tra le correzioni topografiche (in senso stretto). Solo per le zone ove tale differenza risultasse inferiore al limite prefissato, si potrebbe trascurare la sola correzione topografica (in senso stretto).

Ovviamente tali verifiche non dovranno essere effettuate su tutte le possibili coppie di stazioni. Questo, che del resto equivarrebbe a compiere tutte le correzioni possibili, porterebbe a considerare limiti di estensione diversi per i vari gruppi anche vicini di stazioni, in contrasto con il criterio della uniformità delle correzioni per ogni rilevamento.

Se dunque si vuole adottare lo stesso sistema di correzioni per tutte le stazioni del rilevamento, e nello stesso tempo si vuole che gli errori dovuti alla limitazione della estensione delle correzioni siano inferiori, per tutte le coppie di stazioni vicine, a limiti prefissati, occorrerà considerare solo la coppia di stazioni per cui siano massimi tali errori (*).

Come si è detto, le verifiche da effettuare sono di due tipi: la prima (*a*) per limitare alla stessa distanza tanto la correzione per la calotta che quella topografica; la seconda (*b*) per eventualmente restringere ulteriormente la correzione topografica.

Nel caso più generale, si dovranno considerare due coppie di stazioni, quella che rende massima la differenza, tra le stazioni, degli apporti delle varie zone e quella che rende massima la differenza tra le correzioni topografiche (in senso stretto) delle varie zone.

Per determinare tali coppie è opportuno premettere alcune considerazioni sulle variazioni possibili sia degli apporti delle zone che delle correzioni topografiche in senso stretto, in funzione essenziale delle quote delle stazioni.

Le variazioni delle quote medie delle diverse zone per la parte considerata nel presente lavoro, cioè oltre i 20 km, variano molto lentamente con la posizione planimetrica delle stazioni, sì che in una analisi di prima approssimazione esse possono essere trascurate nel caso di stazioni vicine (meno di 5-10 km a seconda dei casi). Ove il rilievo fosse molto esteso si potrà suddividerlo in gruppi di stazioni ed applicare le verifiche ad ogni singolo gruppo.

Si supporrà perciò che le quote medie delle zone restino costanti per tutte le stazioni considerate.

(*) Se tale coppia fosse del tutto singolare, per cui si potesse ammettere un errore locale maggiore, la coppia da considerare per le verifiche sarebbe quella che dà il massimo errore, scelta tra le coppie di stazioni vicine in condizioni di normalità.

Verifica a) — Nei limiti sopra indicati, l'apporto delle masse comprese nelle zone considerate (20-200 km) è una funzione crescente della quota di stazione H e se si considerano stazioni con quote non superiori ai 2000 m tale funzione è interpolabile con una funzione lineare con scarti non superiori a qualche centesimo di mgal (vedi appendice). In tal caso la coppia che darà il massimo valore nella differenza tra le attrazioni dovute alle varie zone sarà la coppia cui compete il dislivello massimo (*).

Tale massimo valore della differenza può essere calcolato o per mezzo delle normali tavole di correzione o per mezzo della espressione semplificata (vedi appendice)

$$\delta = \pi \varepsilon \sigma (r_2 - r_1) \frac{2Q}{r_1 r_2} \Delta H \quad [1]$$

in cui ε è la costante di attrazione universale; σ la densità; r_2 , r_1 e Q i raggi maggiore e minore e la quota media della zona o complesso di zone considerate; ΔH il dislivello tra le stazioni.

Se tale valore δ è inferiore al limite prefissato, si può evitare di estendere alla zona, o complesso di zone considerate, entrambe le correzioni; se invece è superiore al limite, dovrà essere applicata la correzione per la calotta (o piastra) e si dovrà controllare con la seconda verifica *b)* se è già trascurabile o meno la correzione topografica in senso stretto.

Nella Fig. 2 sono stati riportati i valori della funzione [1] per dislivelli unitari tra le stazioni nel caso della suddivisione di Hayford (zone M , N , O_1 , O_2).

Verifica b) — La correlazione topografica in senso stretto è, nei limiti indicati precedentemente, rappresentabile, in funzione della quota di stazione H , con una parabola con vertice in corrispondenza della quota H^* definita da (vedi appendice)

$$H^* = Q - \frac{r_1 r_2}{2R}$$

ove Q , r_1 ed r_2 sono la quota media, il raggio minore ed il raggio maggiore della zona, o complesso di zone considerate, e R il raggio medio terrestre.

(*) Questo nel caso si desideri che gli errori siano contenuti entro certi limiti, qualsiasi sia la coppia di stazioni che si prendono in considerazione. Se invece, come spesso accade, si possa ammettere un errore crescente con la distanza tra le due stazioni, le due stazioni da prendere in considerazione non saranno necessariamente quelle con dislivello massimo. Se si ammette un errore crescente linearmente con la distanza, le due stazioni saranno quelle per cui è massimo il rapporto tra dislivello e distanza reciproca.

Per determinare la coppia di stazioni che rende massima la differenza tra le correzioni topografiche, si deve verificare se la quota H^* rientra nell'ambito delle possibili quote di stazione nella regione da rilevare.

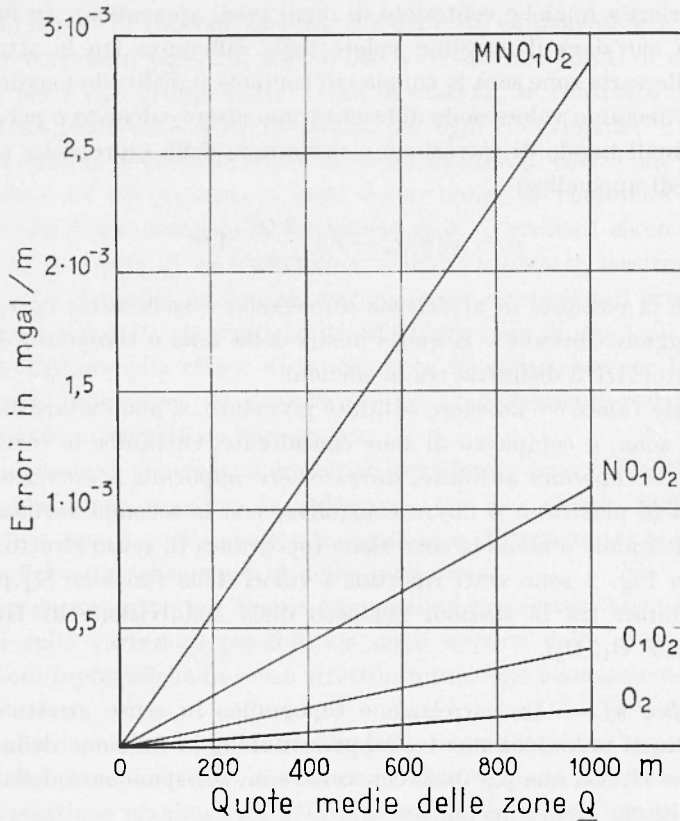


Fig. 2 - Errori per unità di differenza di quota tra due stazioni, dovuti al trascurare completamente le zone di Hayford indicate al fianco dei diagrammi.

Se H^* non è una quota possibile di stazione (quote delle stazioni tutte maggiori o minori di H^*), la coppia di stazioni da considerare sarà quella con dislivello massimo. La differenza tra le due correzioni potrà essere calcolata a mezzo delle tabelle di correzioni o con la espressione semplificata (vedi appendice)

$$\Delta Ct = \pi \varepsilon \sigma (r_2 - r_1) \left[\frac{2 \Delta H (H_{\min} - Q) + \Delta H^2}{r, r,} + \frac{\Delta H}{R} \right] \quad [2]$$

in cui H_{\min} è la quota della stazione più bassa e ΔH il dislivello. Se invece H^* è una quota possibile di stazione, le due stazioni da considerare saranno quelle di quota H^* e quella con dislivello massimo rispetto al H^* cioè quella che rende massimo il valore assoluto di $H - H^*$. Indicando con ΔH_{\max} tale dislivello massimo, l'espressione [2] si trasforma in

$$\Delta Ct = \pi \varepsilon \sigma (r_2 - r_1) \frac{(\Delta H_{\max})^2}{r_1 r_2} \quad [3]$$

Solo per le zone in cui il valore di tale differenza, calcolato o con le tavole di correzione o per mezzo delle espressioni [2] e [3], risulti essere minore dell'errore massimo ammissibile (per la zona o complesso di zone considerato) si può evitare di effettuare la correzione topografica.

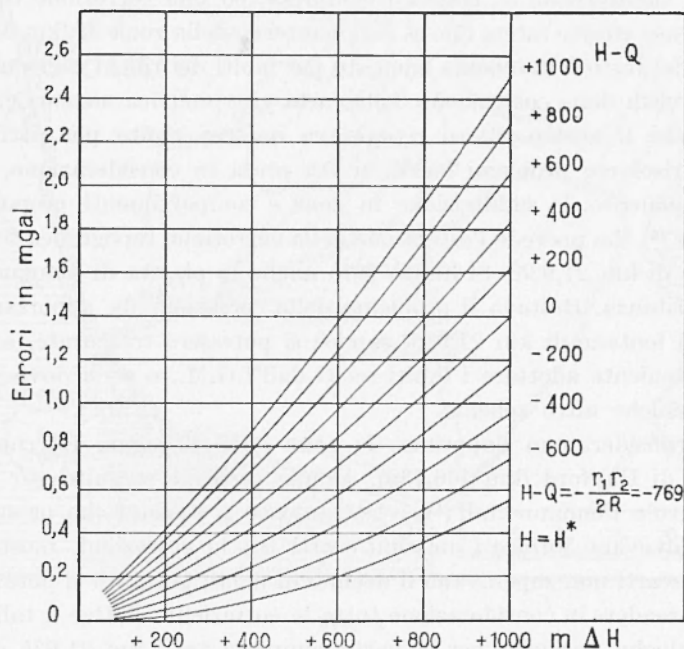


Fig. 3 - Errori tra due stazioni di quota H ed $H + \Delta H$ dovuti al trascurare la correzione topografica in senso stretto delle zone di Hayford N , O_1 , O_2 .

Nella Fig. 3 sono riportati i valori delle differenze tra le correzioni topografiche, per il complesso delle zone N , O_1 ed O_2 della suddivisione di Hayford, in funzione delle differenze di quota ΔH tra le due stazioni considerate e della differenza tra la quota della stazione più bassa H_{\min} e la quota media delle zone Q .

IV - APPLICAZIONE AD UN CASO CONCRETO.

Come esempio di applicazione delle considerazioni sopra esposte, si riporta il caso di un rilievo gravimetrico eseguito dall'Istituto di Geofisica Mineraria dell'Università di Roma negli anni 1958-59, ai confini tra Lazio e Toscana in una regione di circa 2000 km² comprendente il Monte Amiata ed il Monte Bellino. In tale rilievo si effettuarono misure in oltre 800 stazioni con dislivelli anche superiori ai 1500 m.

Nella zona era già stato eseguito da parte dell'Istituto Geografico Militare (10) un rilievo di carattere regionale nel quale, per le correzioni topografiche, si era considerata una calotta sferica estesa fino alla zona O_2 della suddivisione di Hayford compresa, ed una correzione topografica in senso stretto estesa fino al raggio esterno della zona M (km 58,800). Questo del resto è lo schema adottato per molti dei rilievi regionali, eseguiti in vista della costruzione della carta gravimetrica nazionale.

Poichè il nostro rilievo riguardava un'area molto più ristretta e doveva risolvere problemi locali, si era presa in considerazione, in un primo momento, la suddivisione in zone e compartimenti proposta da Hammer (6) che prevede l'estensione della correzione topografica fino alla distanza di km 21,935. Si limitò però anche la piastra di Bouguer alla stessa distanza. Restava il problema delle correzioni da apportare alle zone più lontane di km 21,935, se cioè si potessero trascurare, se fosse più conveniente adottare i limiti scelti dall'I.G.M., o se si dovesse preferire qualche altro schema.

Si considerarono dapprima, le zone oltre il raggio esterno della zona O_2 di Hayford (km 166,736). Alcune verifiche eseguite per mezzo delle Tavole Fondamentali (4), relativamente a stazioni che presumibilmente dovevano fornire i massimi scarti tra le correzioni, mostrarono che tali scarti non superavano il decimo di mgal; pertanto si poteva evitare di prendere in considerazione tutte le correzioni relative a tali zone.

Analoghe verifiche per la parte compresa tra i km 21,935 e i km 166,796 indicarono scarti superiori al mgal e pertanto non trascurabili.

Prima di procedere alle verifiche secondo il criterio esposto nel precedente paragrafo per determinare i limiti minimi di applicazione delle correzioni, si studiarono le variazioni delle correzioni per le diverse stazioni al fine di controllare il verificarsi delle ipotesi sulle variazioni stesse che sono alla base del criterio che si voleva applicare.

Si è detto che le correzioni per una data regione sono funzioni di due parametri: quota e situazione planimetrica delle stazioni. Per studiare

separatamente l'andamento della funzione al variare di uno o l'altro dei due parametri, si scelsero 12 stazioni distribuite nell'area del rilievo (Fig. 4) e si fece variare la loro quota tra 0 ed un massimo di 1800 m (*).



Fig. 4

Si calcolò pertanto, a mezzo delle Tavole Fondamentali (**), la componente verticale delle attrazioni, delle masse comprese tra i km 21,935 e 166,736, sulle varie stazioni fittizie situate, alle quote su indicate, sulla

(*) In tale intervallo sono comprese tutte le quote possibili delle stazioni.

(**) Per una prima zona (km 21,935 - km 28,800), non esistente nella suddivisione di Hayford, si calcolò una apposita tabella.

verticale delle 12 stazioni reali scelte. La densità fu considerata costante e pari a $2,4 \text{ Ton/m}^3$.

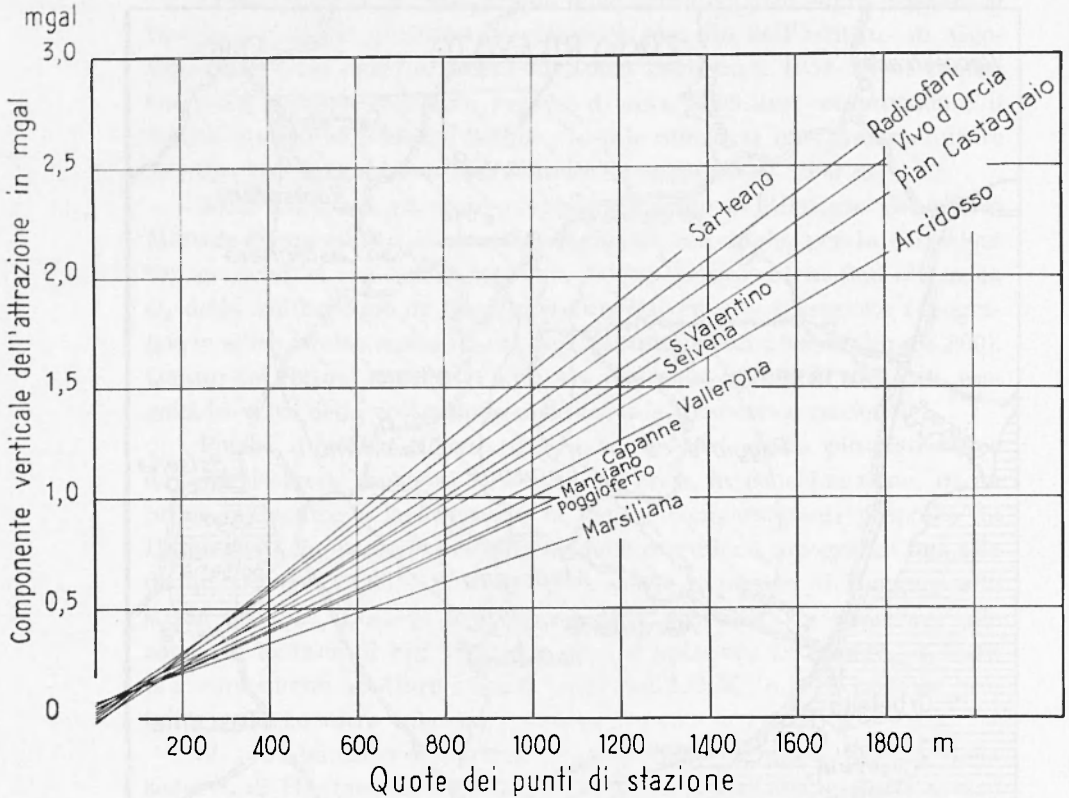


Fig. 5 - Apporti delle masse esistenti al disopra del geoide tra i raggi km 21,935 e 166,736 su stazioni fittizie situate sulla verticale dei punti di stazione indicate in Fig. 4.

I valori calcolati, riportati nella Fig. 5 in funzione delle quote fittizie di stazione, sono risultati, per ognuna delle 12 stazioni, interpolabili con funzioni lineari con scarti di valore non superiore agli errori dovuti alle interpolazioni sulle Tavole.

I gradienti delle funzioni, con la quota, variano da un minimo di $0,69 \times 10^{-3} \text{ mgal/m}$ (stazione di Marsiliana) ad un massimo di $1,59 \times 10^{-3} \text{ mgal-m}$ (stazione di Sarteano). Tale variazione è dovuta alle differenti

quote medie complessive (*) nelle zone considerate che sono risultate di 170 m per la stazione di Marsiliana e 400 m per la stazione di Sarteano (**).

Per valutare le variazioni delle correzioni con la posizione planimetrica delle stazioni, si sono considerati gli apporti delle 12 stazioni mantenendo costante la loro quota. Si è riscontrato che la funzione apporti-coordinate geografiche era interpolabile con un piano con scarti non superiori a 0,05 mgal.

I massimi gradienti avevano direzione circa Nord-Ovest e valori variabili (in funzione della quota di stazione considerata) tra poco più di 1×10^{-3} mgal/km per punti al livello del mare e 15×10^{-3} mgal/km per quote di stazione di 1200 m. Tali valori sono piccoli e del tutto non rilevanti. Pertanto per stazioni vicine si possono trascurare le variazioni degli apporti con la posizione planimetrica delle stazioni.

Analoghe considerazioni furono fatte sulle correzioni topografiche in senso stretto. Risultò che per ognuna delle 12 stazioni, i valori della correzione topografica potevano essere interpolati, in funzione delle quote fittizie di stazione, con archi di parabola, e che, ovviamente, per stazioni alla stessa quota si avevano valori variabili linearmente in funzione delle coordinate geografiche.

Risultavano pertanto verificate le considerazioni che si erano premesse al criterio esposto nel precedente paragrafo e cioè:

- a) gli apporti sono funzioni lineari della quota;
- b) le correzioni topografiche in senso stretto sono funzioni quadratiche della quota;
- c) le quote medie delle zone variano in maniera così esigua che, in prima approssimazione, si possono ritenere costanti per stazioni vicine.

Si poterono applicare le relazioni ricavate precedentemente per il calcolo degli errori massimi derivanti dall'aver o non aver considerato alcune zone nella correzione. Si presero in considerazione tutte le coppie

(*) Si suddivise ogni zona di Hayford in 12 compartimenti e si calcolò la quota media di ogni zona come media aritmetica tra le quote dei singoli compartimenti; poi si assunse come quota media complessiva la media ponderata delle quote medie delle singole zone, considerando come pesi per le singole zone le medie dei valori letti sulle Tavole Fondamentali in corrispondenza ad $H = \pm 1.000$ m.

(**) Sostituendo tali valori nella espressione (4) considerata nel precedente paragrafo si ottiene rispettivamente $0,67 \times 10^{-3}$ mgal/m nel primo caso e $1,57 \times 10^{-3}$ mgal/m nel secondo caso, in notevole accordo con i valori trovati per mezzo delle Tavole Fondamentali.

di stazioni con distanze non superiori ai km 5 e si determinò quella di dislivello massimo, scartando, come singolari, le stazioni a quota superiore ai 1400 m.

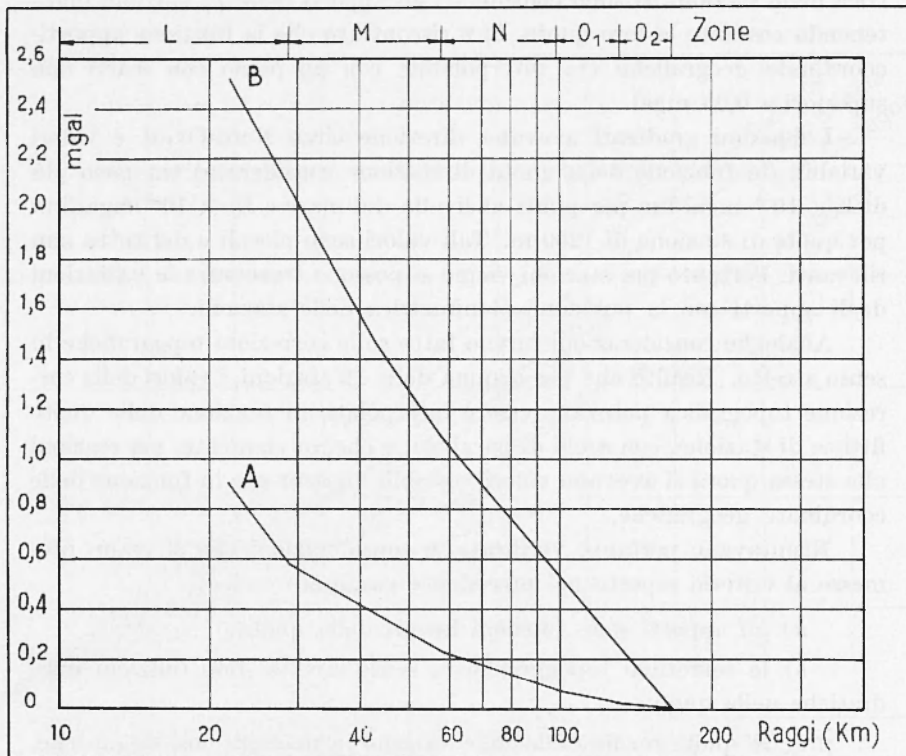


Fig. 6 - Errori tra due stazioni situate nella zona del M. Amiata a quote rispettivamente 600 e 1200 m:

A) se si trascura l'apporto delle masse comprese tra i raggi in ascissa ed il raggio esterno della zona O_2

B) se si trascura la correzione topografica in senso stretto tra i raggi indicati in ascissa ed il raggio esterno della zona O_2 (correzione per la calotta fino alla O_2 compresa).

Le due stazioni scelte erano situate sulle pendici del Monte Amiata a quota rispettivamente di circa 1300 e 600 m. Si calcolarono gli errori che si commettevano:

- 1) trascurando completamente le masse comprese nelle varie zone;
- 2) estendendo la calotta fino alla zona O_2 e non considerando le correzioni topografiche in senso stretto nelle varie zone.

I calcoli furono eseguiti sia con le Tavole Fondamentali sia con le espressioni [1] e [2] (*), con gli stessi risultati entro gli ordini di grandezza degli errori prevedibili (0,05 mgal). Tali risultati sono riportati nella Fig. 6.

Dall'analisi dei valori calcolati si possono trarre le seguenti conclusioni:

a) trascurando completamente le correzioni oltre i 21,735 km l'errore massimo che si commette è di 0,9 mgal;

b) applicando lo schema di correzione comunemente usato (e nel caso specifico seguito anche dall'I.G.M.) e cioè correzione per la calotta fino alla zona O_2 e quella topografica fino alla M , l'errore è di 1,1 mgal, maggiore perciò del precedente di solo 0,2 mgal; tale schema tuttavia è da scartare in quanto, pur essendo più oneroso del precedente, dà una minore approssimazione;

c) limitando entrambe le correzioni alla zona M , l'errore si riduce a 0,23 mgal; limitandola alla zona N l'errore scende al disotto di 0,1 mgal.

Poichè si voleva che l'errore dovuto alle zone lontane non superasse i 0,2 mgal, si scelse come limite per entrambe le correzioni il raggio esterno della zona N . In tal modo l'errore dovuto alla parte trascurata (zone O_1 ed O_2) non influisce affatto sulla approssimazione del rilevamento.

A P P E N D I C E

DERIVAZIONE ANALITICA DELLE FORMULE SEMPLIFICATE PRESENTATE NEL TESTO PER LA VALUTAZIONE DELL'ENTITÀ DEGLI ERRORI DOVUTI ALLA LIMITAZIONE DELLE CORREZIONI TOPOGRAFICHE PER ZONE COMPRESSE TRA 20 E 200 km.

Consideriamo una zona sferica compresa tra i raggi r_1 ed r_2 ed avente una quota media Q .

La componente verticale $\Delta g_z(r_1, r_2)$ dell'attrazione che le masse comprese in detta zona esplicano sul punto di stazione di quota H ,

(*) Si verificò prima che entrambe le quote fossero maggiori delle quote H^* per le varie zone; infatti, poichè le quote medie Q per le varie zone avevano i valori: L' (21,935 — 28,800 km) = 395 m; M = 280 m; N = 330 m O_1 = 310 m; O_2 = 200 m, le quote H^* date dalla relazione $H^* = Q - r_1 r_2 / 2R$ risultarono per la L' 345 m per la M 147 m; per la N — 127 m; per la O_1 — 722 m; per la O_2 — 1538 m.

viene generalmente calcolata come differenza tra l'apporto della corrispondente zona sferica di spessore H e la correzione topografica in senso stretto. Quest'ultima può considerarsi pari all'apporto di una zona sferica (sempre limitata tra i raggi r_1 ed r_2) di spessore $H - Q$, a meno di un termine correttivo T che tien conto delle ondulazioni della superficie topografica intorno alla quota media.

Si può scrivere:

$$\Delta g_z(r_1, r_2) = Z(H, r_1, r_2) - Z(H - Q, r_1, r_2) + T \quad [1]$$

Per ricavare formule semplificate per gli apporti delle zone sferiche nei casi interessanti il presente lavoro ($20 < r < 200$ km; $H < 2000$ m), è stata presa in considerazione una espressione ricavata da S. Ballarin ⁽³⁾, che fornisce i valori dell'attrazione f di una intera calotta sferica. L'apporto di una zona sferica compresa tra i raggi r_1 ed r_2 è infatti pari alla differenza tra gli apporti delle due calotte sferiche di raggio r_1 ed r_2 .

L'espressione di S. Ballarin è: (*)

$$f = -2\pi\epsilon\sigma R y \left[1 - \frac{1}{2} \operatorname{tg} a - \left(\frac{1}{2} \operatorname{cotg} a - 1 \right) y - \frac{3}{8} y^2 \operatorname{cotg} a \right] \quad [2]$$

in cui y è H/R (H è lo spessore della calotta, R il raggio medio terrestre), e $\operatorname{tg} a$ è $|H|/u = |H|/r$ (**).

Rendendo espliciti H , r ed R nella espressione [2] si deve distinguere se il punto su cui si vuol calcolare l'attrazione della calotta appartenga alla superficie inferiore o superiore della calotta stessa.

Assumendo come verso positivo delle attrazioni quello verso il basso ed indicando con h il valore assoluto dello spessore della calotta, nel caso di un punto appartenente alla superficie inferiore della calotta si ha:

$$f_i(r, h) = -2\pi\epsilon\sigma \left[h - \frac{1}{2} \frac{h^2}{r} - \left(\frac{1}{2} \frac{r}{h} - 1 \right) \frac{h^2}{R} - \frac{3}{8} \frac{h^2 r}{R^2} \right]$$

nel caso di un punto sulla superficie superiore, con le stesse notazioni:

$$f_s(r, h) = 2\pi\epsilon\sigma \left[h - \frac{1}{2} \frac{h^2}{r} + \left(\frac{1}{2} \frac{r}{h} - 1 \right) \frac{h^2}{R} - \frac{3}{8} \frac{h^2 r}{R^2} \right]$$

(*) Tale formula fornisce valori approssimati a meno di 0,005 mgal quando lo spessore della calotta è inferiore ai limiti indicati nella tabella sotto indicata in corrispondenza dei vari valori del raggio della calotta:

$\pm H$ in km	0,5	1	1,5	2	3	4
r in km	6	14	24	34	60	88

(da S. Ballarin ⁽³⁾)

(**) Nei casi da noi considerati si può confondere il raggio della calotta r con la corda u .

Per calcolare l'attrazione di una zona sferica, basta eseguire la differenza tra l'attrazione di due calotte di raggio r_2 ed r_1 .

Nel primo caso si ha con facili passaggi:

$$Z_i(r_1, r_2, h) = f_i(r_2, h) - f_i(r_1, h) = -\pi \varepsilon \sigma (r_2 - r_1) \left[\frac{h^2}{r_2 r_1} - \frac{3 h^2}{4 R^2} - \frac{h}{R} \right] \quad [3]$$

Nel secondo caso:

$$Z_s(r_1, r_2, h) = f_s(r_2, h) - f_s(r_1, h) = \pi \varepsilon \sigma (r_2 - r_1) \left[\frac{h^2}{r_1 r_2} - \frac{3 h^2}{4 R^2} + \frac{h}{R} \right] \quad [4]$$

Nelle due ultime formule scritte, per r_2 inferiore a 200 km, il termine $3 h^2/4 R^2$ porta una correzione inferiore a 1×10^{-3} mgal e pertanto, può esser trascurato.

Possiamo sostituire le espressioni [3] e [4] semplificate nella [1] nei due casi di $H > Q$ ed $H < Q$ (*).

Nel caso di $H > Q$ la [1] diventa:

$$\begin{aligned} \Delta g_z(r_1, r_2) &= Z_s(r_1, r_2, H) - Z_s(r_1, r_2, H - Q) + T = \\ &= -\pi \varepsilon \sigma (r_2 - r_1) \left[\frac{H^2}{r_1 r_2} + \frac{H}{R} - \frac{(H - Q)^2}{r_1 r_2} - \frac{H - Q}{R} \right] + T \end{aligned} \quad [5]$$

Nel caso di $H < Q$, la [1] diventa:

$$\begin{aligned} \Delta g_z(r_1, r_2) &= Z_s(r_1, r_2, H) + Z_i(r_1, r_2, Q - H) + T = \\ &= \pi \varepsilon \sigma (r_2 - r_1) \left[\frac{H^2}{r_1 r_2} + \frac{H}{R} - \frac{(Q - H)^2}{r_1 r_2} + \frac{Q - H}{R} \right] + T \end{aligned} \quad [6]$$

Dalle [5] e [6] si perviene ad una unica espressione data da:

$$\Delta g_z = \pi \varepsilon \sigma (r_2 - r_1) \left[\frac{2 H Q - Q^2}{r_1 r_2} + \frac{Q}{R} \right] + T \quad [7]$$

Il termine T essenzialmente positivo tien conto della differenza tra l'attrazione di una zona di spessore Q e l'effettiva attrazione delle masse esistenti nella zona considerata, tra il geoido e la superficie topografica.

In genere, come ha già dimostrato M. Cunietti (*), T per le zone lontane è piccolo rispetto alle altre correzioni e non varia molto al variare della quota di stazione H . In prima approssimazione possiamo ritenere trascurabile la sua variazione rispetto ad H e considerarlo funzione di r_1 , r_2 e della posizione della stazione in una data regione. Nelle differenze tra le correzioni per una stessa zona, di stazioni prossime, il

(*) Si assume $H > 0$.

termine T può esser pertanto trascurato anche se tra le due stazioni sussiste una notevole differenza di quota.

La [7] quindi risulta una funzione lineare in H .

Le differenze degli apporti Δg_z tra due stazioni di quota H e $H + \Delta H$, considerando costante Q , è data pertanto da:

$$\Delta g_z(H + \Delta H) - \Delta g_z(H) = \pi \varepsilon \sigma (r_2 - r_1) \frac{2Q}{r_1 r_2} \Delta H \quad [8]$$

La correzione topografica in senso stretto (Ct), come si è detto, è pari a:

$$Ct = Z(H - Q, r_1, r_2) - T$$

Sostituendo il valore per l'attrazione di una zona sferica dato dalle [3] e [4], si ha:

$$Ct = \pi \varepsilon \sigma (r_2 - r_1) \left[\frac{(H - Q)^2}{r_1 r_2} + \frac{H - Q}{R} \right] + T \quad [9]$$

Considerando T non dipendente da H , la funzione [9] in H è rappresentata da una parabola. L'ascissa del vertice H^* , che in questo caso è il minimo della funzione stessa, è dato da:

$$H^* = Q - \frac{r_1 r_2}{2R} \quad [10]$$

La differenza tra le correzioni topografiche di due stazioni vicine di quota H ed $H + \Delta H$, per le quali si possa ritenere costante Q , con le ipotesi sopra indicate è data da:

$$Ct(H + \Delta H) - Ct(H) = \pi \varepsilon \sigma (r_2 - r_1) \left[\frac{2\Delta H(H - Q) + \Delta H^2}{r_1 r_2} + \frac{\Delta H}{R} \right] \quad [11]$$

Roma 1962

Istituto di Geofisica Mineraria della Facoltà d'Ingegneria.

BIBLIOGRAFIA

- (1) ALFANO L., *La correzione per il gradiente verticale anomalo in gravimetria*, « Quaderni di Geofisica applicata », **XX**, (1959).
- (2) BALLARIN S., *Metodi grafici per il calcolo della riduzione topografica di zone vicine al punto di stazione*. « Memorie della Soc. Astr. Ital », **XIII**, (1940).
- (3) BALLARIN S., *La correzione topografica delle misure di gravità nella ipotesi della Terra sferica*. « Boll. Geod. dell'Ist. Geogr. Mil. » **I**, (1941).

- (4) CASSINIS G., DORE P., BALLARIN S., *Tavole Fondamentali per la riduzione dei valori osservati della gravità*. Pubbl. R. Comm. Geod. Ital., Nuova Serie 13, (1937).
 - (5) CUNIETTI M., *Natura ed entità degli errori nelle riduzioni topografiche ed isostatiche dei valori della gravità*. « Annali di Geofisica » I, 4, (1948).
 - (6) HAMMER S., *Terrain correction for gravimeter stations*. « Geophysics » IV, 3, (1939).
 - (7) IVAHNOE L. F., *Chart to check elevation factor effects on gravity anomalies*. « Geophysics », XXII, 3, (1957).
 - (8) JUNG K., *Die Below'sche Methode zur Bestimmung der wirkung gegebener Massen auf Krümmungsgrößen*. « Zeitschf. of Geoph. », XIII, 2-3, (1935).
 - (9) NETTLETON L. L., *Determination of density for reduction of gravimeter observation*. « Geophysics » IV, 3, (1939).
 - (10) SALVIONI G., *Rilievo gravimetrico della Toscana*. « Boll. di Geod. e Scienze Affini », XII, 4, (1954).
 - (11) SOLAINI L., *Sulla riduzione topografica delle misure di gravità*. « Riv. Geomineraria » 2-3, (1943).
 - (12) VAJK R., *Bouguer correction with varying surface density*. « Geophysics » XXI, 4, (1956).
 - (13) VECCHIA O., *La densità nella gravimetria in montagna*. « Quaderni di Geofisica Applicata », XVIII-XIX, (1957-58).
-