

Interazioni tra atmosfera ed idrosfera (*)

P. CALOI

Ricevuto il 1 Dicembre 1962

RIASSUNTO. -- Fra i legami che vincolano i movimenti di parti dell'idrosfera (mari, laghi) a quelli dell'atmosfera, si prendono in esame l'azione del vento e il transito di perturbazioni della pressione atmosferica, con particolare riguardo ai moti di masse liquide non stratificate (indefinite o limitate), considerando o trascurando l'effetto della viscosità e della rotazione della Terra.

Viene sottolineata l'importanza che rivestono la velocità e il verso di propagazione dei disturbi microbarici, nel provocare ampi spostamenti dell'acqua in mare aperto o alla base di baie, di golfi e di insenature in genere. Nel discutere il problema delle onde interne (in mare aperto o in bacini chiusi), si constata, fra l'altro, che le teorie finora sviluppate sono insufficienti a chiarire l'ampiezza e la persistenza di dette onde in casi particolari (lago di Garda, lago di Bracciano...), nei quali intervengono indubbi fenomeni di risonanza con perturbazioni coperiodali dell'atmosfera.

Si delineano quindi le modalità di formazione della zona del salto termico nei laghi e nei mari, e si accenna infine all'arduo problema della previsione delle mareggiate (« Storm Surges »), conseguenti a cospicue perturbazioni atmosferiche.

SUMMARY — Among the links connecting the movements of hydro-spheric zones (such as lakes, seas, etc) with those of the atmosphere, the A. considers the action of the wind and the transit of atmospheric pressure perturbations, with special regard to the movements of non-stratified liquid masses (either undefined, partially or totally limited) or stratified (either undefined or limited), considering or neglecting the influence of eddy viscosity and rotation of the Earth.

(*) Comunicazione presentata al Simposio Internazionale sul tema: *Influenze meteorologiche e oceanografiche sulle variazioni del livello marino*, organizzato dall'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti (Venezia, 5-6 Ottobre 1962).

(Lavoro condotto con contributi del Consiglio Nazionale delle Ricerche).

It is stressed the importance reached by the velocity and direction of propagation of micro-baric disturbances which cause wide displacements of water either in open sea or in bays, gulfs, etc. In the discussion of the problem of inner waves (in open sea or in delimited basins) it has been noticed how the theories so far developed are not sufficient to explain the size and the persistence of such waves in particular cases (lakes of Garda, Bracciano, etc.) where take place precise resonance phenomena accompanied by contemporary atmospheric perturbations.

The process of formation of the thermal shift aerea in seas and lakes is thus outlined and mention is made of the difficult problem of forecasting storm surges consequent to remarkable atmospheric perturbations.

Introduzione. — La mutua influenza fra atmosfera ed idrosfera si manifesta sotto forma di fenomeni molteplici, che interessano il clima e le variazioni del tempo, la stratificazione e la circolazione negli oceani e nei laghi. Lungi da me il proposito di accennare a questi fenomeni grandiosi, come il titolo alquanto pretenzioso della mia comunicazione potrebbe far supporre; mi limiterò soltanto ad alcuni aspetti di qualcuno di detti fenomeni, con particolare riguardo a quelli che possono comunque interessare l'Adriatico.

Ritengo superfluo accennare al moto ondoso, e alle sue relazioni con il vento: il fenomeno assume proporzioni cospicue negli oceani e su di esso hanno condotto pregevoli lavori parecchi oceanografi, quali G. Neumann e W. Munk. Esulano pure dal mio assunto le strette relazioni fra circolazione dell'atmosfera e correnti oceaniche, nonché fra l'umidità dell'aria, l'evaporazione sopra i mari, la precipitazione e la distribuzione della salinità e della temperatura nel mare. Neppure potrò accennare alle notevoli influenze in campo biologico, che tali mutue relazioni comportano.

Sostanzialmente, il mio intervento verterà sui moti liberi e forzati di intere masse liquide, nei loro legami con particolari fenomeni atmosferici, nonché sull'inusitata ampiezza e durata di onde interne — legate alla termologia delle acque —, quando sulla stratificazione di una massa liquida interagisca l'atmosfera, in determinate situazioni fisiche.

I. — *Movimenti interessanti masse liquide non stratificate.* — Ritengo inutile mostrare come questi movimenti si realizzano. Per quanto concerne le oscillazioni libere di masse liquide, limitate da superficie qualunque (mari chiusi, laghi, ecc.), o di parti di masse liquide (canali chiusi ad un estremo, golfi, baie, ecc.), tutta un'ampia letteratura ormai è stata sviluppata. L'impostazione scientifica, dal punto di vista idrodinamico,

è stata data dai geniali lavori di Chrystal. Pregevoli contributi portarono in seguito Proudman, Matteuzzi, Defant, Goldberg e, soprattutto, Hidaka. Alcune estensioni furono realizzate dallo scrivente.

Qui ci soffermeremo particolarmente sulle cause di questi movimenti, liberi o forzati che siano.

a) Consideriamo dapprima le variazioni di livello provocato da variazioni della pressione atmosferica per distese d'acqua indefinite.

Supponiamo che il movimento si realizzi nel piano x, z , essendo x l'asse orizzontale giacente sulla superficie indisturbata del mare, z l'asse verticale rivolta positivamente verso l'alto. Sia inoltre h la profondità costante del mare di densità ρ . Sia infine trascurabile l'accelerazione delle particelle fluide raggiunte dal moto.

Quando una pressione superficiale p_0 si propaga sul mare, l'equazione del moto è

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial x}, \quad [1]$$

dove ν è il coefficiente di viscosità dinamica (eddy viscosity), $c = \sqrt{gh}$ è la velocità di propagazione di un'onda lunga e $\xi = \int u dt$ denota lo spostamento orizzontale delle particelle. Poiché $\frac{\partial \xi}{\partial t} = u$, possiamo anche scrivere

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p_0}{\partial t \partial x} \quad [2]$$

L'assenza di forza tangenziale sulla superficie libera porta alla condizione limite $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ per $z = 0$, l'altra condizione limite essendo $u=0$ per $z = -h$.

Ponendo nella [2] $p_0 = A e^{i(\sigma t - mx)}$, si trova

$$u = \frac{A \sigma}{m \rho (c^2 - U^2)} \left(\frac{\cosh(i-1)\delta \cdot z}{\cosh(i-1)\delta \cdot h} - 1 \right) e^{i(\sigma t - mx)}, \quad [3]$$

dove $\delta = \sqrt{m^2(c^2 - U^2)}/2\nu\sigma$, essendo $U = \frac{\sigma}{m}$ la velocità di propagazione della pressione superficiale.

Nel caso di una corrente di marea, provocata da una forza $X = fe^{i(\sigma t - mx)}$ l'equazione del movimento diviene

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = g^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + j e^{i(\sigma t - mx)},$$

da cui

$$u = -ij \frac{\sigma}{m^2 (U^2 - c^2)} \left\{ 1 - \frac{\cosh(1+i)\delta' \cdot z}{\cosh(1+i)\delta' \cdot h} \right\} e^{i(\sigma t - mx)}, \quad [4]$$

dove

$$\delta' = \sqrt{m^2 (U^2 - c^2) / 2\nu}.$$

Se

$$U \gg c, \delta' = \sqrt{\frac{\sigma}{2\nu} \left(1 - \frac{c^2}{U^2} \right)} \cong \sqrt{\frac{\sigma}{2\nu}}.$$

Il calcolo numerico delle parti reali di [3] e [4] permette di determinare la distribuzione della velocità delle particelle liquide con la profondità. Tale calcolo è stato compiuto da S. Unoki (1), il quale — anche sulla base dei valori osservati da S. Ogura per le correnti di marea nel Mar Giallo — è arrivato alla conclusione che, a differenza di quanto si verifica per correnti oceaniche, nel caso di alta marea e correnti di marea si può ritenere essenzialmente uniforme la distribuzione della velocità dalla superficie al fondo, anche sotto l'azione della viscosità cinematica.

Nei confronti di un'onda lunga pertanto, possiamo ritenere che tutte le particelle di una sezione verticale subiscono una uniforme resistenza. Da questo punto di vista, in luogo della viscosità, noi possiamo considerare la forza d'attrito proporzionale alla velocità delle particelle fluide, considerata come la più semplice forma di resistenza.

A questo riguardo, un confronto con i dati di osservazione può consentire di valutare la bontà dell'ipotesi dell'attenuazione di un'onda lunga come effetto dell'azione di resistenza proporzionale alla velocità.

Le equazioni di moto e continuità sono

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - k u, & \frac{\partial w}{\partial t} &= -g \frac{\partial \zeta}{\partial z} - k w, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= -h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad [5]$$

dove k è il coefficiente di resistenza e ζ è l'innalzamento. Quando si considera u , w e ζ proporzionali a $e^{i\sigma t}$, si ha:

$$i\sigma(i\sigma + k)\zeta = c^2 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} \right). \quad [6]$$

In coordinate polari, fatto $\zeta = f(r) e^{-imr}$, si perviene all'equazione

$$e^2 \frac{d^2 f}{dr^2} - 2 i m c \frac{df}{dr} + (\sigma^2 - c^2 m^2 - i \sigma k) f = 0.$$

Quando $k \ll \sigma$, condizione generalmente soddisfatta, una soluzione assume la forma

$$f = A e^{\left\{ i m \pm \frac{1}{c} \sqrt{-\sigma^2 + i \sigma k} \right\} r} \approx A e^{\pm \frac{k}{2c} r + i \left(m \pm \frac{\sigma}{c} \right) r}$$

L'essere ζ finito ad $r = \infty$ porta a trascurare il segno $+$. Pertanto

$$\zeta = A e^{-\frac{k}{2c} r + i \left(m - \frac{\sigma}{c} \right) r} = A e^{-\frac{k}{2c} r} e^{i \sigma \left(t - \frac{r}{c} \right)} \quad [7]$$

Perciò l'ampiezza di un'onda lunga anulare decresce gradualmente,

proporzionalmente a $e^{-\frac{k}{2c} r}$: una perturbazione avanza quindi con un dato periodo ma con una velocità c caratteristica di quel determinato mare.

Dalla [7] abbiamo $\zeta = A e^{-\frac{k}{2c} r}$, da cui $\lg_{10} \zeta = -\frac{k}{2c} M + B$,

essendo $M = \lg e_{10}$. Perciò $\lg_{10} \zeta$ può essere espresso linearmente in funzione di r . Applicando la [7] a osservazioni di onde lunghe ottenute da Nakano (2), Unoki ottenne $k = 5,50 \times 10^{-4}$ c.g.s. Nel caso di sesse di lago (per $h = 100$ m e periodi dell'ordine di 20^m), Defant ottenne per k il valore 5×10^{-4} c.g.s., dello stesso ordine di grandezza di quello ottenuto da Unoki.

Se ne conclude che è ragionevole, nel caso delle onde lunghe, sostituire all'azione della viscosità una resistenza proporzionale alla velocità delle particelle.

Per le grandi distese d'acqua, non può essere trascurato l'effetto della rotazione della Terra. Aggiungendo alla forza d'attrito proporzionale alla velocità delle particelle fluide, la forza di Coriolis, le equazioni di moto e continuità divengono (1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + k u - \lambda w &= -g \frac{\partial}{\partial x} (\zeta - \zeta'); & \frac{\partial w}{\partial t} + k w + \lambda u &= -g \frac{\partial}{\partial z} (\zeta - \zeta'), \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad [8]$$

dove $\lambda = 2 \omega \sin \vartheta$ è il coefficiente di Coriolis e $\zeta' = -\frac{p_0}{g \rho}$ denota l'innalzamento che equilibra la pressione superficiale p_0 .

Prendendo u , w , ζ' e ζ proporzionali a $e^{i\sigma t}$ ed eliminando u , w , abbiamo l'equazione dipendente da ζ soltanto; essa è

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + K \zeta = \frac{\partial^2 \zeta'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta'}{\partial z^2}, \quad [9]$$

dove

$$K = \frac{\sigma^2 (k^2 + \sigma^2 - \lambda^2)}{c^2 (k^2 + \sigma^2)} - i \frac{\sigma k (k^2 + \sigma^2 + \lambda^2)}{c^2 (k^2 + \sigma^2)}.$$

Assumendo come pressione superficiale

$$p_o = A e^{i(\sigma t - m x)} \cos n z,$$

Unoki ottiene

$$\zeta = - \frac{A}{g \rho} \frac{m^2 + n^2}{\sqrt{(m^2 + n^2 - a)^2 + \gamma^2}} \cdot e^{i(\sigma t - m x - \varepsilon)} \cos n z, \quad [10]$$

dove

$$\begin{aligned} \tan \varepsilon &= \frac{\sigma k (\lambda^2 + k^2 + \sigma^2)}{\lambda^2 \sigma^2 + (k^2 + \sigma^2) \{c^2 (m^2 + n^2) - \sigma^2\}}, \\ a &= \frac{\sigma^2 (k^2 + \sigma^2 - \lambda^2)}{c^2 (k^2 + \sigma^2)}, \quad \gamma = \frac{\sigma k (k^2 + \sigma^2 + \lambda^2)}{c^2 (k^2 + \sigma^2)}. \end{aligned} \quad [11]$$

Questa soluzione mostra che la fase di innalzamento non coincide con quella della pressione, rispetto la quale presenta una differenza di fase pari a ε o una differenza di tempo di ε/σ . Poiché è numericamente provato che $|\varepsilon|$ non supera mai $\frac{\pi}{2}$, la condizione sufficiente per avere ε nel primo quadrante è che $c^2 (m^2 + n^2) - \sigma^2$, nel denominatore della [11], sia sempre positivo. Ne consegue

$$1 + \left(\frac{n}{m}\right)^2 < \left(\frac{U}{c}\right)^2, \quad [12]$$

con manifesto significato dei simboli U e c . Questa condizione è generalmente rispettata, salvo che per mari estremamente poco profondi.

Possiamo quindi ritenere che *le variazioni di livello ritardano nei confronti delle variazioni di pressione.*

D'altronde, se deriviamo $\tan \varepsilon$ rispetto a λ , poichè $\frac{\partial}{\partial \lambda}$ ($\tan \varepsilon$) è positivo, $c^2 (m^2 + n^2) - 2 \sigma^2$ dev'essere positivo, dev'essere cioè

$$1 + \left(\frac{n}{m}\right)^2 < 2 \left(\frac{U}{c}\right)^2, \quad [13]$$

condizione generalmente soddisfatta come la [10]. Poiché $\text{tang } \varepsilon$ è una funzione crescente di λ , possiamo concludere che *il ritardo di fase ε cresce con la latitudine ϑ .*

Fatto $m = n$, la [11] diviene approssimativamente,

$$\text{tang } \varepsilon = T \frac{T^2}{c^2} \cdot \frac{\lambda^2 + k^2}{4 \pi k}, \quad [14]$$

dove $T = \frac{2\pi}{\sigma}$ indica il periodo di un'onda di pressione superficiale ed $m = \frac{2\pi}{L}$, essendo $L = TU$ la lunghezza d'onda. Ne consegue che quanto più grandi sono il periodo e la velocità di una pressione superficiale tanto maggiore diviene il ritardo di fase, mentre quanto più grande è la profondità dell'oceano tanto minore è la differenza di fase.

La teoria brevemente riassunta è stata applicata ad estese osservazioni compiute nei mari che circondano il Giappone. È stata constatata una generale concordanza tra teoria ed osservazione, anche quantitativamente, quando però si tengano nella dovuta considerazione gli effetti di tutte le grandezze in giuoco, e cioè non solo della latitudine ϑ , ma anche della profondità del mare, della velocità e del periodo di un'onda di pressione superficiale. Ciò appare chiaro anche dalla Tab. I, dedotta dalla [14].

Tav. I

EFFETTO							
della latitudine		della profondità		della velocità		del periodo	
ϑ	ritardo di fase	h	ritardo	U	ritardo	T	ritardo
0°	2h 8m	1000 m	6,4 h	20 km/h	0,5 h	3 giorni	0,6 h
30°	1 11	2000	3,3	30	1,2	6	2,3
60°	2 15	3000	2,2	40	2,2	9	4,8
90°	2 18	4000	1,3	50	3,4		
$\vartheta = \dots\dots\dots$		35°		35°		35°	
$h = 3000 \text{ m}$		$\dots\dots\dots$		3000 m		3000 m	
$U = 40 \text{ km/h}$		40 km/h		$\dots\dots\dots$		40 km/h	
$T = 6 \text{ giorni}$		6 giorni		6 giorni		$\dots\dots\dots$	

La Fig. 1 riporta il confronto fra la marea meteorologica e la pressione atmosferica, quali furono osservate nella località costiera di Mera

e di Honto, nel Giappone. La marea meteorologica è stata ottenuta sottraendo da quella osservata, la marea prevista. Anche da questa figura si trae una qualitativa conferma della teoria. Va ancora tenuto presente

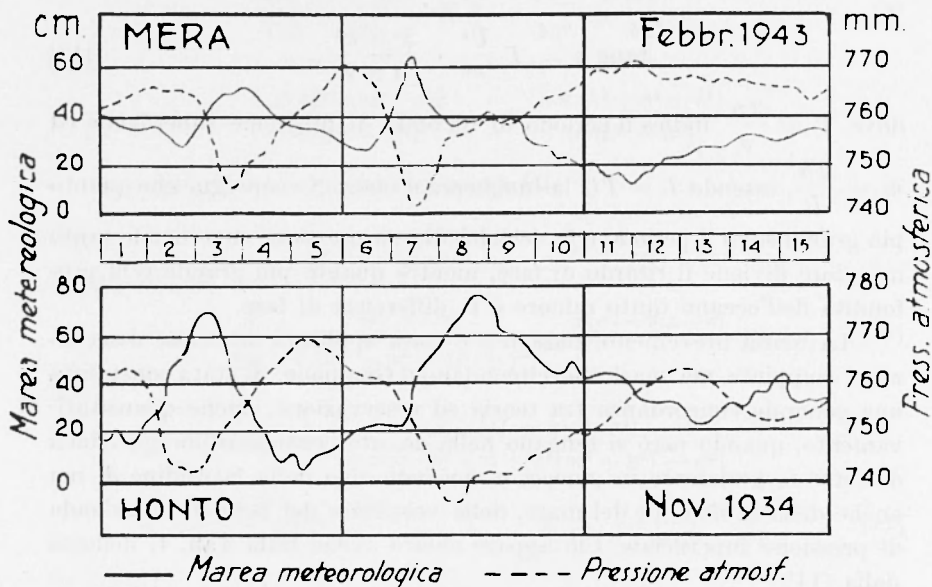


Fig. 1

che nello sviluppo teorico, non si è tenuto conto — causa le notevoli difficoltà d'ordine matematico che ciò avrebbe richiesto — degli effetti del vento e delle caratteristiche geografiche. Ciò malgrado, la sua aderenza alla realtà può ritenersi più che soddisfacente.

Gli sviluppi precedenti sono stati fatti nell'ipotesi che l'onda superficiale di pressione sia una semplice onda armonica, del tipo $e^{i(\sigma t - m x)}$ con $n z$. S. Unoki considera pure il caso di un'onda solitaria.

La pressione superficiale p_0 sia rappresentata da $F\left(t - \frac{x}{U}, z\right)$, con il solito significato dei simboli. Ricorrendo agli integrali di Fourier e valendosi di un metodo di calcolo seguito, per analoghe indagini, dal giapponese H. Yamada, Unoki giunge alla seguente conclusione, per quanto concerne la variazione di livello legata al transito della pressione p_0 ,

$$\zeta = \psi\left(t - \frac{x}{c}\right) + \phi\left(t + \frac{x}{c}\right) + \frac{c^2}{g_0 (U^2 - c^2)} F\left(t - \frac{x}{U}\right). \quad [15]$$

La [15] riveste notevole interesse. Da essa risulta infatti che *il transito di un ciclone è accompagnato da un'onda progressiva, da un'onda regressiva e da un'alta marea, e che il livello del mare diviene di più in più alto col tendere della velocità del ciclone a quella di un'onda lunga del mare sottostante, per fenomeno di risonanza.*

Non è questa esposta la sola teoria sulle onde lunghe in un mare indefinito: ha però il pregio di delineare, in modo chiaro, l'interdipendenza fra variazioni della pressione atmosferica e variazioni del livello del mare, almeno nei suoi aspetti più significativi.

b) I casi che a noi più interessano sono però quelli che si riferiscono a bacini totalmente o parzialmente limitati. Anche qui le ricerche compiute sono numerose.

Per quanto concerne l'origine delle oscillazioni libere in un lago, Chrystal ha pubblicato nel 1906 un notevole lavoro sulla stima dell'effetto delle variazioni della pressione atmosferica sulle sesse in un lago simmetrico parabolico di larghezza uniforme (3). Si tratta della prima ricerca matematica sull'argomento, da cui appare chiara l'influenza delle variazioni della pressione atmosferica sulla formazione delle oscillazioni libere.

Fra le altre numerose che seguirono, ritengo degne di menzione la ricerche di Takaharu Nomitsu, particolarmente quella pubblicata nel Vol XVIII, N. 4 (1935) delle «Memoirs of the College of Science» (4). In essa si prova che quando un vento costante o un disturbo barometrico comincia ad agire sopra un bacino d'acqua, e dopo un tempo t , l'azione cessa bruscamente, allora insorge un aumento del livello medio del mare (o del lago), generalmente accompagnato da oscillazioni libere. Lungi da me la pretesa di riassumere la teoria di Nomitsu. Ritengo però utile riportarne le conclusioni per ciò che concerne l'effetto di risonanza, come quello che maggiormente può interessare alcuni aspetti dei movimenti dell'Adriatico. Se indichiamo con ζ_m la forza perturbante (provveniente da vento o da gradiente barometrico), considerata come semplice funzione sinusoidale del tempo,

$$\begin{aligned} \zeta_m &= Z \sin (\sigma' t + \alpha) && \text{per } 0 \leq t \leq t_1 \\ &= 0 && \text{per } t < 0 \text{ e } t > t_1, \end{aligned}$$

se ζ_m rappresenta l'effetto sul livello del liquido, σ' la pulsazione della forza agente e σ_m la pulsazione del moto provocato nell'acqua nel caso

di viscosità trascurabile ($\nu \rightarrow 0$) e $t < t_1$, si ha

$$\zeta_m = \frac{Z}{2} \left[\frac{\sigma_m}{\sigma_m + \sigma'} \left\{ \sin(\sigma' t + a) + \sin(\sigma_m t - a) \right\} + \frac{\sigma_m}{\sigma_m - \sigma'} \left\{ \sin(\sigma' t + a) - \sin(\sigma_m t + a) \right\} \right]. \quad [16]$$

Per $t > t_1$ la corrispondente formula diviene

$$\zeta_m = \frac{Z}{2} \left[\sin \sigma' t_1 \cos \left\{ \sigma'(t - t_1) - a \right\} - \sigma' t_1 \cos(\sigma' t + a) \right]. \quad [17]$$

Perciò, se t_1 è grande, l'ampiezza crescerà sensibilmente col tempo; ma se t_1 è piccolo, l'ampiezza non sarà notevolmente ingrandita nemmeno per un periodo di perfetta risonanza. Per esempio, quando t_1 uguglia un mezzo periodo, cioè se $t_1 = \pi$ (soltanto una cresta dell'onda di forza), il massimo valore di ζ_m non può superare $1/2\pi Z$, e quando t_1 è pari ad un intero periodo, il possibile massimo valore è

$$\zeta_m = \pi Z.$$

La teoria può essere estesa alle sesse di una baia, dello zoccolo di mare o di uno stretto; con lievi variazioni, vale pure nel caso di forza attiva progressiva in un canale senza fine.

Uno dei pregi della teoria di Nomitsu è che essa, nella sua parte generale, tiene conto della viscosità del liquido. Per profonde distese d'acqua, la viscosità non influisce sensibilmente sugli elementi dinamici delle oscillazioni. Non così per acque poco profonde e per oscillazioni di apprezzabile ampiezza. In questo caso l'azione della viscosità diviene così marcata da provocare l'allungamento del periodo e, in casi estremi, può anche condurre ad un moto non periodico. Ebbi occasione di dimostrare questi fatti sia nello studio delle sesse del golfo di Trieste⁽⁵⁾, sia estendendo la teoria di Nomitsu alla spiegazione delle oscillazioni libere del porto di Civitavecchia, in cui il periodo appariva insolitamente lungo, nei confronti di quello che ci si sarebbe dovuti aspettare considerando — come d'abitudine — l'acqua quale fluido ideale⁽⁶⁾. In tal modo, si ha pure la possibilità di determinare il coefficiente d'attrito sul fondo e la viscosità cinematica del liquido viscoso in movimento, dati che ho potuto appunto ottenere nei casi sopra citati.

Sovente, però, certi cospicui effetti dell'interazione fra pressione atmosferica e bacini idrici non possono essere spiegati, se non si tiene debito conto anche del senso di propagazione della perturbazione atmosferica

e della forma del bacino sottostante. Consideriamo, p. es., un canale di profondità uniforme h . Indichiamo con U la velocità con cui si propaga il nucleo perturbante e sia ζ lo spostamento che subisce la superficie libera del mare, intorno al suo livello medio. Indichiamo con $\bar{\zeta} = F\left(t - \frac{x}{U}\right)$ la forza perturbante, espressa dal peso della colonna d'acqua corrispondente alla variazione barometrica. Se il canale è chiuso all'estremo $x = 0$, ma si stende indefinitamente nella direzione positiva delle x , si trova (?):

$$\zeta = \frac{1}{1 - \frac{U^2}{c^2}} \left\{ F\left(t - \frac{x}{U}\right) - \frac{U}{c} F\left(t - \frac{x}{c}\right) \right\}. \quad [18]$$

All'estremo $x = 0$, è pertanto

$$\zeta = \frac{1}{1 + \frac{U}{c}} F(t). \quad [19]$$

Se U è positivo, cioè se la perturbazione atmosferica transita lungo il canale nel senso delle x positive, il rapporto $\zeta/F(t)$ è sempre minore dell'unità; ma se U è negativo, cioè se il disturbo atmosferico transita lungo il canale verso l'estremità chiusa, allora detto rapporto può assumere valori grandi oltre ogni limite.

Infatti nel punto $x = 0$, quando $\frac{U}{c} = -1$, $\zeta \rightarrow \infty$. Perciò, teoricamente, se il fenomeno si verifica nelle condizioni ammesse, quando le variazioni di pressione si propagano con velocità prossima a quella consentita alle onde libere del mare e in direzione opposta a quelle delle x crescenti positivamente, in prossimità del fondo del canale (baia, golfo, ecc.) lo spostamento del livello dell'acqua assume valori notevolissimi. Naturalmente, in pratica, questi casi ideali non si verificano che in parte. Ad ogni modo, almeno qualitativamente, il fenomeno ottiene chiara spiegazione: quando la condizione in parola viene soddisfatta con sufficiente approssimazione, in prossimità della costa sono da attendersi fluttuazioni dell'acqua con ampiezze notevolmente maggiori di quelle consentite dai valori statici.

Solo per questa via mi è stato possibile spiegare, nel 1938, le vistose fluttuazioni del mare, che si verificano alla base del golfo di Trieste, quando nuclei ciclonici (o semplici variazioni barometriche) si propagano da Venezia a Trieste, con velocità paragonabili a quella consentita alle oscillazioni libere del mare sottostante: transitando sopra Trieste, tali

disturbi microbarici determinano nel mare movimenti più o meno ampi, a seconda che le condizioni richieste si verificano con maggiore o minore approssimazione. Nel lavoro pubblicato a suo tempo, ho riportato un'ampia testimonianza sulla validità di questo principio. Qui mi limito agli esempi forniti dalle Figg. 2, 3 e 4.

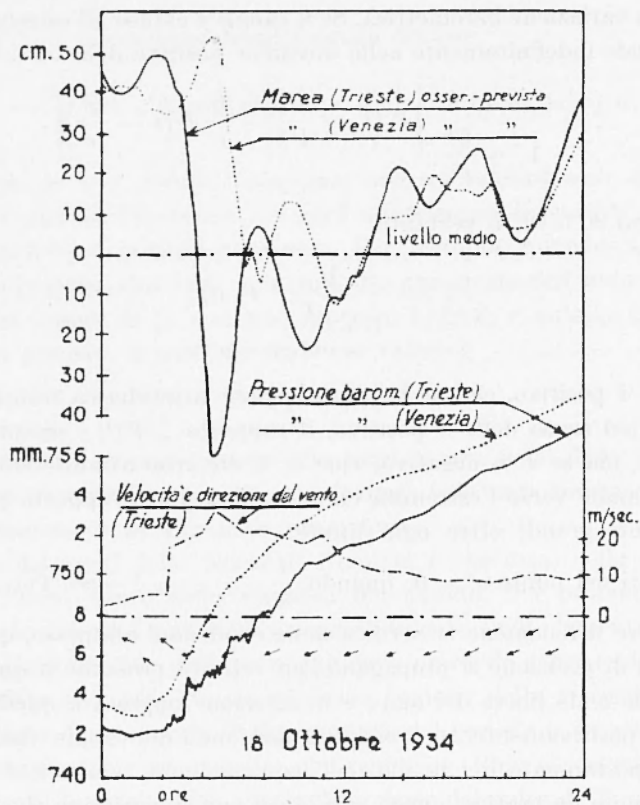


Fig. 2 - Movimenti del mare collegati al transito di nuclei ciclonici, in fase positiva.

Osservo, ai fini delle conseguenze sul livello del mare, che la [18] presenta sostanziali analogie con la [15], valevole — come si è visto — per mare aperto.

Sempre a proposito del verificarsi della condizione $\frac{U}{e} = -1$, vediamo come essa, presentandosi alla base di un mare chiuso, possa provocare notevoli spostamenti del livello marino in lagune, baie o insena-

ture limitrofe (dove la condizione stessa è ben lungi dall'essere realizzata), anche in assenza di fenomeni di risonanza.

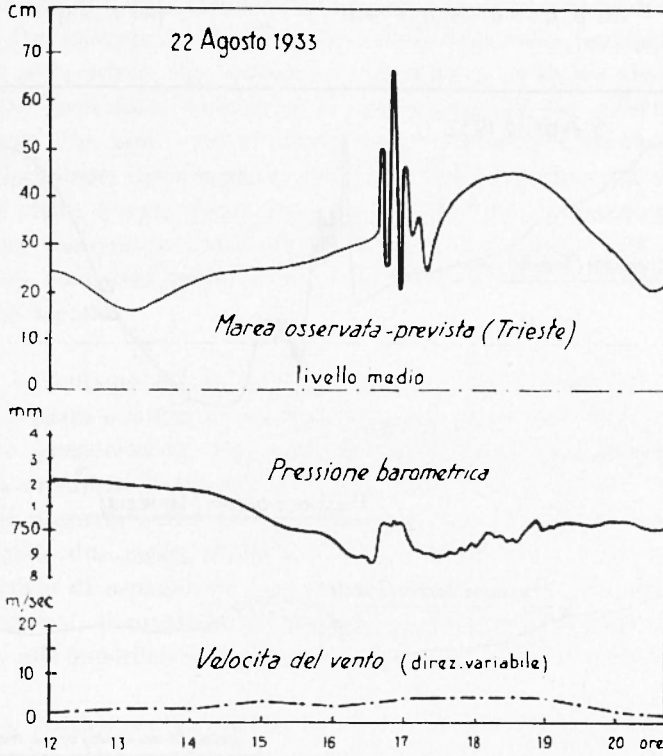


Fig. 3 - Movimento del mare a Trieste determinato dal transito di disturbi microbarici, propagantisi da Ovest ad Est con velocità paragonabile a quella delle onde libere del mare sottostante.

Ora, se indichiamo con $\zeta = f(t)$, la salita e la discesa della superficie liquida nell'interno di una baia di lunghezza l , con la bocca in $x = 0$, si prova che:

$$\zeta = \frac{2c}{l} \sum_0^{\infty} \sin \frac{(2s+1)\pi}{2l} x \int_0^t F(z) \sin \sigma_s(t-z) dz.$$

Se $F(t) = a \sin \sigma' t$ per $0 < t < t_1$ e $F(t) = 0$ per $t > t_1$, allora

$$\zeta = \frac{2ca}{l} \sum_0^{\infty} \frac{1}{\sigma_s^2 - \sigma'^2} \left\{ \sigma_s \sin \sigma' t - \sigma' \sin \sigma_s t \right\} \sin \frac{(2s+1)\pi x}{2l},$$

per $0 < t < t_1$;

$$\zeta = \frac{2ca}{l} \sum_0^{\infty} \frac{1}{\sigma_s^2 - \sigma'^2} \left\{ \sigma' \sin \sigma_s (t - t_1) \cos \sigma' t_1 + \sigma_s \cos \sigma_s (t - t_1) \cdot \sin \sigma' t_1 - \sigma' \sin \sigma_s t \right\} \sin \frac{(2s+1)\pi x}{2l}, \text{ per } t > t_1.$$

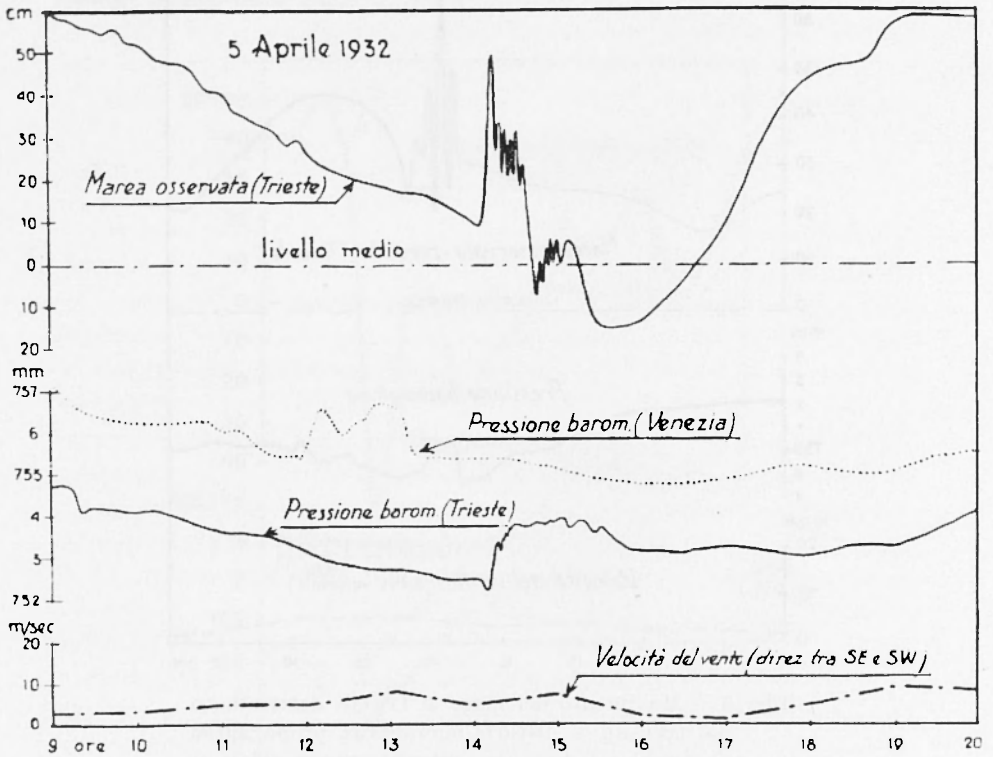


Fig. 4 - Movimento del mare a Trieste, come da Fig. 3.

Quindi, per un generico m , quando $\sigma_m \rightarrow \sigma'$, allora

$$\zeta_m = \frac{2ca}{l} \frac{\sin \sigma_m t - \sigma_m t \cos \sigma_m t}{2\sigma_m} \sin \frac{(2m+1)\pi x}{2l}, \text{ per } 0 < t < t_1 \quad [20]$$

$$\zeta_m = \frac{2ca}{l} \left(\frac{\cos \sigma_m (t - t_1) \sin \sigma_m t_1}{2\sigma_m} - \frac{1}{2} t_1 \cos \sigma_m t \right), \text{ per } t > t_1. \quad [21]$$

Perciò, quando il periodo della vibrazione forzata della baia, concorda con quello dell'oscillazione libera, la sessa si sviluppa con notevole ampiezza. Però, anche in assenza di risonanza alla base della baia può verificarsi un'ampia oscillazione, quando essa si apre sopra un bacino in

cui le variazioni di pressione possono propagarsi secondo la legge $\frac{U}{c} \sim 1$.

Al realizzarsi di questa condizione, un ampio spostamento ne deriva, che, a sua volta, sviluppa oscillazioni libere nella baia, come fenomeno secondario. È noto infatti che, quando vi è variazione di livello alla bocca di una baia, oscillazioni secondarie si sviluppano nel suo interno.

Questi che sono venuto riassumendo non sono naturalmente che alcuni lineamenti del complesso problema dell'interazione fra atmosfera e bacini idrici, questi ultimi presi nel loro insieme: li ritengo però sufficienti per lumeggiare l'importanza che tale interazione può assumere anche nei confronti dell'idrodinamica dell'Adriatico, dei suoi golfi e delle sue lagune.

II. — Vediamo ora gli sviluppi che tale interazione può assumere quando il mare o il lago, o parti di essi, sono *stratificati*. Noi limiteremo le nostre considerazioni alla stratificazione conseguente all'esistenza di una sola superficie di discontinuità: del resto, è quello che più frequentemente si presenta e che più interessa nelle sue manifestazioni esterne.

Quando due masse d'acqua di differente densità sono sovrapposte, la superficie di separazione può diventar sede di sistemi d'oscillazione (*onde interne*), il massimo spostamento verticale delle quali si osserva appunto alla superficie di separazione delle due masse d'acqua.

1. — Teoricamente, le onde interne possono essere riguardate come una soluzione per le onde che insorgono lungo una discontinuità orizzontale fra due strati di diversa densità.

Faremo uso dei simboli abituali in idrodinamica (Basset, Lamb, ecc.).

La discontinuità corrisponda a $z = 0$, essendo z l'ordinata diretta positivamente verso l'alto. Posto $\sigma = \frac{2\pi}{T}$ e $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, T e λ essendo il periodo e la lunghezza d'onda rispettivamente, il potenziale della velocità negli strati superiori ed inferiore sono:

$$\phi' = (A \cosh kz + B \sinh kz) \cos kx \cdot e^{i\sigma t}, \quad [1]$$

$$\phi = C \cosh k(z+h) \cos kx \cdot e^{i\sigma t} \quad [2]$$

rispettivamente.

Siano la superficie libera e il fondo compresi fra $z = h'$ e $z = -h$ rispettivamente.

Ricorriamo alle condizioni cinematiche sull'intersuperficie. Intanto abbiamo

$$\frac{\partial \phi'}{\partial z} = (k A \sinh kz + k b \cosh kz) \cos kx \cdot e^{i\sigma t}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = k C \sinh k(z+h) \cos kx \cdot e^{i\sigma t}.$$

Per $z = 0$, avremo

$$\left(\frac{\partial \phi'}{\partial z}\right)_{z=0} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{z=0},$$

cioè

$$k B = k C \sinh kh \quad [3]$$

Se

$$\zeta = -a \cos kx \cdot e^{i\sigma t}$$

è l'equazione dell'onda interna sulla superficie di separazione, su quest'ultima la condizione di contatto dei due liquidi richiede

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{d\phi'}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial z}, \text{ per } z = 0,$$

cioè, ricordando la [3]

$$-kC \sinh kh = -kB = i\sigma a.$$

Se δp , $\delta p'$ sono gli incrementi della pressione dovuti al moto ondoso, immediatamente sotto e sopra la superficie di separazione, allora

$$\delta p + g\varrho\zeta + \varrho \frac{d\phi}{dt} = 0; \quad \delta p' + g\varrho'\zeta + \varrho' \frac{d\phi'}{dt} = 0,$$

essendo ϱ , ϱ' rispettivamente le densità sotto e sopra la superficie di discontinuità

Ora

$$\frac{d\phi'}{dt} = i\sigma (A \cosh kz + B \sinh kz) \cos kx \cdot e^{i\sigma t},$$

$$\frac{d\phi}{dt} = i\sigma C \cosh k(z+h) \cos kx \cdot e^{i\sigma t}.$$

Per cui, dovendo essere $\delta p = \delta p'$, avremo, per $z = 0$,

$$(-g\varrho'a + \varrho' i\sigma A) \cos kx \cdot e^{i\sigma t} = (-g\varrho a + \varrho i\sigma C \cosh kh) \cos kx \cdot e^{i\sigma t},$$

cioè

$$\varrho (i\sigma C \cosh kh - ga) = \varrho' (i\sigma A - ga). \quad [5]$$

Ricordiamo ora la condizione — detta di Poisson — alla superficie libera

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad [6]$$

che esprime la costanza e l'uniformità della pressione alla superficie libera (nel caso in cui esiste un potenziale delle velocità).

Applicando la [6] alla [1], per $z = h'$, otteniamo

$$\sigma (A \cosh kh' + B \sinh kh') = gk (A \sinh kh' + B \cosh kh') \quad [7]$$

Eliminiamo le costanti A , B , C fra le [4], [5] e [7].

Si ottiene

$$B = \frac{\sigma^2 \rho' A}{\sigma^2 \rho \coth kh - gk (\rho - \rho')},$$

che sostituita nella [7] conduce alla seguente relazione fra σ e k :

$$\begin{aligned} & \sigma^4 (\rho \coth kh \cdot \coth kh' + \rho') - \\ & - \sigma^2 \rho (\coth kh + \coth kh') gk + (\rho - \rho') g^2 k^2 = 0. \end{aligned} \quad [8]$$

Tale equazione è quadratica in σ^2 . Ciò significa che vi sono due diversi tipi di onde. Una è un'onda ordinaria, quale si osserva alla superficie esterna. A noi interessa qui l'altro tipo, cioè quello delle onde interne, che si sviluppano intorno alla superficie di discontinuità.

Risolviendo la [8] in σ^2 nell'ipotesi di kh molto grande ($\coth kh \cong 1$), si ottiene (per il segno positivo)

$$\sigma^2 = gk \frac{\rho (1 + \coth kh') + \sqrt{\rho (1 - \coth kh' - 2\rho')^2}}{2 (\rho \coth kh' + \rho')},$$

da cui

$$\sigma^2 = \frac{\rho - \rho'}{\rho \coth kh' + \rho'} gk. \quad [9]$$

Qualora anche kh' sia molto grande, consegue

$$\sigma^2 = \frac{\rho - \rho'}{\rho + \rho'} gk. \quad [10]$$

Per kh' piccolo — cioè per $\coth kh' \cong \frac{1}{kh'}$ — dalla [9] si deduce

$$\sigma^2 = \frac{\rho - \rho'}{\rho} g h' k^2. \quad [11]$$

Per kh , kh' entrambi piccoli si ha

$$\sigma^2 = g k^2 (h + h'). \quad [12]$$

Per gli altri casi, la equazione [8] può essere risolta in termini esatti.

Le ampiezze delle velocità orizzontali u' e u , conseguono dalle uguaglianze $u' = \frac{\partial \phi'}{\partial x}$, $u = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ e sono immediate.

Per quanto riguarda lo spostamento verticale, esso è dato — come è noto — da

$$\zeta = \frac{d\phi}{dz},$$

quando $z = -h$.

Pertanto, in valore assoluto,

$$|\zeta'| = k (A \sinh kz + B \cosh kz) \cosh kx \cdot e^{i\sigma t},$$

da cui si deduce per l'ampiezza, l'espressione

$$|\zeta'| = \frac{k}{\sigma} (A \sinh kz + B \cosh kz). \quad [13]$$

Analogamente

$$|\zeta| = \frac{k}{\sigma} C \sinh k(z + h). \quad [14]$$

Le ampiezze delle velocità orizzontali sono invece

$$|u'| = k (A \cosh kz + B \sinh kz), \quad [15]$$

$$|u| = k C \cosh k(z + h). \quad [16]$$

È chiaro che le onde prese in considerazione non possono identificarsi con quelle che interessano le superficie di discontinuità termica, quali si osservano nei bacini chiusi: nella teoria sviluppata, non figurano, infatti, gli elementi propri della forma del bacino, in relazione con le sue dimensioni orizzontali.

Riuscirà ugualmente interessante investigare, con il calcolo, l'ordine di grandezza delle ampiezze delle onde interne qui delineate.

I calcoli furono condotti da K. Hidaka e T. Kusunoki⁽⁸⁾. Fu calcolato dapprima il caso per $h = 160$ m, $h' = 40$ m, $\rho' = 1,023$, $\rho = 1,205$ per assegnati valori di $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Le Figg. da 5 a 9 riassumono i risultati e riportano gli assegnati valori per periodi e lunghezze d'onda. Le frecce mostrano che la velocità orizzontale è in direzione opposta nei due strati.

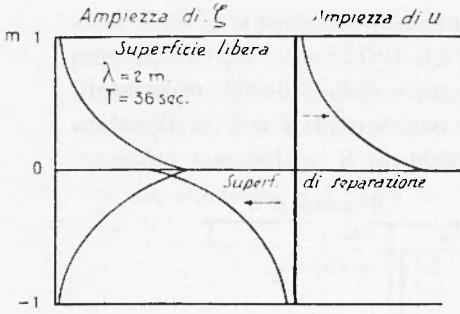


Fig. 5

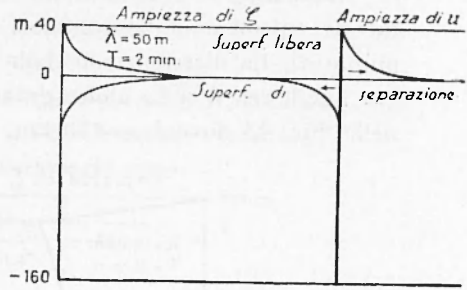


Fig. 6

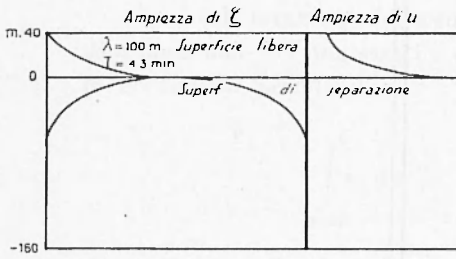


Fig. 7

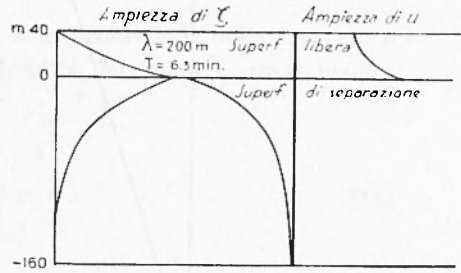


Fig. 8

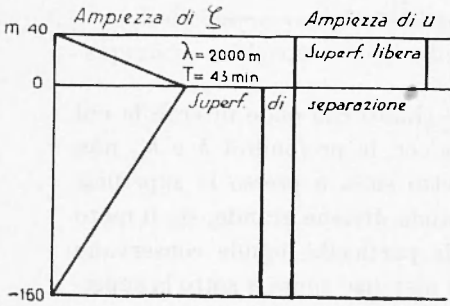


Fig. 9

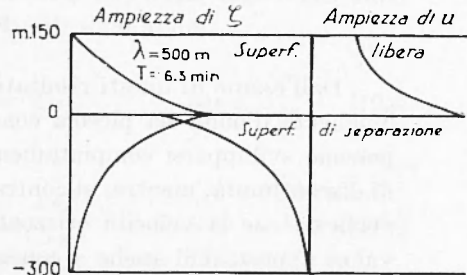


Fig. 10

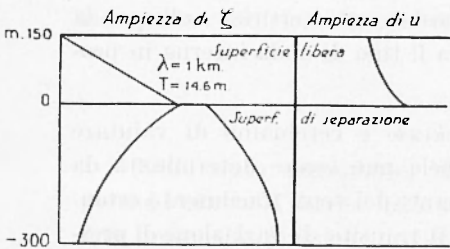


Fig. 11

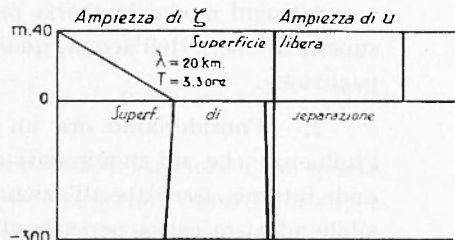


Fig. 12

Figg. 5-12 - Onde interne in un mezzo stratificato, indefinito, secondo Hidaka e Kusunoki.

L'esempio $h = 4000$ m, $h' = 150$ m rientra nel caso $h \gg h'$. I risultati dei calcoli sono diagrammati nelle Figg. 10-12; per ϱ' e ϱ i valori sono immutati. La distribuzione delle ampiezze e delle velocità orizzontali, per lunghezza d'onda molto grande nei confronti di h e h' , è riportata nella Fig. 13 dove $\lambda = 150$ km, $h = 3000$ m, $h' = 150$ m.

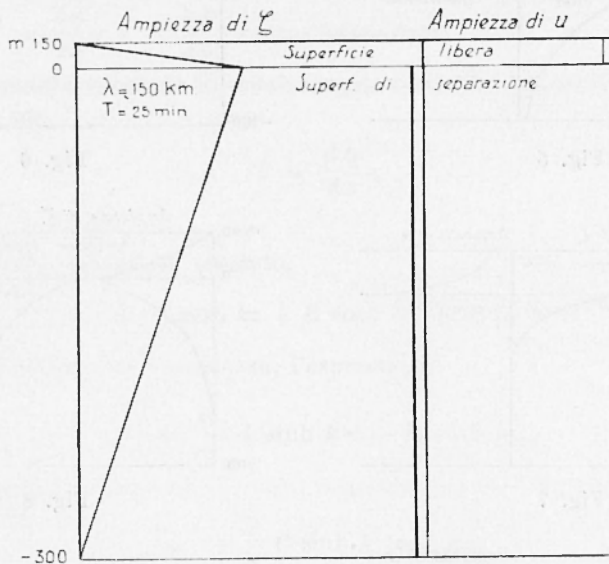


Fig. 13

Dall'esame di questi risultati appare chiaro che onde interne la cui lunghezza d'onda sia piccola confrontata con le profondità h e h' , non possono svilupparsi compiutamente, eccetto sulla o presso la superficie di discontinuità, mentre, al contrario, quando diviene grande, sia il moto verticale che la velocità orizzontale delle particelle liquide conservano valori apprezzabili anche a considerevoli distanze sopra e sotto la superficie di discontinuità, e decrescono quasi linearmente verso l'alto e verso il basso.

Ad ogni modo, la teoria prevede spostamenti verticali *nulli* per la superficie libera dell'acqua, qualunque sia il tipo di onda interna in propagazione.

2. - Consideriamo ora un *bacino chiuso* e cerchiamo di valutare l'influenza che sui movimenti di superficie può essere determinata da onde interne, associate all'azione perturbante dei venti (facilmente estensibile ad altra causa perturbante, quale il transito di variazione di pressione).

Sia x la coordinata orizzontale, giacente sulla superficie indisturbata, con origine sulla costa di un canale consistente di due strati di diversa densità, e perpendicolare alla costa stessa. Sia z l'asse verticale, diretta verso l'alto. Siano inoltre u la velocità lungo l'asse x , ρ la densità, ν la viscosità cinematica, p la pressione e g l'accelerazione di gravità.

Le equazioni del moto in stato stazionario sono

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= 0, \\ -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g &= 0. \end{aligned} \quad [17]$$

Se ξ è l'elevazione della superficie, h la profondità della superficie di separazione dei due strati e d la profondità del fondo, come equazioni di continuità prenderemo

$$\int_{-h}^{\xi} u_1 dz = 0, \quad \int_{-d}^{-h} u_2 dz = 0, \quad [18]$$

dove gli indici 1 e 2 si riferiscono rispettivamente allo strato superiore ed inferiore.

Indichiamo con T la tensione costante esercitata dal vento sulla superficie dell'acqua. Le condizioni ai limiti sono allora

$$r_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} = T \quad \text{per } z = \xi \quad [19a]$$

e

$$r_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} = r_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} \quad \text{per } z = -h. \quad [19b]$$

Quando si ritenga trascurabile r_2 lungo la superficie interna, lo strato d'acqua superiore non incontra attrito sulla superficie limite inferiore, e la condizione [19b] si riduce a

$$r_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} = 0 \quad \text{per } z = -h. \quad [19c]$$

Nello stato stazionario, l'acqua nello strato inferiore è in quiete, perché l'effetto d'attrito dello strato liquido superiore cessa sulla superficie limite e la pressione dovuta all'innalzamento della superficie è equilibrata dalla depressione della superficie di discontinuità.

Questa condizione si traduce nella seguente relazione:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{\varrho_1} \frac{\partial h}{\partial x},$$

da cui

$$h = \frac{\varrho_1}{\varrho_2 - \varrho_1} \zeta + H, \quad [20]$$

essendo H lo spessore medio dello strato superiore.

Dalla seconda delle [17] si ha

$$\partial p = -\varrho g \partial z$$

e per $z = \zeta$

$$p = -\varrho g \zeta + \text{cost.};$$

per cui, integrando la prima delle [17] dalla profondità della superficie di separazione alla superficie esterna, otteniamo

$$\int_{-h}^{\zeta} \varrho_1 g \frac{\partial \zeta}{\partial x} dz = \int_{-h}^{\zeta} \nu_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} dz.$$

Integrando, ricordando la [19a], e tenendo conto che, per la [20],

$$\zeta + h = \frac{\varrho_2}{\varrho_2 - \varrho_1} \zeta + H,$$

posto

$$\alpha = \frac{\varrho_2}{\varrho_2 - \varrho_1},$$

si ottiene

$$\varrho_1 g (\alpha \zeta + H) \frac{\partial \zeta}{\partial x} = T. \quad [21]$$

Dalla [21] si ha, integrando,

$$\zeta^2 + \frac{2H}{\alpha} \zeta - \frac{2T}{\varrho_1 g \alpha} x - \frac{2C}{\alpha} = 0,$$

oppure, fatto

$$a = \frac{2H}{\alpha}, \quad b = \frac{2T}{\varrho_1 g \alpha}, \quad A = \frac{2C}{\alpha}, \quad [22]$$

$$\zeta^2 + \zeta a - (bx + A) = 0;$$

da cui

$$\zeta = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4(bx + A)}}{2}. \quad [23]$$

Si prende, nella [23], il segno positivo a secondo membro, l'innalzamento potendo essere positivo in qualunque punto.

La costante d'integrazione A può essere dedotta dalla legge di conservazione della massa. Se l è la larghezza del canale, tale legge si esprime nella relazione

$$\int_0^l \zeta dx = 0.$$

Dalla [22] si trae che $b/a = T/\rho_1 g H$; pertanto l'andamento della superficie assume l'espressione — in virtù della [23] —

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{T}{H \rho_1 g \left(1 + 4 \frac{bx + A}{a^2}\right)^{1/2}}. \quad [24]$$

Nel punto $x = -\frac{A}{b}$ (dove, per la [23], $\zeta = 0$) non c'è innalzamento d'acqua; ivi l'inclinazione è la stessa che nell'acqua omogenea di profondità H , e mentre nel lato sopra vento di questo punto essa è più accentuata, essa è più ridotta nel lato sotto vento.

Dalle [17] si ha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\rho g}{\nu} \frac{\partial \zeta}{\partial x},$$

da cui, integrando due volte e limitandoci al primo strato,

$$u_1 = \frac{\rho_1 g}{\nu_1} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \left(\frac{z^2}{2} + Bz + C \right), \quad [25]$$

dove B e C sono costanti d'integrazione.

Dalla [24] si deduce

$$\nu_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} = \rho g \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) (z + B),$$

che, per $z = \zeta$, e per la [19a] si identifica con T . Ma ricordando il valore di quest'ultimo dato della [21], si deduce

$$\zeta + B = a \zeta + H.$$

Per cui, richiamando il valore di x e ricordando la [20],

$$B = h.$$

Pertanto, la prima delle [18] assume la forma:

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\rho_1 g}{\nu_1} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \left(\frac{z^2}{2} + h z + C \right) dz = 0. \quad [26]$$

Nell'ipotesi (che sempre si verifica in natura) di ζ decisamente più piccolo di h , integrando la [26] si ottiene

$$C = \frac{h^2}{3}.$$

La [25] diviene allora

$$u_1 = \frac{\rho_1 g}{\nu_1} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \left(\frac{z^2}{2} + h z + \frac{h^2}{3} \right). \quad [27]$$

La distribuzione verticale della velocità è quindi simile a quella che si osserva in acqua omogenea di profondità h con fondo piano.

La precedente teoria fu applicata da K. Kajiura (*) dell'Istituto Geofisico dell'Università di Tokyo al lago Suwa, profondo circa 6-7 m e lungo 4 km. L'applicazione è stata fatta in regime estivo, quando alla profondità di circa 5 m si forma una termoclina.

L'osservata inclinazione delle isoterme di 22 °C ~ 23 °C nel lato sopra vento, risultò in buon accordo con quella calcolata.

Anche nel caso considerato, di onde interne legate alla formazione della superficie del salto termico estivo-autunnale, la teoria prevede spostamenti del livello esterno del lago pressoché nulli (vedansi la [20] e la [23]); in ogni modo, non rilevabili da strumenti di superficie. In questi calcoli, preoccupazione del ricercatore è di riprodurre, per via teorica, l'andamento dell'isoterma, coincidente con il salto termico e rivelata da misure di temperatura dell'acqua, ripetute in più luoghi, in superficie e in profondità. E dei movimenti di questa superficie, infatti, ci si preoccupa in ricerche del genere, nel sottinteso che tali movimenti non possano interessare la superficie esterna. Se le cose stessero effettivamente in questi termini, le onde interne potrebbero senz'altro essere trascurate, ai fini di questa nota, che concerne sopra tutto movimenti comunque capaci di alterare, più o meno sensibilmente, il livello esterno di un bacino d'acqua.

III. - 1. - Le cose non stanno precisamente come è detto nei numeri precedenti.

Anni fa, esaminando i limnogrammi ottenuti a Riva del Garda, fui sorpreso di riscontrare fra essi ampie oscillazioni non attribuibili ad

P. CALOI

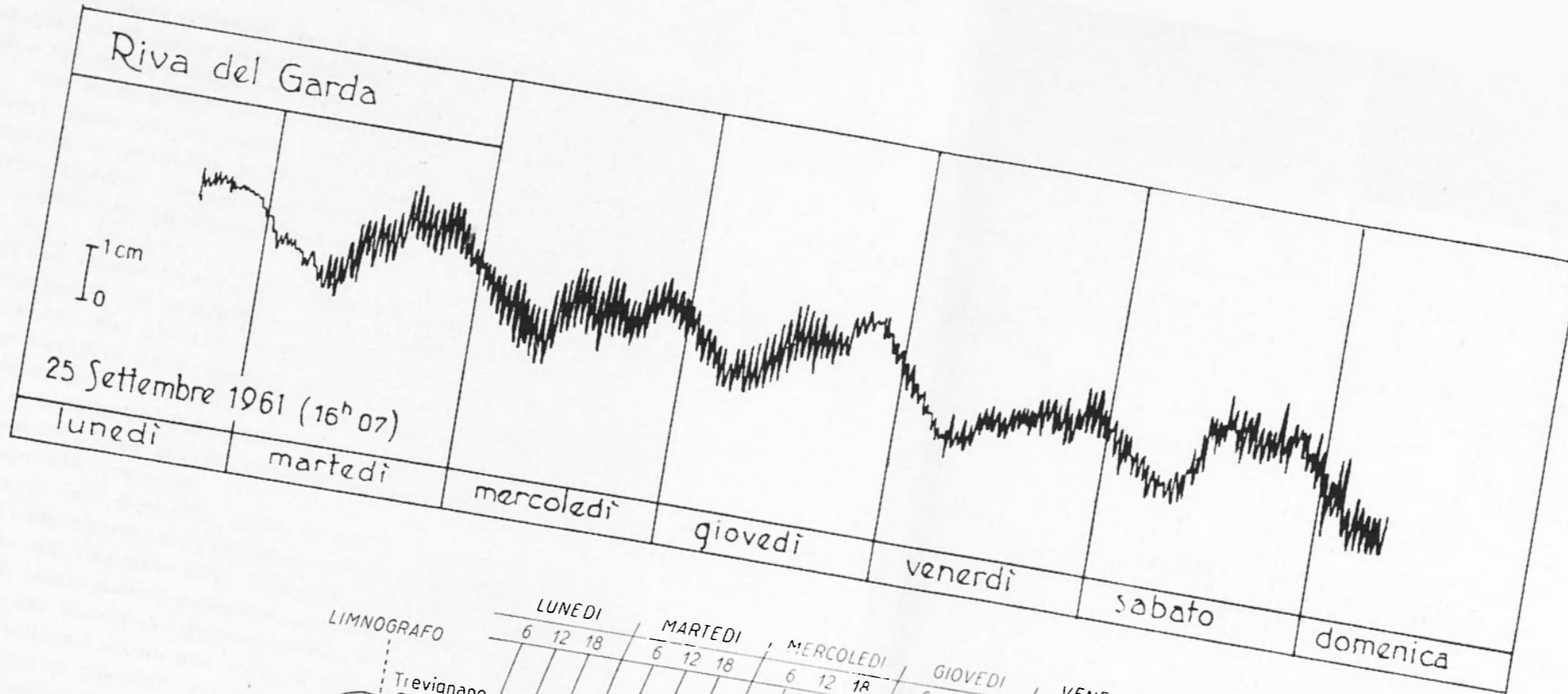


Fig. 14 - Onde interne provocate da copertali variazioni della pressione atmosferica sulla superficie del salto termico (m 20 ca) a Riva del Garda, e registrate in superficie, con limnografo in parte filtrato (le oscillazioni più rapide - 43m ca - corrispondono a sesse unnodali ordinarie).

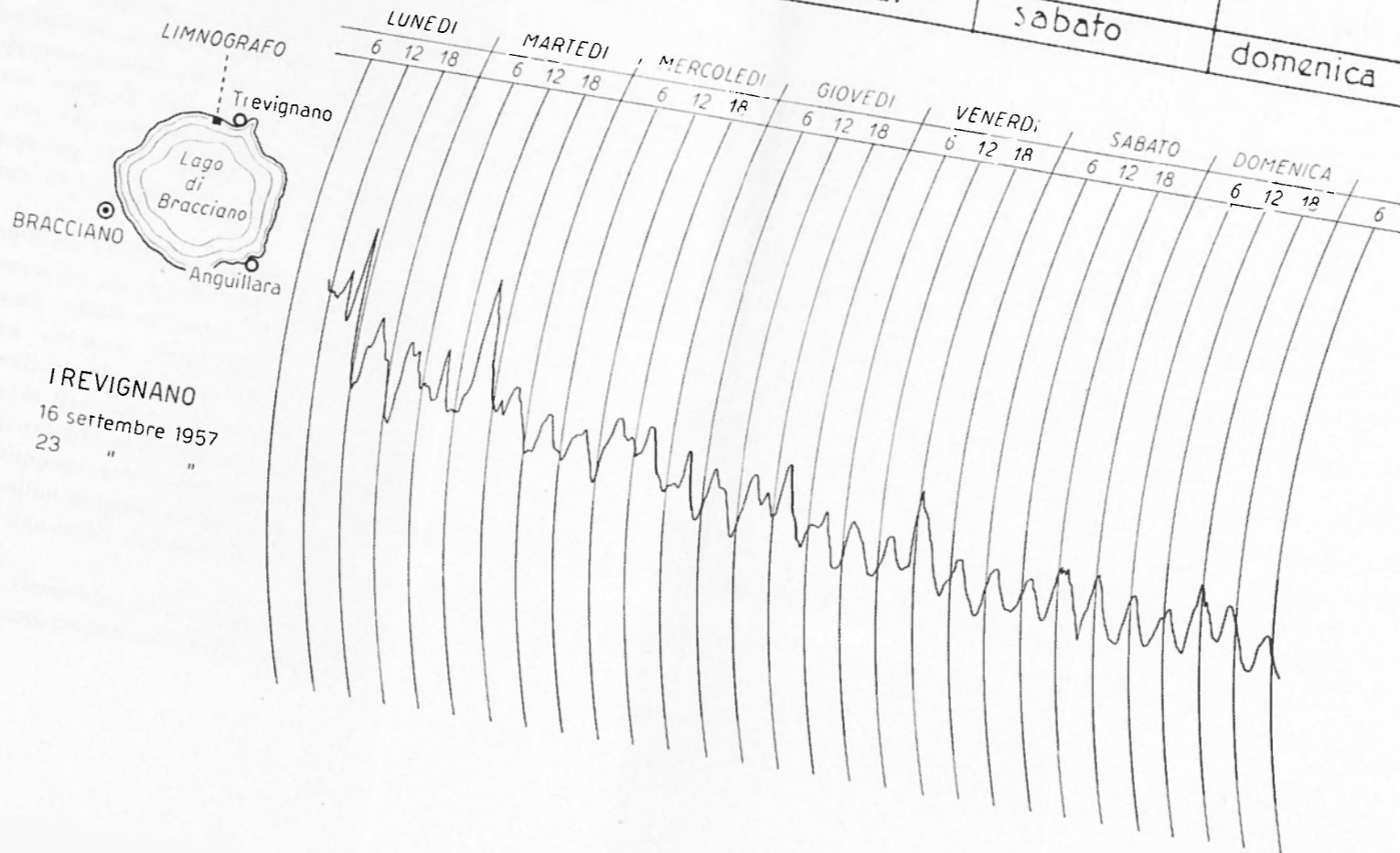


Fig. 15 - Onde interne del lago di Bracciano provocate da variazioni copertali della pressione atmosferica e registrate in superficie con limnografo filtrato (riduzione 1/2).

oscillazioni libere ordinarie: esse si presentano abitualmente fra Luglio ed Ottobre ed hanno periodi dell'ordine di 50^h, con sottomultipli di 24^h e 12^h ca., particolarmente frequenti e sviluppati quelli di 24^h.

Non mi fu difficile provare trattarsi di onde interne (¹⁰) (sesse termiche), legate alla formazione della superficie del salto termico a 20 metri circa di profondità. Non potei però non considerare strana la loro insolita ampiezza, che consentiva loro di rivelarsi in superficie in modo così appariscente, e la loro persistenza che si poteva per intere settimane (Fig. 14).

Il mio stupore derivava sopra tutto dal fatto che la teoria negava sostanzialmente che la superficie esterna potesse essere interessata da onde interne. Non dimenticavo, fra l'altro, l'aspra reazione di diniego sulla possibilità di simili fenomeni, provocata nell'inglese Wedderburn — valoroso specialista in questi studi — dalla lettura di una nota di Endros, in cui lo studioso tedesco attribuiva ad onda interna una sporadica perturbazione a lungo periodo, registrata da un limnografo di superficie in un lago della Pomeriana.

Parecchi anni dopo, ebbi modo, di portare la mia attenzione sui laghi dell'Italia centrale, con particolare riguardo al lago di Bracciano (¹¹).

Anche qui l'interesse della ricerca fu sensibilmente acuito dalla scoperta di lunghe serie di oscillazioni, aventi un periodo di 6 ore circa, registrate, con limnografi opportunamente filtrati, alla superficie del lago (¹²). Trattavasi ancora una volta di onde interne; o meglio, della manifestazione di superficie (Fig. 15) delle oscillazioni cui viene sottoposta la superficie del salto termico, che — durante i mesi della tarda estate e dell'autunno — nel lago di Bracciano si forma alla profondità media di 14-16 m.

Ciò che, a prima vista, appariva inesplicabile (come nel caso del Garda), erano l'inusitata ampiezza dei movimenti registrati e la loro durata (la superficie del lago resta infatti ondulante per settimane e settimane). L'idrodinamica, come abbiamo visto, prevede pressoché trascurabili i movimenti superficiali legati alle onde interne.

Nei casi dei laghi di Garda e di Bracciano è giuocoforza invocare, per la persistenza e l'ampiezza delle relative onde interne, una situazione conseguente a risonanza. Ciò presuppone una causa agente pressoché continua, associata a periodi dell'ordine di quelli propri della superficie del salto termico, che si forma nei due laghi, durante i mesi d'estate e d'autunno.

Per quanto concerne il lago di Bracciano, in un primo tempo ho ritenuto accettabile identificare la causa perturbante delle maree solide

determinate dalle maree quarto-diurne del vicino Tirreno. La semplice teoria schematizzata, parte dall'equazione del moto di un'onda lunga — in mancanza di viscosità — e dall'equazione di continuità, cioè della [1] — per $v = 0$ — e dalla [5] — limitata alla sola u ed integrata rispetto al tempo. Se

$$M_0 = M \cos k (x - vt)$$

rappresenta l'onda forzata di marea solida, si prova che dall'integrale dell'equazione del moto che ne deriva, si perviene — per quanto concerne gli spostamenti verticali — alla seguente espressione (13)

$$\zeta = \frac{h M}{\rho c^2 (m^2 - 1)} \left[\cos k (x - vt) - \frac{m}{\sin 2klm} \left\{ \sin k (l + vt) \cos km (x - l) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sin k (l - vt) \cos km (x + l) \right\} \right],$$

dove

$$m = v/c, c^2 = g \frac{\varrho'' - \varrho'}{\frac{\varrho''}{h''} + \frac{\varrho'}{h'}}$$

(ϱ' e h' riferendosi allo strato superiore)

$$T = \frac{2\pi}{kv} - \frac{4l}{i} \frac{1}{\sqrt{gh}}$$

essendo

$$h = \frac{h' (\varrho'' - \varrho')}{\varrho' + \frac{h'}{h''} \varrho''}$$

ζ tende all'infinito quando $\frac{\sin 2klm}{\sin 2klm}$ tende a zero, cioè quando (s essendo un intero e T_1 il periodo di un'onda interna in un lago di lunghezza $2l$)

$$T = \frac{i}{s} T_1.$$

Quando il periodo della causa perturbante approssima quello dell'oscillazione libera della superficie di separazione dei due strati sovrapposti, saremo in fase di realizzazione delle condizioni di risonanza. Nel lago di Bracciano ciò si verificherà, quando, per $s = 1$, T tenderà al periodo dell'uninodale dell'onda interna ($i = 1$).

Ultimamente però mi sono orientato a ritenere più probabile, come causa perturbante, le oscillazioni della pressione atmosferica, con periodo dell'ordine di 6^h circa. Tali oscillazioni sono frequentemente presenti nell'atmosfera.

Questa ipotesi vale naturalmente anche per il lago di Garda, dove le onde interne più ampie sono le binodali, di circa 24^h. Qui la causa agente può identificarsi con la ben nota oscillazione diurna dell'atmosfera, laddove la non meno appariscente onda semidiurna atmosferica, può essere causa delle trinodali interne. La teoria esposta, naturalmente, conserverebbe la sua validità salvo lievi modifiche. Le ricerche per quanto concerne le cause delle eccezionali onde interne nei due laghi, continuano in questo senso (*).

2. — Sempre con riferimento alle cause delle onde interne, ritengo opportuno accennare ad un lavoro di Haurwitz (14) sulle onde interne a carattere di marea.

Osservazioni ripetute di temperatura e salinità negli oceani hanno provato l'esistenza di variazioni periodiche, i cui periodi sono di circa 12 e 24 ore, dell'ordine cioè di quelli delle forze di marea. Contrariamente al parere più diffuso fra gli oceanografi, è stata osservato che queste oscillazioni non possono essere ritenute vere onde interne generate da forze di marea, perché i periodi di libere oscillazioni sulle discontinuità interne sono molto più lunghi (attese le grandi estensioni oceaniche) di quelli delle forze di marea, di modo che non potrebbero essere soddisfatte le richieste condizioni di risonanza. L'argomento venne riesaminato da Haurwitz nel lavoro citato: in conseguenza della rotazione terrestre — in precedenza trascurato —, egli prova che i periodi delle onde interne sono sensibilmente più brevi e le loro velocità molto più grandi di quanto in precedenza supposto. Conseguentemente le condizioni di risonanza per oscillazioni sulle interne superficie di discontinuità sono molto più favorevoli di quelle in precedenza supposte.

Introdotta il termine di Coriolis $\lambda = 2 \omega \sin \varphi$, dove ω è la velocità angolare della rotazione della Terra e φ la latitudine, Haurwitz perviene alle seguenti espressioni per le velocità delle onde libere:

$$C_1^2 = \frac{\lambda^2}{\sigma^2} + g H \left[1 - \left(h' \frac{h''}{H^2} \right) \left(1 - \frac{\varrho'}{\varrho''} \right) \right], \quad [1]$$

$$C_2^2 = \frac{\lambda^2}{\sigma^2} + g h' h'' \left(1 - \frac{\varrho'}{\varrho''} \right) H, \quad [2]$$

dove σ è la pulsazione della forza di marea, essendo manifesto il signifi-

(*) Nel frattempo, per quanto riguarda il lago di Garda, ho provato la validità di questa nuova ipotesi (il relativo lavoro è in corso di pubblicazione presso l'Accademia Nazionale dei Lincei).

cato degli altri simboli. La c_1 è sostanzialmente la velocità in uno strato singolo di profondità H (la parentesi quadra avendo un valore prossimo all'unità), mentre c_2 esprime la velocità delle onde libere alla superficie interna di discontinuità, se i due strati fluidi sono relativamente di piccolo spessore.

Si nota che, nel caso di fluido rotante, la velocità d'onda è notevolmente aumentata.

Un'altra notevole relazione ottenuta da Haurwitz è quella fra il periodo e la lunghezza d'onda. Mi limito a riportarne il grafico relati-

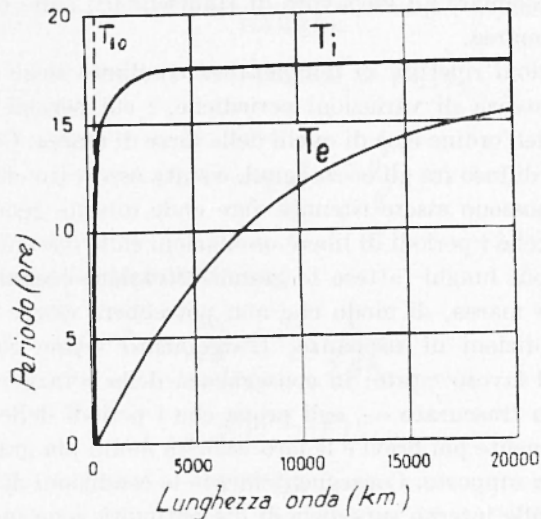


Fig. 16

vo (Fig. 16). Da esso risulta che al crescere della lunghezza d'onda il periodo T_{10} dell'onda interna cresce rapidamente, se l'effetto della rotazione terrestre è trascurabile, mentre in fluido stratificato rotante il periodo T_i tende asintoticamente ad un limite costante (pari a «half a pendulum day»). T_e è il periodo dell'onda superficiale.

Pertanto se le onde interne sono generate da forze di marea, il periodo dell'onda libera deve approssimarsi a quello della forza di marea. Soltanto allora l'effetto di risonanza può divenire cospicuo. Altrimenti le ampiezze delle oscillazioni forzate restano insignificanti.

Per quanto concerne le ampiezze delle superficie oscillanti, Haurwitz ottiene il seguente rapporto fra l'ampiezza ζ_0 alla superficie libera e l'am-

piezza ζ_1 dell'onda interna:

$$\frac{\zeta_0}{\zeta_1} = 1 - \frac{h' \left(c^2 - \frac{\lambda^2}{\sigma^2} \right)}{g h' \left(1 - \frac{\rho'}{\rho''} \right) - \left(c^2 - \frac{\lambda^2}{\sigma^2} \right)} \quad [3]$$

Si prova che la validità delle [1], [2] comporta la risonanza per ζ_0 e ζ_1 . A causa dell'attrito, le ampiezze restano ugualmente finite.

D'altronde il rapporto $\frac{\zeta_n}{\zeta_1}$ rimane finito anche nel caso di attrito nullo.

Se in [3] a c^2 sostituiamo [1] — velocità d'onda alla superficie libera — si ottiene approssimativamente:

$$\frac{\zeta_0}{\zeta_1} = \frac{H}{h''},$$

che vale per onde superficiali.

Se in [3] a c^2 sostituiamo il valore c_2^2 , dato dalla [2] — espressione del quadrato della velocità per onde interne — si ottiene

$$\frac{\zeta_0}{\zeta_1} = 0$$

approssimativamente. Cioè — una volta ancora — *la superficie libera resta inalterata per effetto delle onde interne*, anche in caso di risonanza.

Le conclusioni di Haurwitz possono valere per i laghi di Bracciano e di Garda? Evidentemente no. Per quanto concerne detti laghi, i periodi delle onde interne, registrate in superficie, sono quelli che loro spettano, attese le caratteristiche fisiche dei due strati sovrapposti, e la forma e dimensione del loro alveo. D'altronde, l'azione della rotazione terrestre su superficie così poco estese è del tutto trascurabile. Siamo quindi in casi di risonanza fra causa agente e onda interna. C'è piuttosto da chiedersi se i casi discussi da Haurwitz non possano essere meglio spiegati, ritenendo, anche per essi, come causa efficiente, le oscillazioni diurne e semidiurne dell'atmosfera, tali periodi rientrando come *armoniche superiori* delle più lunghe oscillazioni libere dell'interna superficie di discontinuità.

IV. — Condizione necessaria per lo sviluppo delle onde interne è la formazione della superficie del *salto termico* (alla quale è associata

quella della densità e della viscosità, e, nel caso del mare, anche quella della salinità). Solo la chiara formazione di questa superficie crea le condizioni fisiche atte a consentire l'insorgere di libere oscillazioni nella superficie stessa, che viene a realizzare — in qualche modo — la superficie di separazione di due mezzi fluidi non miscibili. In altre parole, solo l'esistenza di una simile superficie — o di una zona di lieve spessore, tale da potersi assimilare ad una superficie —, permette che l'interazione fra atmosfera ed idrosfera, possa tradursi in sistemi di onde interne.

Come si forma la superficie del salto termico?

È una questione piuttosto complessa, che presenta qualche difficoltà d'ordine matematico, specie se si volesse tener conto dei principali fattori che in essa giuocano un ruolo determinante.

Sulla conducibilità termica nell'acqua la letteratura non è molto nutrita, sebbene su tale argomento si siano cimentati fisico-matematici famosi, fra i quali persino il grande Riemann.

Ad ogni modo, specie per quanto si riferisce allo strato del salto termico (« Sprung Schicht » dei Tedeschi), non è esatto dire che solo Munk e Anderson, e Ertel si siano occupati di tale argomento ⁽¹⁵⁾. Prima di loro, una pregevole ricerca è stata pubblicata dal giapponese H. Arakawa nel 1932 ⁽¹⁶⁾, con un anticipo di 16 anni sul lavoro di Munk e Anderson e di 24 su quello di Ertel.

Fra i vari fattori che influenzano la terminologia di un lago, Arakawa dà la preminenza alla radiazione solare, e si preoccupa — innanzi tutto — di trovare la legge secondo cui l'energia raggiante viene assorbita dall'acqua. Considerare una variazione annua della temperatura, come conseguenza di una variazione *esterna* alla superficie aria-acqua, senza conoscere la legge di penetrazione dell'energia calorifica nel liquido (o scegliendo per essa una legge formalmente identica a quella della diffusione) è senza dubbio insufficiente e può condurre a risultati effimeri.

Procedendo con il metodo di Arakawa, si può anche prescindere dall'andamento annuo della radiazione solare e supporre che tutta l'energia assorbita serva per l'aumento della temperatura, trascurando appunto la variazione nel tempo della radiazione solare.

La formula fondamentale della conduzione del calore è

$$\frac{\partial c \rho \vartheta}{\partial t} = \text{div} (k \text{ grad } \vartheta) + \varphi (x, y, z, t), \quad [1]$$

dove c è il calore specifico, ρ la densità, ϑ la temperatura, k la conducibilità termica e $\varphi (x, y, z, t)$ l'ammontare (« rate ») della generazione del calore per unità di volume.

Arakawa si ripropone di risolvere la [1], discutendo l'effetto della radiazione solare. Innanzi tutto trova — sulla base delle esperienze eseguite sul lago Seneca — che l'assorbimento dell'energia radiante da parte dell'acqua segue la legge (del resto, ben nota)

$$J = J_0 e^{-\gamma z}$$

dove J_0 è l'energia per cm^2 per unità di tempo associata all'aumento di temperatura, γ il coefficiente d'assorbimento e z la profondità in metri.

La quantità di calore assorbita per una profondità infinitesima Δz è pertanto

$$|-\Delta J| = \gamma J_0 e^{-\gamma z} \Delta z.$$

Per il lago Seneca risultò $\gamma = 0,37$ per metro.

Per l'integrazione della [1] si fa l'ipotesi che la variazione della temperatura vicino alla superficie, avvenga per piani perpendicolari alla verticale.

Malgrado la conducibilità, il calore specifico e la densità dell'acqua mutino generalmente di luogo in luogo, essi vengono ritenuti costanti.

Supposto z rivolto positivamente verso il basso, allora la [1] diviene

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} + \frac{\varphi(z, t)}{\rho c} \quad [2]$$

Si assuma in [2] $\varphi(z, t) = \gamma J_0 e^{-\gamma z}$; ciò equivale a supporre che l'energia assorbita venga tutta tramutata in aumento di temperatura, trascurando la variazione della radiazione solare nel tempo. Le condizioni al limite ed iniziale sono

$$\begin{aligned} \vartheta &= \vartheta_0 && \text{per } z = 0 \\ \vartheta &= f(z) && \text{per } t = 0. \end{aligned}$$

Con queste premesse, fatto $a^2 = \frac{k}{\rho c}$ come espressione della diffusività, si prova che l'integrale generale della [2] assume la forma (16):

$$\begin{aligned} \vartheta &= \vartheta_0 + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty [f(\lambda) - \vartheta_0] \left(e^{-\frac{(\lambda-z)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(\lambda+z)^2}{4a^2 t}} \right) d\lambda + \\ &+ \frac{J_0}{\gamma k} \left[1 - \phi\left(\frac{z}{2a\sqrt{t}}\right) e^{-\gamma z} + \frac{1}{2} e^{\gamma^2 a^2 t} \left\{ e^{-\gamma z} \left(1 - \phi\left(\frac{z}{a\gamma\sqrt{t}} - \frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - e^{-\gamma z} \left(1 - \phi\left(a\gamma\sqrt{t} + \frac{z}{2a\sqrt{t}}\right) \right) \right\} \right], \quad [3] \end{aligned}$$

dove

$$\phi(z) = \frac{z}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{z}{2a\sqrt{t}}} e^{-\beta^2} d\beta.$$

Se Θ_0 esprime la temperatura iniziale costante, allora avremo

$$\vartheta = \Theta + (\vartheta_0 - \Theta_0) \left\{ 1 - \phi\left(\frac{z}{2a\sqrt{t}}\right) \right\} + \frac{J_0}{\gamma k} \left[1 - \phi\left(\frac{z}{2a\sqrt{t}}\right) - e^{-\gamma z} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} e^{\gamma^2 a^2 t} \left\{ e^{-\gamma z} \left(1 - \phi\left(a\gamma\sqrt{t} - \frac{z}{2a\sqrt{t}}\right) \right) - e^{\gamma z} \left(1 - \phi\left(a\gamma\sqrt{t} + \frac{z}{2a\sqrt{t}}\right) \right) \right\} \right]. \quad [4]$$

L'applicazione della [4] presuppone la conoscenza di Θ_0 e ϑ_0 ; J_0 può essere tratto dalle tavole per costanti fisiche, sulla base della latitudine; γ va dedotto dalle osservazioni sul lago in esame; c e ρ possono essere uguagliati all'unità. Per quanto concerne k , va ricordato che per acqua pura la conducibilità termica è all'incirca $1,5 \times 10^{-5}$ a 0 °C. Il suo valore però cresce più o meno sensibilmente in caso di turbolenza. k , ad ogni modo, giuoca un ruolo importante nella diffusione della temperatura. L'esperienza infatti prova che, in caso di turbolenza, e quindi con k grande, la temperatura è quasi la stessa come se mancasse la radiazione solare. Ma se l'acqua è calma e la conducibilità è comparabile a quella che si ha in mancanza di turbolenza, la distribuzione termica devia notevolmente da quella corrispondente a mancanza di radiazione.

È in corso un'estensione della [4] ad alcuni laghi italiani.

V. — *Il problema delle predizioni.*

Quando gli spostamenti verticali del mare, comunque determinati, superano certi limiti, possono verificarsi inondazioni lungo le coste, con conseguenze talore disastrose. Per limitarci all'Europa e ai tempi più recenti, basterà ricordare le inondazioni provocate da cicloni nel 1953, lungo le coste del Mare del Nord. Parecchie dighe furono abbattute in Olanda, 25000 km² di terreno furono invasi dalle acque, 2000 persone uccise e 600.000 rimasero senza tetto.

Possono predirsi simili iatture almeno 24 ore prima del loro verificarsi? La previsione, naturalmente, dev'essere sufficientemente accurata così da poter distinguere fra sollevamento dannoso e sollevamento senza conseguenze delle acque, poiché la popolazione non può essere evacuata da aree esposte all'avvicinarsi di qualsiasi ciclone.

Allo stato attuale delle nostre conoscenze e dei mezzi tecnici a disposizione, bisogna riconoscere che tali accurate previsioni non sono ancora possibili.

Ad ogni modo, sono stati fatti, negli ultimi tempi, sensibili progressi su questa via. Un'accuratissima valutazione degli elementi meteorologici è comunque necessaria, così da poter determinare, nel più approssimato dei modi, gli effetti sommati del vento e della pressione atmosferica sul livello del mare (o del lago), associati ad ogni singola tempesta.

È noto che l'effetto di un ciclone sul livello delle acque, varia a seconda della struttura della tempesta e della località interessata. In mare aperto, gli effetti sono generalmente piccoli; le inondazioni più catastrofiche si sviluppano su acque basse.

Seri tentativi di previsione sono in corso specialmente per le tempeste interessanti il mare del Nord (¹⁷), le coste dell'Atlantico settentrionale (¹⁷) (Atlantic City), il mar Baltico (¹⁷), il lago Okeechobee (¹⁷), il lago Michigan (¹⁷), ecc.

Il problema non è solo di carattere meteorologico; esso investe in pieno anche l'idrodinamica, sia per quanto concerne le oscillazioni libere, sia quelle forzate, sia le onde lunghe. Infatti, onde lunghe originanti dalla zona ciclonica possono pure provocare mareggiate in acque basse. P. es., onde lunghe provenienti dall'Atlantico penetrano nel mare del Nord; esse sembrano propagarsi attorno alla Scozia e quindi inoltrarsi lungo le coste del Mare del Nord in senso antiorario. Esse vengono identificate con le così dette onde di Kelvin. La rotazione antioraria può essere attribuita all'effetto delle forze di Coriolis dovute alla rotazione terrestre.

I metodi per la predizione pratica in passato erano principalmente basati sulle correlazioni fra livello del mare e parametri meteorologici. Il parametro chiave in caso di tempeste cicloniche è dato dalla pressione centrale del ciclone, al quale alcuni aggiungono un fattore di amplificazione dinamica.

Gli attuali metodi di predizione numerica sono basati sull'integrazione numerica delle equazioni idrodinamiche, governanti il moto del mare. Le tensioni del vento osservato e la pressione superficiale sono usati come funzioni di forza. Le valutazioni per questa via, sviluppate sopra tutto da Welander (¹⁷), sono tecnicamente molto complicate. Oggi possono essere agevolate dall'uso di macchine elettroniche.

La questione non riveste interesse pressante per quanto riguarda l'Adriatico, sebbene l'*acqua alta* che si verifica sovente a Venezia, specie d'autunno, costituisca un inconveniente non del tutto trascurabile. Una

sua tempestiva previsione potrebbe, se non altro, evitare parte dei danni ad essa connessi. A questo fine, però, bisognerebbe intensificare lo studio dei fattori fisici che entrano in giuoco: meteorologici, mareografici, termologici, idrodinamici e termodinamici. Solo una vasta ricerca, lunga ed accurata, potrà permettere di seguire i movimenti anormali dell'Adriatico, in tutti i loro aspetti, anche quelli che possono recare danno alle persone e alle cose.

BIBLIOGRAFIA

- (1) S. UNOKI, *On the Variation of Sea Level Caused by the Variation of Atmospheric Pressure*. « The Oceanographical Magazine », 2, 1, (1950).
- (2) M. NAKANO, *On the Secondary Undulations of Tides Caused by Cyclonic Storms*. « The Oceanogr. Mag. », I, (1949).
- (3) G. CRYSTAL, *On the Seiches of Loch Earn - Part V: Mathematical Appendix on the Effect of Pressure Disturbances upon the Seiches in a uniform parabolic Lake*. « Trans. Roy. Soc. Edin. », XLVI, Part III (N. 20), (1906).
- (4) T. NOMITSU, *A Theory of Tunamis and Seiches produced by Wind and Barometric Gradient*. In « Memoirs of the College of Science », Kyoto Imp. Univ., Ser. A., XVIII, 4, July, (1935).
- (5) P. CALOI, « *Sesse dell'alto Adriatico, con particolare riguardo al golfo di Trieste* ». « R. Com. Talas. It. Mem. », CCXLVII, (1938).
- (6) P. CALOI, M. C. SPADEA, *Le oscillazioni libere del golfo di Civitavecchia e l'azione della viscosità cinematica*. « Annali di Geofisica », XII, 2, (1959).
- (7) J. PROUDMAN, *The Effects on the Sea of Changes in Atmospheric Pressure*. « Monthly Notices of R.A.S. », Geophys. Suppl., II, 4, (1929).
- (8) K. HIDAKA and T. KUSUNOKI, *The Vertical Distribution of the Amplitude and the Horizontal Velocity in the Internal Waves*. In « Geophysical Notes », Geophys. Inst., Tokyo University, 4, 10, (1951).
- (9) K. KAJIURA, *The Effect of Winds on the Stratified Lake Water*. « Journ. Oceanogr. Soc. Japan », 8, 2 (1952).
- (10) P. CALOI, *Notevoli onde interne (sesse termiche) nel lago di Garda*. « Ricerca Scientifica », XVII, 1, (1947).
- (11) P. CALOI, *Sui possibili modi di oscillazione libera del lago di Bracciano*. « Annali di Geofisica », III, 1, (1950).
- P. CALOI, F. PERONACI, *Oscillazioni libere e forzate del lago di Bracciano*. « Arch. d'Oceanografia e Limnologia ». Venezia, (1958).
- (12) P. CALOI, *Termologia del lago di Bracciano: onde interne*. « Annali di Geofisica », XII, 1, (1959).

- P. CALOI, M. MIGANI, G. PANNOCCHIA, « *Ancora sulle onde interne del lago di Bracciano e sui fenomeni ad esse collegati*. « *Annali di Geofisica* », XIV, 3, (1961).
- (13) P. CALOI, *Sulle onde interne del lago di Bracciano e sulle loro probabili cause*. « *Rend. Acc. Naz. dei Lincei, Classe Sc. fis., mat., e nat.* », serie VIII, XXX, 5, (1961).
- (14) B. HAURWITZ, *Internal Waves of Tidal Character*. « *Trans. Amer. Geophys. Union* », 31, 1, (1950).
- (15) F. MOSETTI, *Sulla distribuzione verticale della temperatura in una massa d'acqua*. « *Istituto Veneto di Sc., Lett., ed Ar.* », CXVIII, Classe sc. mat. e nat., 1959-60.
- (16) H. ARAKAWA, *Solar Radiation and Conduction of Heat in Lake Water*. « *Geophysical Magazine* », V, 1, (1932).
- (17) P. WELANDER, *Numerical Prediction of Storm Surges*. In « *Advances in Geophysics* », 8, 315-379, Academic Press. New York and London (1961).
-