

Lineamenti del progetto di un veicolo per una missione lunare completa (*)

G. CONTURSI (**)

Ricevuto il 18 Maggio 1963

RIASSUNTO. — Nel presente lavoro si studiano, con l'ausilio di una formulazione approssimata, le fasi puramente gravitazionali della missione: ricavate da questo studio le condizioni ai limiti sulle velocità per le fasi propulse, si considerano le equazioni di queste e si perviene, sulla scorta anche di precedenti lavori, alla relativa espressione dei rapporti di massa.

Accurate delle limitazioni di principio nelle prestazioni dei monostadi, si è studiata la ripartizione del vettore in istadi, pervenendo a delle utili formule per il progetto. L'applicazione di queste formule fornisce dei risultati numerici che sono l'oggetto di una prima discussione.

SUMMARY. — In this work, on the basis of an approximate formulation, the merely gravitational phases of the mission are investigated: after having stated in this way the boundary conditions for the propelled phases, the related equations are considered in order to reach proper expressions for mass ratio.

Missile division in stages is the further aim of the work: the study furnishes some useful design formulas. By applying these formulas some basic results are stated and discussed.

1. — INTRODUZIONE.

Per una missione lunare completa sono state recentemente proposte diverse modalità. Nella presente ricerca ci si occuperà del più semplice di questi modelli, cioè di quello che consta di quattro fasi propulse e di due puramente gravitazionali.

(*) Nota presentata al 2° Congresso Internazionale Tecnico Scientifico dello Spazio, Roma, 19-23 Giugno 1962.

(**) Istituto di Aeronautica — Università di Napoli.

Tralasciando gli elementi divulgativi, sottolineiamo subito l'importanza di principio che hanno, per il progetto di un veicolo adeguato alla missione, le fasi puramente gravitazionali della traiettoria, poiché proprio lo studio di queste dovrà fornire le condizioni ai limiti sulle velocità per le equazioni differenziali del moto nelle fasi propulse.

È il caso di rilevare anche che il campo gravitazionale dovuto alla terra ed al suo satellite naturale crea una correlazione, che l'analisi successiva preciserà quantitativamente, fra tali condizioni ai limiti. Questa relazione, che va riguardata come una vera e propria legge naturale, impronta i fondamenti del progetto dei veicoli per la missione in esame.

Essa difatti mostrerà che non è possibile giungere in prossimità della superficie lunare con valori arbitrariamente piccoli della velocità, come sarebbe desiderabile per ragioni di sicurezza e di economia di massa all'atterraggio. In altri termini si dimostrerà che esiste un limite inferiore per la velocità di impatto non frenato.

In più si dimostrerà che questa velocità è prossima a quella di evasione dalla superficie lunare, realizzandosi una condizione molto restrittiva con riferimento alle tolleranze da applicarsi alle fasi propulse.

Prima di entrare nei dettagli della trattazione vogliamo precisare l'ambito entro cui il presente lavoro verrà mantenuto. Si cercherà di delineare il progetto di un veicolo per la missione in esame, indagando sui seguenti aspetti, a nostro avviso fondamentali e in larga misura indipendenti dagli altri che non verranno esaminati:

- determinazione del rapporto di massa globale;
- questioni relative alla ripartizione del veicolo in stadi;
- criteri per assegnare le relative dimensioni di ingombro.

L'esame dei punti predetti, se è ben lungi dall'esaurire il progetto del veicolo in esame, ne costituisce tuttavia un'ossatura che difficilmente altri fattori possono modificare. Difatti, aspetti che qui non verranno trattati, quali, ad esempio, la protezione dei missili da radiazioni, si tradurranno in definitiva in aumenti del « carico utile » ed eventualmente dei valori dei rapporti strutturali.

2. — STUDIO DELLE FASI PURAMENTE GRAVITAZIONALI.

Il problema del moto di un veicolo nel campo gravitazionale dovuto alla terra ed alla luna si riconnette strettamente al classico ed insolubile problema di meccanica celeste del moto di tre corpi attraentisi newtonianamente.

Una formulazione approssimata che a prima vista risulta conveniente è quella relativa al cosiddetto problema ristretto dei tre corpi. Ma in questa formulazione v'è una limitazione che la rende inaccettabile ai nostri fini: i centri dei tre corpi devono muoversi in un piano.

Le inclinazioni del piano di rotazione della luna attorno alla terra e dell'asse di rotazione terrestre sul piano dell'eclittica creano una configurazione tale da rendere difficile, da un punto di vista dinamico, inserire il mobile nel piano dell'eclittica.

Sotto altri aspetti, al fine di rintracciare delle proprietà generali della traiettoria, la formulazione del problema ristretto dei tre corpi può considerarsi sovrabbondante per i nostri fini.

In effetti, come potrà controllarsi a posteriori, nel mentre che il veicolo compie la sua traiettoria, la luna descrive un arco limitato del suo moto di rivoluzione attorno alla terra. Ricordando, difatti, che un mese lunare consta di ventinove giorni e assumendo, compatibilmente con le velocità della fase gravitazionale (che saranno di qui a poco calcolate), una durata di tre giorni per il percorso terra-luna, risulta che durante il tragitto del veicolo, la luna descrive un arco di circa 25°.

D'altro canto la traiettoria in buona parte non si discosterà da una kepleriana geocentrica. Quindi, i precedenti 25° verranno ad essere per la maggior parte descritti in condizioni in cui la luna non esercita una sensibile influenza sulla traiettoria.

In definitiva, mentre la luna influenza la traiettoria, essa descriverà solo un piccolo arco.

Queste considerazioni ci sospingono ad adottare la seguente approssimazione: considerare la luna ferma (rispetto alla terra) nella posizione finale che assumerebbe al termine della durata prescritta per il tragitto (*).

In queste ipotesi, rispetto ad una terna geocentrica (non solidale alla terra) con l'asse x diretto verso la posizione in cui si suppone ferma la luna, le equazioni del moto si scrivono (indicate con gli indici 1 e 2 grandezze riferite alla terra e alla luna, rispettivamente):

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -G m_1 m \frac{x - x_1}{[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2]^{3/2}} - \\ - G m_2 m \frac{x - x_2}{[x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2]^{3/2}} ; \quad [2.1]$$

(*) Con ciò si trascurerà la sghembita finale della traiettoria, la quale, viceversa, va tenuta accuratamente in conto in sede di guida.

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = - G m_1 m \frac{y - y_1}{[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2]^{3/2}} - G m_2 m \frac{y - y_2}{[(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2]^{3/2}} ; \quad [2.2]$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = - G m_1 m \frac{z - z_1}{[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2]^{3/2}} - G m_2 m \frac{z - z_2}{[(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2]^{3/2}} . \quad [2.3]$$

Eliminata m ed introdotta una funzione V definita come segue:

$$V = \frac{G m_1}{[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2]^{1/2}} + \frac{G m_2}{[(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2]^{1/2}} = G \left[\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right] , \quad [2.4]$$

le equazioni si scrivono in forma più concisa:

$$\ddot{x} = \frac{dV}{dx} \quad [2.5]$$

$$\ddot{y} = \frac{dV}{dy} \quad [2.6]$$

$$\ddot{z} = \frac{dV}{dz} . \quad [2.7]$$

Sulle [2.5], [2.6] e [2.7] è più agevole la ricerca di un integrale primo della [2.1], [2.2] e [2.3].

Moltiplicando le [2.5], [2.6] e [2.7] per \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} , rispettivamente e sommando, si ha:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \right] = \frac{dV}{dt} , \quad [2.8]$$

donde:

$$\frac{1}{2} V^2 = G \left[\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right] - h . \quad [2.9]$$

La [2.9] vale quale che sia la geometria della traiettoria e si presta a considerazioni molto importanti ai fini che qui interessano.

V^2 non può diventare negativo. Occorre quindi che il secondo membro della [2.9] si mantenga durante la traiettoria essenzialmente positivo.

Cominciamo col prendere in esame l'unica traiettoria di cui si conosca la geometria: quella rettilinea, lungo la congiungente i centri della terra e della luna.

Tale traiettoria non è certo quella che può essere descritta dal veicolo, ma, come si dimostrerà, gode della proprietà che, le grandezze che interessano, assumono in corrispondenza di essa i loro valori minimi.

Con riferimento alla traiettoria rettilinea detta d ($= 384.000$ km) la distanza media terra-luna, la [2.9] si scrive:

$$V^2 = 2G \left[\frac{m_1}{x} + \frac{m_2}{d-x} \right] - k \quad (k = 2h) \quad [2.10]$$

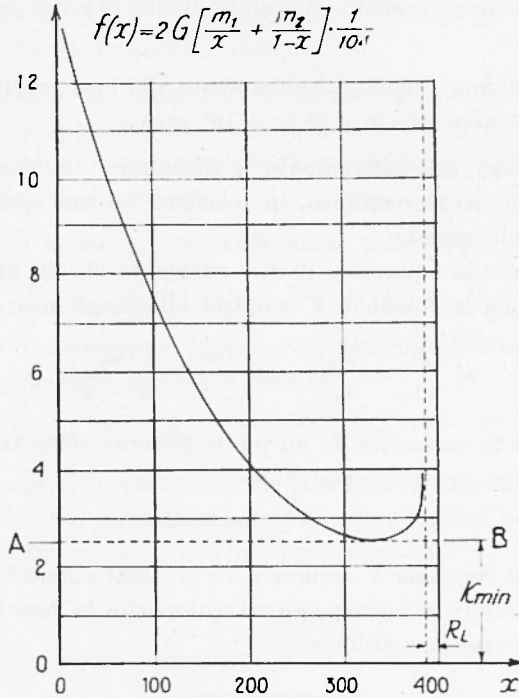


Fig. 1

Rappresentiamo nel diagramma di Fig. 1 la funzione:

$$2G \left[\frac{m_1}{x} + \frac{m_2}{d-x} \right]$$

ove:

$$G, \text{ costante gravitazionale universale} = \frac{6,67}{10^{11}} \frac{\text{m}^3}{\text{kg}_m \text{sec}^2}$$

$$m_1, \text{ massa della terra} = 5,975 \times 10^{24} \text{ kg}_m$$

$$m_2, \text{ massa della luna} = 7,5 \times 10^{22} \text{ kg}_m .$$

Da questo diagramma si rileva che, se non si vuole che il moto diventi retrogrado nel tratto tra la terra e la luna, il massimo valore che la costante k può assumere è espresso da:

$$2,50 \cdot 10^6 \frac{\text{m}^2}{\text{sec}^2} .$$

Leggendo le ordinate del diagramma a partire dalla nuova fondamentale AB, si traggono le due seguenti importanti conclusioni:

a) La minima velocità di caduta libera del veicolo sulla luna è circa 2350 m/sec.

b) La minima velocità di abbandono alla fase gravitazionale dopo il lancio deve essere di circa $11,1 \times 10^3$ m/sec.

Sofferamoci ora brevemente a discutere i risultati precedenti, relativi alla traiettoria rettilinea, in relazione ad una qualsivoglia altra traiettoria gravitazionale.

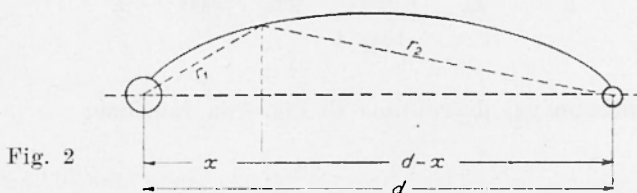
Ritorniamo alla equazione [2.9] e rileviamo che in prossimità della terra e della luna la funzione V soddisfa all'eguaglianza:

$$G \left[\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right] = G \left[\frac{m_1}{x} + \frac{m_2}{d-x} \right] ,$$

mentre, detta x la proiezione di un punto generico della traiettoria schematizzata in Fig. 3, sarà certamente:

$$r_1 \geq x ; \quad r_2 \geq (d-x) .$$

Pertanto la funzione V assumerà in un punto generico della traiettoria valori inferiori ai corrispondenti valori che la funzione V assume nel caso di traiettoria rettilinea (*).



Quindi il diagramma della funzione V , analogo a quello di Fig. 2, tracciato per la generica traiettoria (in funzione, ad esempio dell'ascissa

(*) Al limite, vi potrebbero essere valori uguali nel caso che la traiettoria curva intersecasse in qualche punto quella rettilinea.

curvilinea) presenterebbe gli stessi valori della traiettoria rettilinea agli estremi e valori inferiori nei punti intermedi. Ciò comporterebbe un valore ammissibile minore per k (cioè, sul diagramma, un abbassamento della fondamentale AB) e quindi valori della velocità agli estremi maggiori di quelli relativi alla traiettoria rettilinea.

Dall'analisi precedente restano dunque chiariti:

a) il legame esistente tra le condizioni iniziali e finali della fase gravitazionale, espresso dalla (2.9);

b) l'impossibilità di abbassare oltre il limite di 2300 m/sec la velocità di arrivo in prossimità della luna.

Inoltre l'analisi ha consentito di determinare quali siano le condizioni ai limiti da applicare alle velocità al termine della fase di lancio e all'inizio della fase di frenamento per l'atterraggio sulla superficie lunare.

Tali condizioni si scrivono:

a) fase di lancio (V_L velocità finale della prima fase propulsa):

$$V_o = 0 \quad V_L = (\dot{x}_L^2 + \dot{y}_L^2 + \dot{z}_L^2)^{1/2} \cong 11.000 \text{ m/sec}$$

b) Fase di atterraggio lunare (V_a , velocità all'inizio della manovra di atterraggio sulla superficie lunare):

$$V_a = (\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2 + \dot{z}_a^2)^{1/2} \geq 2300 \text{ m/sec} \quad V_f = 0 .$$

Tali condizioni, a parte l'ovvia inversione, valgono anche per la traiettoria di ritorno, con riferimento alle due altre fasi propulse: decollo dalla luna (condizione *b*) e rientro (condizioni *a*).

3. - STUDIO DELLE FASI PROPULSE.

L'aspetto che qui interessa è la determinazione del « rapporto di massa » tra la massa iniziale e la massa finale del veicolo, relativamente ad una fase propulsa.

A) *Fase di lancio.*

I) *Influenza del momento della quantità di moto dovuto alla rotazione della terra.*

La traiettoria risulterà generalmente curva. Non sono, infatti, nemmeno teoricamente realizzabili traiettorie rettilinee, per la presenza di un

momento della quantità di moto da cui è affetto il missile all'istante del suo lancio, per essere, prima di questo, solidale con la terra.

Tale momento della quantità di moto, calcolato rispetto al centro della terra, vale, per unità di massa:

$$K_1 = \omega R_T^2 \quad [3.1]$$

ove:

$$\omega = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{giorno}} \quad \text{e} \quad R_T = 6370 \text{ km}$$

e non sarà istantaneamente annullabile se non applicando un momento esterno infinito.

11) *Discussione della traiettoria ascensionale.*

Se si assume una terna di riferimento solidale alla terra, sono possibili traiettorie ascensionali apparentemente rettilinee (trascuando la variazione della componente della velocità derivante dalla conservazione del momento della quantità di moto, di cui alla [3.1]).

Quindi sono considerabili le usuali traiettorie apparenti di lancio, costituite da un tratto rettilineo cui si raccorda un tratto curvo.

L'equazione della traiettoria rettilinea ascensionale, scritta in forma che consenta di esaminarne la struttura matematica è la seguente:

$$\ddot{z} + f(z, z, t)\dot{z}^2 + g(z, t) = 0 \quad [3.2]$$

avendo indicato con z l'ascissa lungo la traiettoria.

Tale equazione non consente speranze di soluzione in forma chiusa e va integrata numericamente, con lo svantaggio di dover procedere per tentativi nell'assegnare la portata massima \dot{m} (vedi [3.3]).

L'impossibilità di una risoluzione in forma chiusa deriva essenzialmente dal termine

$$f(z, z, t)\dot{z}^2,$$

che rappresenta la resistenza aerodinamica.

Ora, però, soffermiamoci a fare qualche considerazione che, pure nell'oscurità della soluzione generale della [3.2] consenta tuttavia di acclarare qualche elemento.

Poiché, come è a priori intuibile e come calcoli preliminari dimostrano, verremmo a trovarci in un campo inusitato di ordini di grandezza per le variabili in gioco, è il caso di effettuare un controllo relativo all'importanza dei vari termini dell'equazione di equilibrio.

Questa, nei simboli usuali, si scrive:

$$m g(z) + Cr \varrho S V^2 + \dot{m} V_e = m \frac{dV}{dt} \quad (\dot{m} < 0) \quad [3.3]$$

oppure, in termini di accelerazioni:

$$\frac{dV}{dt} = -g(z) - \frac{Cr \varrho S V^2}{m} + \frac{T}{m}. \quad [3.4]$$

Assumendo per m un ordine di grandezza delle migliaia di tonnellate, da controllarsi a posteriori, si ha durante la fase atmosferica:

- Ordine di grandezza di $g(z) = 10 \text{ m/sec}^2$
- Ordine di grandezza di $|T/m| > 10 \text{ m/sec}^2$ (per esempio 25 m/sec^2).
- Ordine di grandezza di $\frac{Cr \varrho S V^2}{m} = 2,5 \text{ m/sec}^2$.

Difatti, assumendo i seguenti ordini di grandezza per i vari fattori della resistenza:

$$Cr = 0,1 ; \quad \varrho = \frac{1}{10} \frac{\text{kg}_f \text{ sec}^2}{\text{m}^4} ; \quad S = \pi r^2 = \pi \cdot 4^2 = 50 \text{ m}^2 ; \quad V = 10^3 \text{ m/sec}$$

si ha:

$$\frac{Cr \varrho S V^2}{m} = \frac{5 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^6} \cdot \frac{N}{\text{kg}_m} = 2,5 \text{ m/sec}^2.$$

Quindi, nel campo delle costruzioni in esame, il contributo all'accelerazione del mobile dovuto alla resistenza aerodinamica risulta, anche per valutazioni abbastanza accurate, trascurabile, essendo dell'ordine dei metri per sec^2 rispetto alle decine di metri per sec^2 cui da luogo la differenza tra gli altri termini.

La soluzione della [3.4], neglignendo il termine dovuto alla resistenza e assumendo una spinta costante, risulta dopo semplici calcoli:

$$V_1 = V_e \ln \frac{m_0}{m_0 + \dot{m} t} - g_m t. \quad [3.5]$$

Detta t_p la durata della fase propulsa, si ha dalla [3.5] l'espressione del rapporto di massa nella fase di lancio:

$$\mu = \frac{m_0}{m_0 + \dot{m} t_p} = \exp \left[\frac{V_1}{V_e} + \frac{g t_p}{V_e} \right]. \quad [3.6]$$

Alla traiettoria quasi verticale nel moto relativo alla terra, corrisponde una traiettoria curva: la rotazione della terra contribuisce a direzionalizzare il moto.

B) *Fasi di atterraggio sulla superficie lunare e di decollo da essa.*

Il problema dell'atterraggio non distruttivo e, implicitamente, quello del decollo dalla superficie lunare è stato già studiato (3). Di questa ricerca si riportano qui brevemente i risultati principali.

Le equazioni del moto rispetto al riferimento intrinseco della traiettoria sono le seguenti (Fig. 3):

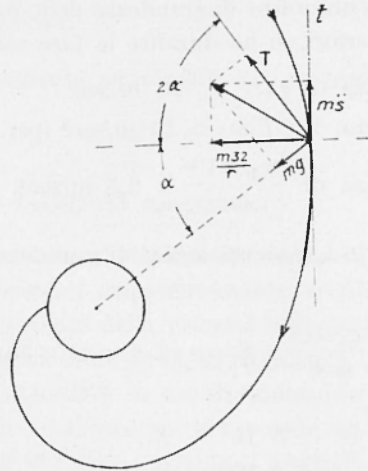


Fig. 3

$$m \frac{s^2}{\tau} = mg_L \cos \alpha - \dot{m} V_e \cos \vartheta, \quad [3.7]$$

$$m \dot{s} = -mg_L \sin \alpha - \dot{m} V_e \sin \vartheta. \quad [3.8]$$

Dalla seconda di queste equazioni si trae:

$$\frac{\dot{m}}{m} = -\frac{s}{V_e \sin \vartheta} - \frac{g_L \sin \alpha}{V_e \sin \vartheta} \quad [3.9]$$

donde:

$$\ln \frac{m_f}{m_i} = -\frac{1}{V_e} \int_{t_i}^{t_f} \frac{s}{\sin \vartheta} dt - \frac{g_L}{V_e} \int_{t_i}^{t_f} \frac{\sin \alpha}{\sin \vartheta} dt. \quad [3.10]$$

Nel lavoro citato fu in dettaglio studiata la fase di atterraggio lungo una traiettoria avente la geometria di una spirale logaritmica. In questo caso $\alpha = \text{cost}$ e si può porre $\vartheta = \text{cost}$, e la [3.10] diviene:

$$\ln \frac{m_f}{m_i} = -\frac{1}{V_e \sin \vartheta} \left[s \right]_{t_i}^{t_f} - \frac{g_L \sin \alpha}{V_e \sin \vartheta} \left[t \right]_{t_i}^{t_f} = -\frac{1}{\sin \vartheta} \left[\frac{V_f - V_i}{V_e} + \frac{g_L \sin \alpha}{V_e} t_p \right] \quad [3.11]$$

avendo ancora indicato con t_p la durata della fase propulsa.

Dalla [3.11] segue che, purché la manovra non sia di lunga durata, il secondo termine dell'ultimo membro della [3.11] è prevalente rispetto al primo (*). In definitiva il valore minimo del rapporto di massa richiesto si può determinare per difetto dalla [3.8] trascurando il termine gravitazionale e ponendovi $\vartheta = 90^\circ$ (spinta tangenziale). Si ha allora:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{m_f}{m_i} = \exp \left[- \frac{V_i}{V_e} \right]$$

supposta $V_e = 3500$ m/sec, si ha:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{m_f}{m_i} = \exp [-0,57] = \frac{1}{1,75} .$$

Considerazioni del tutto analoghe portano ad attribuire per la fase di decollo lo stesso valore del rapporto di massa.

C) Fase di lancio.

In questa delicatissima fase il veicolo si presenta con un'energia cinetica per unità di massa, ammontante, secondo la [2.9] a $6,1 \cdot 10^7$ Joule/kg.

Cerchiamo ora di orientarci circa le modalità della traiettoria di rientro. Appare evidente la necessità di evitare al veicolo e all'equipaggio, già sottoposti durante la missione a duri cimenti, pericolose sollecitazioni inerziali e termiche.

Ciò porta alla considerazione di una frenatura extra atmosferica fino a valori della velocità tali da evitare condizioni di volo ipersoniche nell'arco atmosferico della traiettoria di rientro.

Rimandando ad altri studi per la determinazione delle caratteristiche dinamiche e cinematiche di una siffatta traiettoria, facciamo adesso le seguenti assunzioni che non dovrebbero alterare sostanzialmente i valori delle grandezze che interessa conoscere:

— La traiettoria di avvicinamento del veicolo alla superficie terrestre, rispetto ad una terna ruotante solidalmente alla terra, abbia un andamento non molto discosto da quello rettilineo.

— Si realizzi una frenatura extra-atmosferica che riduca la velocità del veicolo sino a circa 800 m/sec intorno ai 50 km di quota.

(*) Difatti, supponendo la durata della fase propulsa pari a tre minuti primi, si ha:

$$V_i \cong 2000 \text{ m/sec}$$

$$g_L \text{ sen } \alpha t_p < g_L t_p = 1,75 \text{ m/sec}^2 \times 180 \text{ sec.} = 314 \text{ m/sec.}$$

— Si sappia realizzare una traiettoria non distruttiva, planata o semplicemente frenata con mezzi aerodinamici, per un missile abbandonato nelle condizioni di cui al punto precedente in prossimità degli strati densi dell'atmosfera.

Supposte soddisfatte queste condizioni le equazioni della frenatura per la fase di rientro si riducono, *mutatis mutandis*, alle [3.5] e [3.6].

4. — RAPPORTI DI MASSA NELLE FASI PROPULSE.

Designando con $\bar{\mu}_i$ ($i = 1,2,3,4$) i rapporti di massa relativi alle quattro fasi propulse, in applicazione delle ipotesi e dei risultati del precedente § 3 e delle condizioni ai limiti di § 2, si ottiene una prima valutazione dei $\bar{\mu}_i$, assumendo un impulso specifico del propellente pari a 300 m/sec.:

1^a fase:

$$\bar{\mu}_1 = \exp(3,9) = 50$$

2^a fase:

$$\bar{\mu}_2 = \exp(0,53) = 1,7$$

3^a fase:

$$\bar{\mu}_3 = \exp(0,53) = 1,7$$

4^a fase:

$$\bar{\mu}_4 = \exp(3,2) = 25$$

5. — LINEAMENTI DEL PROGETTO DEL VEICOLO COMPLETO.

In linea generale, entro campi di variazione non troppo ampi della massa di propellente m_c e della spinta, si può ritenere che la massa della struttura m_s sia legata alle due precedenti grandezze dalla seguente relazione:

$$m_s = r m_c + r_1 \frac{T}{g}. \quad [5.1]$$

Nel campo di costruzioni in studio sembra lecito ammettere che il secondo termine del secondo membro della [5.1] sia trascurabile rispetto al primo; inoltre la pratica costruttiva sovietica ed americana ha mostrato che:

$$r = 0,1$$

è un valore scattabile.

Indichiamo ora con $m_{i,r}$ la massa di un missile all'inizio della combustione dell' $(r+1)$ -esimo stadio e cerchiamo di stabilire un'espressione della massa di propellente dell' r -esimo stadio in funzione del rapporto di massa relativo allo stadio r -esimo e della massa $m_{i,r+1}$.

Si ha:

$$\begin{aligned} \mu_r &= \frac{m_{i,r}}{m_{f,r}} = \frac{m_{i,r+1} + m_{c,r} + m_{s,r}}{m_{i,r+1} + m_{s,r}} = \frac{m_{c,r}}{m_{i,r+1} + m_{s,r}} + 1 = \\ &= \frac{m_{c,r}}{m_{i,r+1} + r m_c} + 1, \end{aligned} \quad [5.2]$$

donde:

$$m_{c,r} = \frac{\mu_r - 1}{1 - r(\mu_r - 1)} m_{i,r+1}, \quad [5.3]$$

e:

$$\frac{m_{s,r}}{m_{i,r+1}} = \frac{r(\mu_r - 1)}{1 - r(\mu_r - 1)} = f(\mu_r). \quad [5.4]$$

Effettuiamo adesso la determinazione della massa iniziale di un missile a tre stadi, per ciascuno dei quali sia stato previamente determinato il rapporto di massa μ_r (indici i ed f per condizioni iniziali e finali rispettivamente).

L'algoritmo è il seguente:

$$m_{i,4} = m_u \quad [5.5]$$

$$m_{i,3} = m_u + m_{s,3} = m_u + f(\mu_3) \cdot m_u \quad [5.6]$$

$$m_{i,3} = \mu_3 \cdot m_{i,3} = \mu_3 m_u + \mu_3 f(\mu_3) \cdot m_u, \text{ ecc.}$$

L'algoritmo precedente si generalizza nella seguente formula:

$$\mu = \prod_{j=1}^n \mu_j \left[1 + f(\mu_j) \right] \quad [5.7]$$

ove col simbolo \prod si indica il prodotto di n fattori e $f(\mu_j)$ è la funzione definita dalla [5.4].

La [5.7] è una formula fondamentale per il progetto di un veicolo di assegnato carico utile m_u .

Un'importante osservazione va fatta sulla espressione [5.3] della massa di propellente necessaria a produrre una prestazione definita dal valore del rapporto di massa μ :

$$m_c = \frac{\mu - 1}{1 - r(\mu - 1)} m_u. \quad [5.8]$$

Il dover essere la massa m_c non negativa impone che sia:

$$1 - r(\mu - 1) \geq 0 . \quad [5.9]$$

La precedente relazione definisce un valore limite del rapporto di massa espresso da:

$$\mu_{\text{lim}} = \frac{1}{r} + 1 . \quad [5.10]$$

Per $r = 0, 1$, secondo l'indicazione relativa allo stato attuale della tecnologia, la [6.3] definisce il seguente valore limite del rapporto di massa:

$$\mu_{\text{lim}} = \frac{1}{0,1} + 1 = 11 . \quad [5.11]$$

D'altra parte il valore μ_{lim} espresso dalla [6.3] rappresenta di per sé un valore inaccessibile, poiché ad esso corrisponde un valore infinito della massa di propellente.

In definitiva, per ogni stadio r -esimo occorre che sia:

$$\mu_r < \mu_{\text{lim}} . \quad [5.12]$$

6. - CRITERI APPLICATIVI.

Tenendo in conto la limitazione enunciata nel precedente paragrafo, riesaminiamo i valori numerici del § 4.

Da quest'esame risulta immediatamente che non è, nemmeno in linea di principio, possibile che le due fasi propulse da effettuarsi in prossimità della terra possano realizzarsi mediante l'uso di un solo stadio per ciascuna di esse.

Quindi per una missione completa che si svolga secondo le modalità illustrate al § 1, occorre riferirsi ad un vettore a numero di stadi non inferiore a sei.

Studiamo ora come vada adeguato il progetto ai dati del § 4. Riprendiamo la relazione [3.6], nella quale in sede di calcoli orientativi neglieremo il termine $g \frac{t_n}{V_e}$ e che, quindi, si scrive:

$$\mu_j = \frac{m_i}{m_f} = \exp \left[\frac{V_1}{V_e} \right] . \quad [6.6]$$

Un esame del significato della [6.6] mostra che, se $\mu_j > \mu_{\text{lim}}$, per realizzare al termine della j -esima fase propulsa la velocità V_1 , occorre e

basta che, detto s il numero di stadi con cui si realizza detta fase e $\mu_{j,t}$ il rapporto di massa relativo al t -esimo di questi stadi, sia:

$$\bar{\mu}_j = \prod_{t=1}^{t=s} \mu_{j,t} \quad [6.7]$$

ove $\bar{\mu}_{j,t}$ è il rapporto di massa per la fase j -esima, calcolato al § 3 ed esemplificato al § 4.

Ad esempio, supposta realizzata la prima fase mediante l'uso di due stadi deve essere (§ 4):

$$\bar{\mu}_1 = 50 = \mu_{1,1} \cdot \mu_{1,2} .$$

Una possibile scelta è: $\mu_{1,1} = \mu_{1,2} = \sqrt[2]{\bar{\mu}_1} \cong 7$.

Naturalmente la scelta della coppia di valori soddisfacenti la [6.7] va fatta in relazione a criteri di sicurezza del volo negli strati densi dell'atmosfera e di ottimalizzazione del rapporto di massa globale.

Occorre notare che quando $\mu_j > \mu_{\text{lim}}$ e quindi è necessario scindere la fase j -esima in più stadii, il rapporto di massa effettivo relativo all'intera fase j -esima risulta maggiore di quello teorico $\bar{\mu}_j$. Ciò risulta immediatamente dal confronto tra la [5.7] e la [6.7].

7. - DETERMINAZIONI NUMERICHE.

Riservandoci di applicare in un'ulteriore ricerca dei processi di ottimalizzazione in merito al problema della ripartizione del veicolo in stadi, effettuiamo adesso delle prime determinazioni numeriche, tenendo però in conto la limitazione, espressa dalla [5.9] delle masse dei singoli stadi.

Riferiamoci ad un missile avente il minimo numero possibile di stadi, cioè a sei stadi. Assumiamo per le fasi iniziale e finale i seguenti valori dei rapporti parziali di massa (§ 4):

$$\mu_{1,1} = \mu_{1,2} = \sqrt[2]{\bar{\mu}_1} \cong 7$$

$$\mu_{4,1} = \mu_{4,2} = \sqrt[2]{\bar{\mu}_4} \cong 5 .$$

Per il vettore considerato assumiamo un rapporto strutturale r eguale per tutti gli stadi e pari a $1/10$.

I rapporti di massa per i singoli stadi, attribuendo una numerazione progressiva sono dunque:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= 7 \\ \mu_2 &= 7 \\ \mu_3 &= 1,7 \\ \mu_4 &= 1,7 \\ \mu_5 &= 5 \\ \mu_6 &= 5\end{aligned}$$

Si ha inoltre:

$$\begin{aligned}f(\mu_1) &= f(\mu_2) = 1,5 \\ f(\mu_3) &= f(\mu_4) = 0,075 \\ f(\mu_5) &= f(\mu_6) = 1,665.\end{aligned}$$

Applicando la [5,7], tenendo conto delle precedenti uguaglianze, si ottiene:

$$\begin{aligned}\frac{m_i}{m_n} &= \prod_{J=1}^{J=6} \mu_J \left[1 + f(\mu_J) \right] = \mu_1^2 \cdot \mu_2^2 \cdot \mu_3^2 \left[1 + f(\mu_1) \right]^2 \cdot \\ &\cdot \left[1 + f(\mu_2) \right]^2 \cdot \left[1 + f(\mu_3) \right]^2 = 84 \cdot 10^3.\end{aligned}\quad [7.1]$$

8. - CONSIDERAZIONI SUI RISULTATI.

I risultati stabiliti mettono in risalto l'importanza tecnica delle considerazioni che seguono.

a) Indaghiamo l'influenza del rapporto strutturale r sul rapporto di massa totale espresso dalla [5.7]. Al rapporto strutturale r si è attribuito un valore costante e pari ad $1/10$. Tale valore deve ritenersi già notevolmente basso. Tuttavia calcoliamo il limite del rapporto totale di massa per $r \rightarrow 0$.

Tale valore limite è espresso semplicemente da:

$$\mu^* = \prod_{J=1}^{J=n} \mu_J$$

e, nel caso specifico, particolarizzando la [7.1], si ha:

$$\mu^* = \mu_1^2 \cdot \mu_2^2 \cdot \mu_3^2 = 3700.$$

In tali condizioni limiti, per ogni kg di carico rientrante, basterebbe predisporre all'istante del lancio 3,7 tonnellate in luogo delle 80 calcolate in base alla [7.1].

La riduzione dei rapporti strutturali a valori minori del 10% rappresenta quindi l'obiettivo fondamentale, dal punto di vista delle strutture della tecnologia.

b) Per costruzioni molto spinte quali quelle richieste per una simile missione, in relazione soprattutto all'atterraggio su un suolo accidentato quale quello della superficie lunare, l'ordinaria disposizione in stadi disposti l'uno dopo l'altro, dovrà essere probabilmente abbandonata, ricorrendo ad accoppiamenti del tipo di quello esemplificato in Fig. 4 a coppie concentriche di stadi.

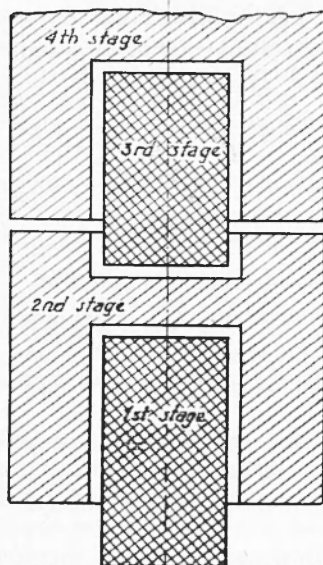


Fig. 4

c) La scoraggiante entità del rapporto globale di massa richiesto per una simile missione avvalorava la tecnica di « rendez-vous », verso le quali sembra orientata la tecnica americana e russa, in relazione al tipo di missione lunare più impegnativo, cioè quello comportante l'invio di esseri umani. Questa tecnica, estremamente difficile, presenta il fondamentale vantaggio di comportare, nelle varie fasi n veicoli di dimensioni più ridotte.

CONCLUSIONI.

Nel presente lavoro, acclarata l'importanza dello studio delle fasi gravitazionali in relazione al dimensionamento del vettore, si è svolta una trattazione approssimata delle medesime che ha consentito la determinazione delle condizioni iniziali e finali per le velocità nelle fasi propulse.

Si è quindi studiata la dinamica delle fasi propulse, allo scopo di pervenire, avvalendoci anche dei risultati di un precedente lavoro, ad espressioni del rapporto di massa in funzione delle condizioni ai limiti dianzi determinate.

Si sono poi discussi i criteri di ripartizione del missile in stadi, sottolineando talune limitazioni di principio nelle prestazioni dei razzi monostadi e stabilendo delle utili formule di progetto.

In applicazione dei precedenti risultati si sono effettuate delle prime determinazioni numeriche. Queste mettono in risalto l'importanza di alcune considerazioni svolte al § 7.

BIBLIOGRAFIA

- (¹) ZDENEK KOPAL. *The moon*. Chapman and Hall, London, 1960.
 - (²) U.S.S.R. Academy of Sciences, *The other face of the moon*. Pergamon Press, 1960.
 - (³) United States Information Service, *Satelliti artificiali statunitensi*. Roma, 1952.
 - (⁴) G. CONTURSI, *Sui sistemi di atterraggio non distruttivi di un missile abitato sulla superficie lunare*. « Missili », 1, (1962).
 - (⁵) *L'URSS e lo Spazio*. Scritti e documenti ufficiali sovietici. Lerici editore, Milano, 1960.
 - (⁶) WROBEL J., BRESHEARS R., *Lunar landing vehicle propulsion requirements A.R.S.* « Journal », November, (1961).
 - (⁷) FINLAY-FREUNDLICH E., *Celestial Mechanics*. Pergamon Press, London, (1958).
-