

Parametri non lineari di campi elastici e oscillazioni libere della Terra

(Non linear parameters of elastic fields and Earth's free modes)

M. CAPUTO - A. PIVA (*)

Ricevuto il 5 Dicembre 1970

RIASSUNTO. — Questa ricerca è un tentativo di spiegare l'esistenza delle righe osservate nello spettro delle oscillazioni libere della Terra non identificabili con righe previste per i modelli più attendibili.

Prima si studia il comportamento non lineare degli strumenti di misura e la loro interazione col fenomeno; e si vede che questa interazione non potrebbe causare le righe anomale ma, al più un allargamento delle righe osservate. Poi si studiano i fenomeni non lineari nel caso delle oscillazioni puramente radiali e si vede che per determinare i parametri elastici che caratterizzano il comportamento non lineare del campo, sono necessarie molte più informazioni che per i parametri lineari; si suggerisce inoltre un metodo per il calcolo di questi parametri ed infine si discute la possibilità di osservare questi fenomeni nelle oscillazioni libere della Terra.

SUMMARY. — In this paper we attempt to explain the lines observed in the spectrum of the free modes of the Earth which cannot be identified with those of the most probable models.

First we study the non linear behaviour of the instruments and their interaction with the phenomenon; we see that this interaction cannot cause the anomalous lines, but at most, a thickening of the observed lines. Then we study the non linear phenomena in the purely radial modes, and we see that, to determine the elastic parameters which characterize the non linear behaviour of the field, we need more information than in the case of the parameters of the linear case; we suggest then a method for the computation of these parameters and finally, we discuss the possibility to observe these phenomena in the free modes of the Earth.

(*) Istituto di Fisica e Istituto di Geodesia - Università di Bologna.

1. - INTRODUZIONE.

L'analisi spettrale delle oscillazioni libere della Terra mostra l'esistenza di righe non identificabili con quelle previste dalla teoria e che possono essere dovute alla interazione di differenti modi delle oscillazioni libere, causate cioè da fenomeni non lineari.

Sebbene vi siano motivi (^{1,2}), primo fra tutti la piccolezza delle deformazioni all'interno della Terra, per scartare questa ipotesi, e considerare queste nuove righe spettrali alla stessa stregua delle altre, è pur sempre valida l'analisi della possibilità di esistenza di questi fenomeni (^{3,4}).

Un altro motivo che permetterebbe di spiegare la presenza di queste righe, potrebbe essere la perturbazione apportata alle osservazioni dagli strumenti di misura che potrebbero comportarsi non linearmente. La presente indagine porta ad escludere quest'ultima possibilità e a considerare improbabile la prima.

Le difficoltà inerenti lo studio dei fenomeni non lineari sono sia fisiche che matematiche. Sorge infatti il problema della interpretazione fisica dei fenomeni nella regione della non linearità che è resa ancora più difficoltosa per la carenza di dati sperimentali. I tentativi finora intrapresi tendono all'enunciazione di leggi fisiche che, al limite dell'approssimazione lineare, si riducono alle leggi già note. Questa però è solo una condizione necessaria ma non sufficiente affinché una teoria non lineare sia considerata valida. Nel campo della elasticità della Terra, gli spostamenti sono talmente piccoli che nulla si può ancora dire circa i parametri elastici dei materiali nella regione di non linearità, per quanto la teoria qui sviluppata fornisca un metodo per il calcolo dei parametri che caratterizzano al secondo ordine il comportamento di un campo elastico.

Nella teoria infinitesimale della elasticità, si fa l'ipotesi che le deformazioni dei corpi siano piccole. Questo significa che la variazione delle distanze è piccola rispetto alle distanze stesse; in altri termini gli allungamenti relativi sono tali che:

$$\frac{dl^2 - dl^2_0}{dl^2_0} \ll 1 \quad [1.1]$$

In tal caso, tutte le componenti del tensore di deformazione che determinano le variazioni relative di lunghezza, sono pure piccole rispetto all'unità.

In base a queste ipotesi, i fenomeni elastici sono regolati essenzialmente dalla legge di Hooke che stabilisce la proporzionalità fra il tensore degli sforzi e quello delle deformazioni. Quando le deformazioni dei corpi non si possono più considerare piccole, la legge di Hooke non è più valida essendo necessario tenere in considerazione anche i termini di ordine superiore al primo nelle componenti del tensore di deformazione.

Le difficoltà di ordine matematico consistono essenzialmente nel fatto che le equazioni del moto, essendo non lineari, non godono del principio di sovrapposizione. Le soluzioni di queste equazioni contengono delle funzioni che descrivono il comportamento cosiddetto anarmonico del mezzo elastico e sono caratterizzate dalle frequenze di combinazione.

La teoria delle deformazioni finite sviluppata dal Murnaghan ⁽⁵⁾ è uno sviluppo rigoroso della teoria della elasticità in cui non si impone alcuna restrizione alla grandezza della deformazione. La teoria è formalmente esatta, ma, in pratica, sorgono delle limitazioni poiché nulla si sa sui valori dei coefficienti di ordine superiore al secondo che compaiono nello sviluppo della energia di deformazione in funzione della deformazione stessa.

Come si vede, la grandezza che stabilisce se un mezzo elastico ammette o no un comportamento non lineare è la deformazione del mezzo stesso. Per la Terra il suo valore è $\approx 10^{-8}$ e, di conseguenza, al secondo ordine è così piccolo che difficilmente potrà fornire al termine non lineare delle oscillazioni libere un'ampiezza osservabile.

In Tab. I sono elencati alcuni modi relativi ai fenomeni sismici registrati durante il terremoto del Cile del 1960 e dell'Alaska del 1964, fra i quali ve ne sono alcuni per i quali è stato suggerito un fenomeno di interazione. Ma, a nostro avviso, le ampiezze sono troppo piccole per poter pensare che si possa osservarle.

Un esempio ne è il modo $1S_0$, la cui frequenza è pressoché doppia di quella dell'armonica fondamentale $0S_0$ e che quindi potrebbe essere interpretato come interazione dell'armonica fondamentale con se stessa, ma, dall'analisi spettrale si può vedere che il rapporto fra le relative ampiezze osservate sarebbe:

$$\frac{A(1S_0)}{A(0S_0)} \approx \frac{1}{20} \quad [1.2]$$

che, a nostro avviso, è incompatibile con la piccolezza della deforma-

zione. Questo ci porta a concludere che il periodo di circa 10 minuti è veramente ${}_1S_0$.

TAB. I

M o d i		Periodi osservati nel Cile (min.)	Periodi osservati nell'Alaska (min.)
Naturali	Interazione		
${}_1S_0$		10.06	10.22
${}_0S_8$		11.80	11.89
${}_2S_5$		11.00	11.10 - 10.98
${}_0S_{10}$		9.67	9.68
${}_0S_{11}$		8.93	8.95
	${}_0S_8 - {}_2S_5$	152	149
	${}_2S_5 - {}_1S_0$	106	103
	${}_2S_5 - {}_0S_{10}$	79	79 - 80
	${}_0S_8 - {}_1S_0$	61	61
	${}_2S_5 - {}_0S_{11}$	48	47 - 48

2. - MODELLI ELASTICI DEGLI STRUMENTI DI MISURA.

Ci proponiamo ora di esaminare l'interazione Terra-strumento di misura supponendo che quest'ultimo ammetta un comportamento non lineare.

Gli strumenti che permettono di mettere in evidenza le oscillazioni libere della Terra, che ammettono periodi molto lunghi, sono spesso i gravimetri, o strumenti ad essi equiparabili.

Tali strumenti si possono schematizzare come una massa, collegata al supporto rigido dello strumento mediante un sistema elastico che in generale è una molla. Quindi, lo studio di questi strumenti di misura si riduce allo studio di oscillatori per i quali, nel caso attuale, si con-

sidera un termine al secondo ordine nello spostamento nell'espressione della forza elastica di richiamo.

Se il moto del supporto è della forma:

$$s(t) = a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos \omega_2 t,$$

l'equazione del moto della massa del gravimetro è data dalla:

$$my = -K(y - s) + \lambda(y - s)^2 \quad [2.1]$$

essendo y lo spostamento dalla posizione di equilibrio, con le condizioni iniziali: $y(0) = b$, $\dot{y}(0) = 0$.

Introducendo una nuova variabile: $x(t) = y(t) - s(t)$, l'equazione del moto diventa:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha^2 x^2 + \omega_1^2 a_1 \cos \omega_1 t + \omega_2^2 a_2 \cos \omega_2 t, \quad \alpha^2 = \frac{\lambda}{m} \quad [2.2]$$

α^2 essendo il coefficiente di non linearità, e ponendo:

$\omega_1^2 a_1 = b_1$ e $\omega_2^2 a_2 = b_2$, si ha l'equazione del moto:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \alpha^2 x^2 = b_1 \cos \omega_1 t + b_2 \cos \omega_2 t \quad [2.3]$$

risolvibile mediante il metodo operativo introducendo la trasformata di Laplace.

Applicando la soluzione trovata allo studio delle oscillazioni libere della Terra, eccitate dal terremoto dell'Alaska nel Maggio 1964, registrate a Los Angeles col gravimetro La Coste il cui periodo proprio è di circa 50 sec., considerando ad esempio il periodo delle oscillazioni radiali della Terra che è di circa 1200 sec., il termine che ci descrive il comportamento del sistema in seconda approssimazione è:

$$\begin{aligned} x_1(t) \approx \alpha^2 \left[\frac{a_1^2}{2\omega_0^2} \left(1 + \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} \right) - \frac{4}{3} \frac{a_1^2}{\omega_0^2} \cos \omega_0 t - \frac{a_1^2}{6\omega_0^2} \cos 2\omega_0 t + \right. \\ \left. + \frac{a_1^2}{2\omega_0^2} \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} \right)^2 \cos 2\omega_1 t + a_1^2 \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} \right)^2 \frac{\cos(\omega_0 + \omega_1)t}{\omega_1^2 + 2\omega_0\omega_1} + \right. \\ \left. + a_1^2 \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} \right)^2 \frac{\cos(\omega_0 - \omega_1)t}{\omega_1^2 - 2\omega_0\omega_1} \right] \quad [2.4] \end{aligned}$$

dove le nuove frequenze $2\omega_0$, $\omega_0 \pm \omega_1$ e $2\omega_1$ ci indicano rispettivamente i seguenti tipi di interazione:

1) Interazione dello strumento di misura con se stesso: per la maggior parte degli strumenti con i quali si sono osservate le oscillazioni libere della Terra fino ad oggi è $\omega_0 \leq 50^{-1}$ cps. per cui la frequenza $2\omega_0$ non introduce alcun problema nell'analisi delle frequenze proprie della Terra;

2) Interazione Terra-strumento di misura.

Le frequenze:

$$\omega_0 \pm \omega_1 = \omega_0 \left(1 \pm \frac{\omega_1}{\omega_0} \right) \simeq \frac{1}{50} \left(1 \pm \frac{1}{24} \right) \quad [2.5]$$

corrispondono a periodi che sono minori di 1 min. e poiché le letture delle registrazioni vengono fatte ad intervalli di 1 min. la loro eventuale presenza è un evento aleatorio.

3) Interazione Terra-Terra.

Nel caso della oscillazione ${}_0S_0$, la corrispondente frequenza ω_1 dà luogo ad una frequenza $2\omega_1$ che è quasi identica alla prima armonica di ${}_0S_0$ che è ${}_0S_0$; l'ampiezza del termine in $2\omega_1$ è però $\simeq 3.7 \cdot 10^{-3} a \cdot a^2$, cioè tale da non destare alcun problema nell'analisi dei dati poiché $a_1 < 1$ cm ed il coefficiente a^2 è molto piccolo.

Sembra quindi che un eventuale comportamento non lineare degli strumenti di misura non spieghi la presenza delle righe anomale.

3. - OSCILLAZIONI LIBERE DI UN MODELLO ELASTICO DELLA TERRA.

Passiamo ora allo studio delle oscillazioni libere di una sfera elastica omogenea, di densità ρ , raggio R e parametri elastici λ e μ allo scopo di indicare la possibilità di determinare sperimentalmente i coefficienti elastici di non linearità, estendendo lo studio delle oscillazioni libere alla seconda approssimazione.

Introduciamo prima alcuni richiami sulla teoria delle deformazioni finite enunciata dal Murmaghan ⁽⁵⁾ dalla quale siamo partiti per sviluppare questo lavoro.

3.1 - Definizione della deformazione e costanti elastiche di un mezzo isotropo.

Nella teoria delle deformazioni finite ⁽⁵⁾ la matrice di deformazione viene definita nel modo seguente:

$$\eta = \frac{1}{2} (J^*J - I) \quad [3.1]$$

dove: J è la matrice Jacobiana, relativa alla trasformazione dalle coordinate iniziali (a, b, c) di una particella del mezzo deformabile alle coordinate finali (x, y, z) della stessa particella, mentre I è la matrice unitaria.

L'energia di deformazione per unità iniziale di volume viene espressa mediante uno sviluppo in serie di potenze nei tre invarianti I_1, I_2 e I_3 della matrice di deformazione che, se è scritta in forma canonica, assumono la forma:

$$\begin{aligned} I_1 &= \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 \\ I_2 &= \eta_1\eta_2 + \eta_1\eta_3 + \eta_2\eta_3 \\ I_3 &= \eta_1\eta_2\eta_3 \end{aligned} \quad [3.2]$$

mentre l'energia di deformazione si può scrivere:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \dots \quad [3.3]$$

essendo:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= aI_1 \\ \phi_2 &= \frac{\lambda + 2\mu}{2} I_1^2 - 2\mu I_2 \\ \phi_3 &= \frac{l + 2m}{3} I_1^3 - 2mI_1 I_2 + nI_3 \end{aligned} \quad [3.4]$$

dove i parametri λ, μ, l, m, n sono le costanti elastiche del mezzo isotropo.

Passiamo ora allo studio del problema annunciato: consideriamo una particella del mezzo che abbia, allo stato iniziale, coordinate (r, ϑ, φ) : la sua posizione nello stato deformato sarà individuata dalle coordinate $(r + ku, \vartheta, \varphi)$ dove ku rappresenta lo spostamento.

La costante k è adimensionale ed è tale che nella teoria lineare trascuriamo le sue potenze superiori alla prima, mentre nella seconda approssimazione ne trascuriamo le potenze superiori alla seconda.

Le oscillazioni radiali sono caratterizzate da:

$$u = u(r, t), \quad u\vartheta = u\varphi \equiv 0. \quad [3.5]$$

Supponendo per semplicità che il mezzo sia libero da stress iniziale, la funzione densità di energia è espressa dalla formula:

$$\phi = \frac{\lambda + 2\mu}{2} I_1^2 - 2\mu I_2 + \frac{\lambda + 2\mu}{3} I_1^3 - 2m I_1 I_2 + n I_3 \quad [3.6]$$

dove, trascurando le potenze di k superiori alla seconda, abbiamo:

$$\begin{aligned} I_1 &= k \left(u' + \frac{2u}{r} \right) + \frac{1}{2} k^2 \left(u'^2 + \frac{2uu'}{r^2} \right) \\ I_2 &= k^2 \left(\frac{u^2}{r^2} + \frac{2uu'}{r} \right). \end{aligned} \quad [3.7]$$

La matrice di stress è:

$$T = J \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \quad [3.8]$$

dove:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta} = \lambda I_1 I + 2\mu \eta + (II_1^2 - 2m I_2) I + 2m I_1 \eta + n \text{con} . \quad [3.9]$$

L'equazione del moto in forma matriciale, in assenza di forze di volume è:

$$(\text{div } T)^* = \rho x_{ii} . \quad [3.10]$$

Esplicitamente si ha:

$$\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{2}{r} (T_{rr} - T_{\theta\theta}) = \rho (k\ddot{u}) . \quad [3.11]$$

Ponendo:

$$u(r, t) = u_1(r, t) + kw(r, t) \quad [3.12]$$

dove $u_1(r, t)$ ci rappresenta la soluzione del problema in prima approssimazione e $w(r, t)$ la correzione in seconda approssimazione, l'equazione del moto in prima approssimazione è:

$$\rho \ddot{u}_1 = (\lambda + 2\mu) \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{2u_1}{r^2} \right]; \quad \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} = V_1^2 \quad [3.13]$$

dove V_1 è la velocità longitudinale di propagazione delle onde elastiche.

Cerchiamo la soluzione di [3.13] nella classe:

$$u_1(r, t) = u_0(r) e^{i\omega_1 t} \quad [3.14]$$

dove $u_0(r)$ soddisfa l'equazione:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u_0) \right] + k_1^2 u_0 = 0 \quad [3.15]$$

con $k_1 = \omega_1/V_1$ vettore d'onda.

La soluzione finita all'origine è:

$$u_0(r) = A \left(\frac{\sin k_1 r}{(k_1 r)^2} - \frac{\cos k_1 r}{k_1 r} \right) = c_1 \frac{J_{3/2}(k_1 r)}{\sqrt{r}} \quad [3.16]$$

La condizione al contorno:

$$T_{rr} = 0 \text{ per } r = R$$

fornisce gli autovalori k_1 per i quali è valida la soluzione e che soddisfano la ben nota relazione:

$$\frac{\operatorname{tg} k_1 R}{k_1 R} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\lambda + 2\mu}{4\mu} \right) (k_1 R)^2} \quad [3.17]$$

In seconda approssimazione, trascurando le potenze in k superiori alla seconda nel calcolo delle componenti della matrice di sforzo T , derivando, raccogliendo e separando i termini in k e k^2 si ottiene l'equazione già scritta in precedenza e che ci dà la soluzione al primo ordine $u_1(r, t)$ ed inoltre l'equazione seguente ottenuta annullando i coefficienti di k^2 e trascurando i termini relativi alle potenze superiori:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - V_1^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 w) \right] &= \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} A_{u1} \frac{\partial A_{u1}}{\partial r} + \\ &+ \frac{2(\lambda + 3\mu + 2m)}{\rho} \frac{\partial u_1}{\partial r} \frac{\partial A_{u1}}{\partial r} - \\ &- \frac{2(\lambda + 3\mu + 2m)}{\rho} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{u_1}{r} \right)^2 \\ A u_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{2 u_1}{r} \end{aligned} \quad [3.18]$$

Ponendo:

$$\frac{\lambda + 2l}{\rho} = \alpha^2, \quad \frac{2(\lambda + 3\mu + 2m)}{\rho} = \beta^2$$

siccome:

$$\frac{\partial Au_1}{\partial r} = \frac{1}{V_1^2} u_1$$

l'equazione si può scrivere così:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - V_1^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 w) \right] = & - \left[\frac{\omega_1^2 \alpha^2}{V_1^2} \left(\frac{dw_0}{dr} + \frac{2}{r} w_0 \right) \right] w_0 + \\ & + \frac{\omega_1 \beta^2}{V_1^2} w_0 \frac{dw_0}{dr} + \beta^2 \frac{1}{r} \left(\frac{dw_0}{dr} - \frac{w_0}{r} \right)^2 \left] e^{i\omega_1 t} \end{aligned} \quad [3.19]$$

questa equazione, alle derivate parziali, non omogenea, è di difficile soluzione; per ora cerchiamo di ottenere una soluzione mediante separazione della variabili, ma sarà oggetto di ricerche ulteriori la soluzione del nostro problema adottando un metodo diverso. Consideriamo perciò una soluzione del tipo:

$$w(r, t) = w_0(r) e^{i\omega_2 t}$$

si ha:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d^2 w_0}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dw_0}{dr} + \left(\frac{\omega_2^2}{V_1^2} - \frac{2}{r^2} \right) \right] e^{i\omega_2 t} = \\ & = \left[\frac{k_1^2 \alpha^2}{V_1^2} \left(\frac{dw_0}{dr} w_0 + \frac{2}{r} w_0 \right) w_0 + \frac{k_1^2 \beta^2}{V_1^2} w_0 \frac{dw_0}{dr} + \right. \\ & \left. + \frac{\beta^2}{V_1^2} \frac{1}{r} \left(\frac{dw_0}{dr} - \frac{w_0}{r} \right)^2 \right] e^{i\omega_1 t}. \end{aligned} \quad [3.20]$$

Questa è una identità nel tempo e può essere soddisfatta ponendo:

$$\omega_2 = 2 \omega_1$$

Ciò implica che le oscillazioni libere in seconda approssimazione comportano delle frequenze che sono doppie di quelle relative alla approssimazione lineare. Poniamo:

$$\frac{\omega^2}{V_1^2} = k^2_2.$$

Possiamo quindi scrivere l'equazione del moto nella forma:

$$\begin{aligned} \frac{d-w_0}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dw_0}{dr} + \left(k^2_2 - \frac{2}{r^2} \right) w_0 &= \frac{e^2_1 \beta^2}{V_1^2} \frac{1}{r^2} \left(\frac{dJ}{dr} \right)^2 + \\ &+ e^2_1 \left[\frac{(a^2 + \beta^2) k^2_1}{V_1^2 r} - \frac{3 \beta^2}{V_1^2 r^3} \right] J \cdot \frac{dJ}{dr} + \\ &+ e^2_1 \left[\frac{(3 a^2 - \beta^2) k^2_1}{2 V_1^2 r^2} + \frac{9}{4} \frac{\beta^2}{V_1^2 r^4} \right] \cdot J^2 \end{aligned} \quad [3.20]$$

dove J è la funzione di Bessel:

$$J_{3/2}(k_1 r).$$

Ponendo:

$$B_1 = \frac{e^2_1 a^2}{V_1^2}, \quad B_2 = \frac{e^2_1 \beta^2}{V_1^2}$$

cerchiamo ora una soluzione dell'equazione nel caso che i parametri siano tali da soddisfare la seguente relazione:

$$B_1 = -B_2 \quad \text{cioè} \quad a^2 = -\beta^2$$

ovvero:

$$3(\lambda + 2\mu) + 2l + 4m = 0. \quad [3.21]$$

Il che equivale ad adottare un particolare modello elastico della terra.

In tal caso la soluzione finita nell'origine è:

$$w_0(r) = D \left[\frac{\sin 2 k_1 r}{(2 k_1 r)^2} - \frac{\cos 2 k_1 r}{2 k_1 r} \right] + \frac{5}{8} \frac{B_1}{r^2} J^2 + \frac{3}{4} \frac{B_1}{r} J \cdot \frac{dJ}{dr}. \quad [3.22]$$

3.2. - *Ricerca delle frequenze proprie.*

Consideriamo ancora la condizione al contorno:

$$T_{rr} = 0 \quad \text{per} \quad r = R$$

che diventa, considerando anche i termini al secondo ordine:

$$\begin{aligned} & l \left\{ \lambda \left(u' + \frac{2n}{r} \right) + 2\mu u' \right\} + k^2 \left\{ \lambda \left(\frac{3}{2} u'^2 + \frac{2uu'}{r} + \frac{u^2}{r^2} \right) + \right. \\ & \left. + 3\mu u'^2 + l \left(u' + \frac{2n}{r} \right)^2 + 2m \left(u'^2 - \frac{u^2}{r^2} \right) + n \frac{u'}{r^2} \right\} = 0 \end{aligned}$$

dove:

$$u(r, t) = u_0(r) e^{i\omega_1 t} + kw_0(r) e^{i2\omega_1 t}$$

Se ricordiamo la formula [3.21] e l'espressione di $u_0(r)$, la condizione al contorno al II ordine diventa:

$$\begin{aligned} \frac{ig \, 2k_1 R}{2k_1 R} &= \frac{1}{1 - \left(\frac{\lambda + 2\mu}{4\mu} \right) (2k_1 R)^2} \left[1 + \right. \\ & \left. + \psi(\lambda, \mu, l, m, n) \frac{\pi A^2}{D} \frac{J^2}{R \cos 2k_1 R} \right] \end{aligned} \quad [3.23]$$

ove:

$$\psi(\lambda, \mu, l, m, n) = \frac{2l - 2m + n}{4\mu} - \frac{3\lambda(\lambda + 2l)(\lambda + 6\mu)}{8\mu(\lambda + 2\mu)^2}. \quad [3.24]$$

Se le oscillazioni libere sono tali che la deformazione supera un certo valore, oltre il quale è rilevabile il comportamento non lineare, la relazione precedente ci permette di ricavare informazioni sui coefficienti di non linearità l , m ed n , oltre che sulla costante del moto D . È in questo senso che deve venire interpretata la condizione al contorno relativa alle frequenze dei modi liberi in seconda approssimazione poiché la teoria ci dice già che tali frequenze devono essere doppie di quelle relative alla prima approssimazione.

4. - DETERMINAZIONE DEI COEFFICIENTI DI NON-LINEARITÀ.

Per la determinazione di tutti e tre i parametri, sono necessarie almeno tre relazioni indipendenti. Infatti, mentre nel caso lineare le misure della frequenza e dell'ampiezza dello spostamento è sufficiente a definire il comportamento dinamico del sistema, questo non è possibile in seconda approssimazione. Un metodo da seguire per eliminare tale indeterminazione sarà quello di trovare le relazioni che discendono dall'interazione dell'armonica fondamentale con se stessa e da quella di due altre armoniche separatamente.

Vediamo, mediante un'analisi semi-quantitativa, se è possibile determinare, e sotto quali condizioni sperimentali, i tre coefficienti incogniti mediante le relazioni trovate.

A questo scopo, occorre fare l'ipotesi ragionevole che la costante adimensionale k sia indipendente dalla frequenza.

Consideriamo le espressioni:

$$k [D_i f_2(\lambda, \mu, \varrho, R, k_i) + f_3(\lambda, \mu, l, \varrho, R, k_i)] = k e_i(\lambda, \mu, l, \varrho, R, k_i) = A_i$$

$$\frac{tg 2 k_i R}{2 k_i R} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\lambda + 2\mu}{4\mu}\right) (2 k_i R)^2} \left[1 + \right. \\ \left. + \psi(\lambda, \mu, l, m, n) \frac{\pi A_i^2}{D_i} \frac{J^2_{3/2}(k_i R)}{R \cos 2 k_i R} \right] \quad [4.1]$$

$$3\lambda + 6\mu + 2l + 4m = 0 \quad , \quad i = 0, 1, 2 (*)$$

dove:

$$f_2 = \frac{\sin 2 k_i R}{(2 k_i R)^2} - \frac{\cos 2 k_i R}{2 k_i R}$$

$$f_3 = \frac{5}{8} \frac{B_1}{R^2} J^2_{3/2}(k_i R) + \frac{3}{4} \frac{B_1}{R} J_{3/2}(k_i R) \cdot \left[\frac{dJ_{3/2}}{dr}(k_i r) \right]_{r=R},$$

(*) Gli indici 0, 1, 2 si riferiscono rispettivamente alle armoniche: fondamentale, prima e seconda.

mentre D_i è la costante del moto incognita della soluzione [3.22]. Dall'analisi spettrale delle oscillazioni libere si possono misurare le frequenze dell'armonica fondamentale e della prima e seconda armonica.

Le misure delle rispettive ampiezze A_{0i} degli spostamenti al primo ordine ci permettono di calcolare, tramite le relazioni:

$$A_{0i} = A_i f_i(\lambda, \mu, \varrho, R, k_i) ; \quad f_i = \left(\frac{\sin k_i R}{(k_i R)^2} - \frac{\cos k_i R}{k_i R} \right) \quad [4.2]$$

le tre costanti A_0 , A_1 e A_2 .

Misurando per le stesse armoniche le ampiezze degli spostamenti al secondo ordine A_0 , A_1 e A_2 si possono ottenere i rapporti:

$$E_1 = \frac{A_0}{A_1}$$

$$E_2 = \frac{A_0}{A_2}$$

dai quali, essendo noti i valori di λ , μ , ϱ , R , k_0 , k_1 e k_2 si possono ricavare le seguenti relazioni:

$$D_0 = D_0(D_2, l)$$

$$D_1 = D_1(D_2, l) . \quad [4.3]$$

Dalle condizioni al contorno [4.2] possiamo ottenere tre espressioni del tipo:

$$\phi_i(D_2, l, m, n) = 0 \quad i = 0, 1, 2 \quad [4.4]$$

che, con la relazione lineare:

$$3\lambda + 6\mu + 2l + 4m = 0$$

determinano un sistema di quattro equazioni nelle quattro incognite:

$$D_2, l, m, n .$$

La soluzione di questo sistema ci permette poi di risalire alle costanti D_0 , D_1 e quindi alla costante adimensionale k che gode della seguente proprietà:

$$\frac{1}{k} = \frac{A_0}{C_0} = \frac{A_1}{C_1} = \frac{A_2}{C_2}.$$

Riassumendo si vede che l'estensione dello studio delle oscillazioni libere alla seconda approssimazione richiede la introduzione di maggiori dati sperimentali che in prima approssimazione.

La misura delle frequenze e delle ampiezze degli spostamenti al primo ordine ci permette di calcolare le costanti A_i ($i = 0, 1, 2$) mentre la misura delle ampiezze degli spostamenti al secondo ordine permette di ricavare, tramite le relazioni scritte sopra, le costanti del moto k , D_i ed elastiche l , m ed n .

Naturalmente, le difficoltà sperimentali sono notevoli poiché la misura degli spostamenti al secondo ordine richiede una eccezionale accuratezza nelle misure. Prendendo in considerazione, come suggerito, l'armonica fondamentale e la prima e la seconda armonica:

$${}_0S_0, {}_1S_0, {}_2S_0$$

di periodi rispettivamente di 20.47 min., 10.06 min. e 6.60 min. data la limitatezza della deformazione per la Terra, che implica un'ampiezza dello spostamento molto piccola, probabilmente solo l'interazione dell'armonica fondamentale con se stessa potrà essere messa in evidenza a causa del rumore di fondo.

Il fatto che le ampiezze degli spostamenti al secondo ordine siano difficilmente distinguibili dal rumore di fondo, pone delle notevoli limitazioni sperimentali per la determinazione dei coefficienti di non-linearità.

Questo lavoro serve a descrivere gli aspetti fondamentali dei modelli non lineari nel campo dell'elasticità. Una teoria più completa potrà facilmente tenere conto, oltre che di uno stress iniziale di tipo idrostatico, anche della variazione del campo gravitazionale con la deformazione. Il non tenere conto di questi fattori, nella teoria lineare, non cambia la struttura formale delle soluzioni, e probabilmente questo vale anche in seconda approssimazione. Comunque, queste perturbazioni non alterano le caratteristiche fondamentali del sistema in seconda approssimazione.

Per quanto riguarda l'aspetto matematico della teoria e più precisamente la soluzione di equazioni differenziali non lineari alle derivate parziali, si è visto che, adottando il metodo delle approssimazioni successive è sempre possibile ridursi al caso di equazioni differenziali non omogenee alle derivate totali. La difficoltà principale consiste nel trovare gli integrali particolari. Noi abbiamo affrontato il problema ponendoci in un caso particolare, cioè assumendo a priori una relazione lineare fra i coefficienti elastici al secondo ordine senza ridurre significativamente il campo della loro variabilità e quindi la possibilità di una effettiva applicazione al modello elastico della Terra. Una teoria più completa potrà contemplare anche la possibilità di risolvere tali equazioni in un modo meno restrittivo eventualmente mediante metodi numerici, coi quali però si perderebbe parte della capacità di comprensione diretta fisica del fenomeno, che il metodo qui seguito ci ha permesso.

BIBLIOGRAFIA

- (1) CALOI P., *Sulle oscillazioni libere della terra e del suo guscio esterno*, Acc. Naz. Lincei, Serie VIII, XXXII, 4, (1962).
- (2) BOZZI-ZADRO M., CAPUTO M., *Spectral, Bispectral Analysis and Q of the free oscillations of the Earth*, « Suppl. Nuovo Cimento », Serie I, 6, pag. 67-81, (1968).
- (3) CAPUTO M., *Elasticità e dissipazione*, Zanichelli, Bologna (1969).
- (4) CAPUTO M., ROSSI-TESE F., *Lo spettro delle oscillazioni libere della Terra*, « Suppl. Nuovo Cimento », Serie I, 6, pag. 857-865, (1968).
- (5) MURNAGHAN F. D., *Finite deformation of an elastic solid*, John Wiley & Sons, Inc., New York, (1951).