

## Studio preliminare sulle oscillazioni libere del Lago di Sauris a due diverse quote (\*)

G. ROMUALDI - M. C. SPADEA

Ricevuto il 30 Maggio 1966

**RIASSUNTO.** — In questa prima parte, viene applicato al Lago di Sauris il metodo di Hidaka — opportunamente esteso — allo scopo di studiarne le oscillazioni libere.

La ricerca è stata particolarmente interessante per i due seguenti motivi:

1. - Si tratta di un bacino artificiale formato dallo sbarramento del torrente Lumiei (Diga del Lumiei alta 130 m).

2. - Si è potuto studiare il Lago a due diverse quote (980 m, invaso pieno — e 939 m, quota alleggerimento), fatto che è pressoché impossibile riscontrare in un lago naturale.

Sono stati così determinati i periodi, la posizione dei nodi e le ampiezze corrispondenti alla sessa uni- e bi-nodale alle due diverse quote.

Nella seconda parte, di prossima pubblicazione, lo studio sarà esteso al confronto fra i dati qui ottenuti per via teorica e quelli ottenuti per via sperimentale mediante registrazioni limnografiche.

**SUMMARY.** — In the first stage concerning the free oscillations of the Sauris' Lake, we limited ourselves to the periods, knots and amplitudes determination of the uni and bi-nodal seiche, making use of the Hidaka's method. The investigation is particularly interesting due to two particular reasons:

1. - It is an artificial reservoir, formed barring the Lumiei torrent. (Lumiei Dam, high 130 m).

2. - The Lake has been studied at two different altitudes (whole basin, 980 m- and 939 m), matter which in a natural lake is almost impossible to find.

In the second part, the research will be extended to the comparison of the theoretical results here achieved with the experimental results obtained by limnographic records.

---

(\*) Questo lavoro è stato compiuto con contributi del C.N.R.

## PARTE I

## PREMESSA.

L'accordo fra teoria (applicazione di vari metodi matematici di Chrystal, Defant, Hidaka, Goldberg, alcuni dei quali opportunamente estesi) e osservazione (registrazioni ottenute con limnografi nello studio delle oscillazioni libere di laghi naturali, golfi, etc...) è stato più volte confermato, come risulta dai numerosi lavori già pubblicati.

Il lavoro è stato diviso in due parti. Nella prima, che concerne questa nota, il lago artificiale di Sauris viene studiato dal punto di vista teorico; nella seconda parte - di prossima pubblicazione - lo scopo sarà quello di dimostrare che l'accordo sopra menzionato viene rispettato, anche nel caso di laghi artificiali quale è quello del Lumiei, formatosi quest'ultimo dopo la costruzione della diga sul torrente omonimo, uno dei tanti affluenti del Tagliamento.

1. - La diga del Lumiei è sita in località Maina di Sauris (Carnia) a 1000 m. di altezza s.m., del tipo ad arco-cupola (arco a doppia curvatura); essa è alta 136 m, con uno spessore di 16 m alla base e di 3,5 m al coronamento (sezione maestra), ed ha creato un serbatoio della capacità utile di 70 milioni di m<sup>3</sup>.

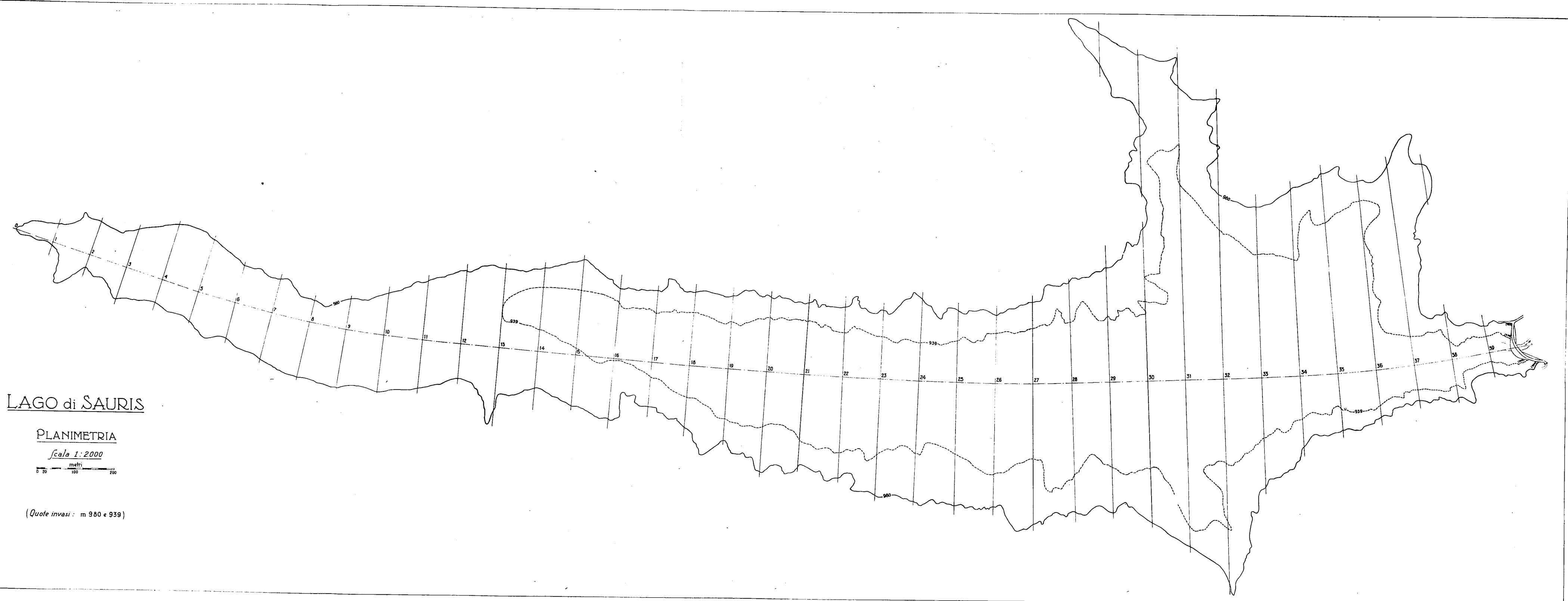
Il lago di Sauris dopo un'ansa piuttosto larga a monte della diga, si restringe notevolmente assumendo una forma molto allungata. La profondità massima si ha appunto in corrispondenza di questa ansa, ed essa decresce rapidamente in concomitanza al diminuire della larghezza, tanto da essere minima all'estremo opposto.

Nel caso specifico vanno sottolineati tre aspetti del lago:

- a) è un bacino artificiale;
- b) di forma irregolare (vedi curva normale: Figg. 1-2);
- c) è soggetto a forti variazioni di livello.

Quest'ultima caratteristica ci ha permesso di studiare il lago di Sauris in due diverse situazioni di invaso: a invaso pieno (m. 980) e ad una quota di alleggerimento (m. 939), quasi si trattasse di due laghi diversi, tali risultando dal punto di vista morfometrico.

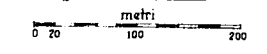
A nostro avviso il punto c) è il più significativo, dato che non è possibile usufruire in natura di un lago che, in epoche diverse, presenti differenze di quota di oltre 40 metri.



LAGO di SAURIS

PLANIMETRIA

scala 1:2000



(Quote invasi : m 980 e 939)

Fig. 1

La prima parte di questa nota si riferisce appunto allo studio delle oscillazioni libere del lago di Sauris a invaso pieno e a quota di alleggerimento (41 metri sotto il livello normale).

Va ancora messo in evidenza che la batimetria del lago è perfettamente conosciuta, a causa del rigoroso rilevamento topografico cui il bacino è stato sottoposto prima della costruzione della diga; ciò che ovviamente non avviene per i laghi naturali la cui batimetria è sovente inesatta, in ogni caso ottenuta con un troppo limitato numero di sondaggi, ripetuti soltanto a lunghi intervalli di tempo.

#### LAGO DI SAURIS A QUOTA 980.

2. - I principali elementi morfometrici del lago di Sauris a bacino pieno sono:

|                    |                           |
|--------------------|---------------------------|
| altezza            | m. 980 s.m.               |
| superficie         | km <sup>2</sup> 1.765.122 |
| profondità massima | m 140 .                   |

3. - Dato il particolare tipo di lago, abbiamo ritenuto opportuno applicare il metodo di Hidaka (<sup>2</sup>), il più idoneo per laghi irregolari, la cui curva normale risulti complicata (Fig. 2).

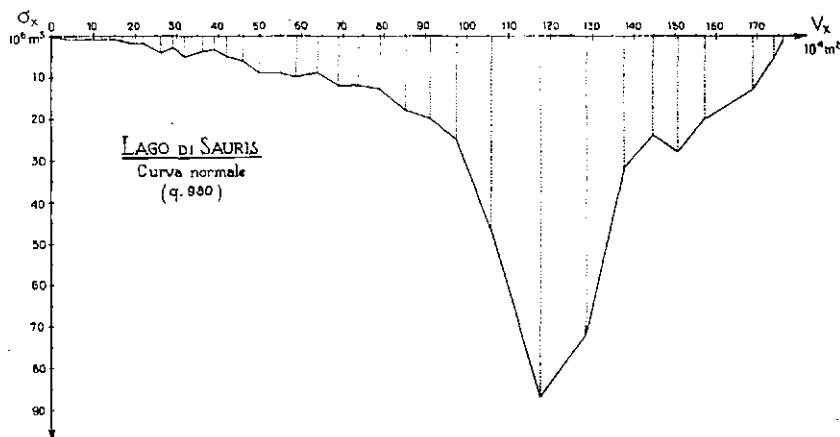


Fig. 2

Nel caso in esame per ottenere i dati necessari alla determinazione di detta curva ci siamo serviti di una carta batimetrica del lago 1 : 2000 (disegno fornito a suo tempo dalla SADE).

L'estensione del metodo (3), non solo consente di determinare i periodi delle oscillazioni libere, ma anche la posizione delle linee nodali, nonché l'ampiezza degli spostamenti verticali nelle singole sezioni trasversali, tracciate perpendicolarmente alla linea di valle dall'estremo 0 alla diga; dette sezioni distano una dall'altra 100 m (Fig. 3). Tutti i dati numerici necessari all'applicazione del metodo sono riportati nella Tabella I.

4. - *Metodo di Hidaka*. Senza soffermarsi sulla teoria, già più volte ampiamente esposta e opportunamente ampliata (2), richiamiamo solo le formule fondamentali, necessarie a fornire i dati numerici per il nostro lavoro.

Detto  $\xi$  lo spostamento orizzontale delle particelle liquide di una stessa sezione trasversale  $S(x)$  e posto  $u = \xi \cdot S(x)$ ;  $v = \int_0^x b(x) dx$ , dove  $b(x)$  rappresenta la larghezza variabile del bacino misurata alla superficie libera, l'equazione sul moto libero dei laghi (equazione di Chrystal) (4) assume la forma:

$$\sigma(v) \frac{d^2 u}{dv^2} + \frac{4\pi^2}{gT^2} u = 0. \quad [1]$$

In essa, valgono le condizioni ai limiti  $u(0) = u(a) = 0$  ( $a$  = superficie totale del lago).

Nella [1]  $\sigma(v) = S(x) \cdot b(x)$  rappresenta la *curva normale* del lago (con  $\sigma(v)$  che si annulla agli estremi in modo che sia  $\sigma(0) = \sigma(a) = 0$ ) nella quale i valori di  $\sigma(v)$  sono riportati in ordinata e quelli dell' $\int b(x) dx$  in ascissa.

Posto  $z = \frac{v}{a}$  la [1] diviene:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{\lambda}{\sigma(z)} u = 0, \quad [2]$$

con le condizioni ai limiti

$$u(0) = u(1) = 0 \quad [3]$$

e

$$\lambda = \frac{4\pi^2 a^2}{g T^2}. \quad [4]$$

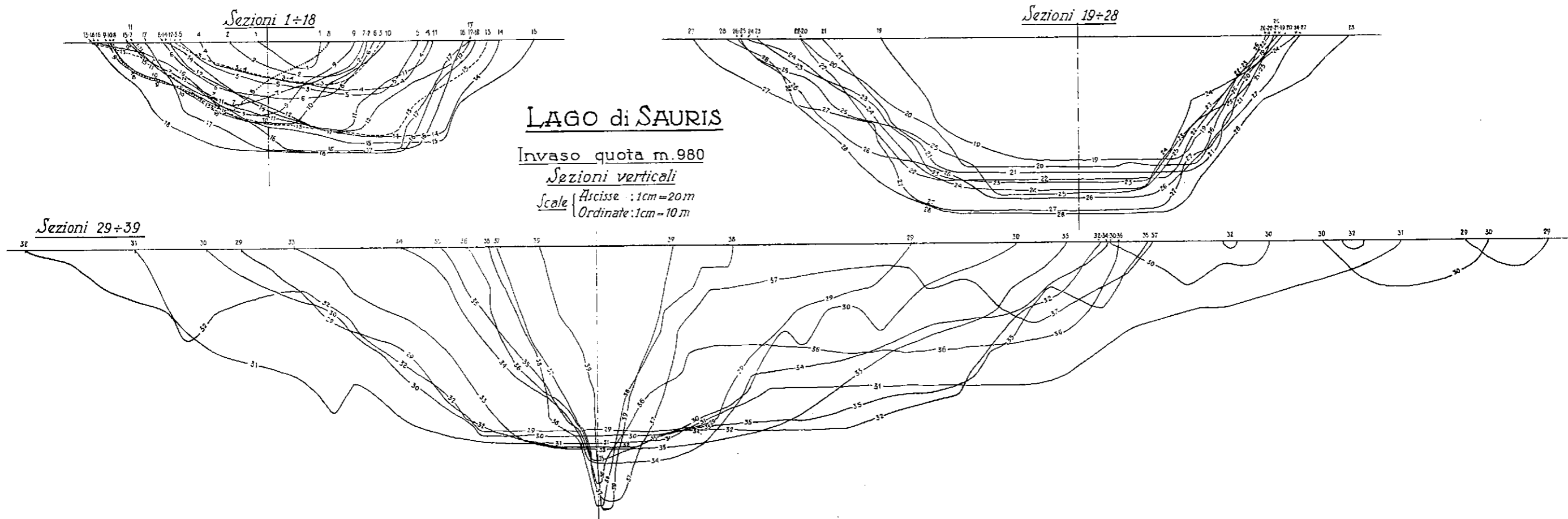


Fig. 3

Hidaka integrando la [2] con le condizioni [3], ha provato che questo equivale alla ricerca del valore minimo dell'integrale:

$$I(u) = \int_0^1 \left\{ \left( \frac{du}{dz} \right)^2 - \frac{\lambda}{\sigma(z)} u^2 \right\} dz . \quad [5]$$

Posto

$$u = \sum_0^m A_i z (1-z)^i \quad \text{con } A_i = \text{cost.} , \quad [6]$$

e sostituendo la [6] nella [4], determiniamo le  $m+1$  costanti  $A_0, A_1, \dots, A_m$  in modo che la [5] diventi un minimo, il che presuppone l'annullamento dei rapporti delle derivate  $\frac{\partial I}{\partial A_i}$ .

Con opportuni calcoli si ottiene un sistema di  $m+1$  equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{1}{3} - I_0 \lambda \right) A_0 + \left( \frac{1}{6} - I_1 \lambda \right) A_1 + \left( \frac{1}{10} - I_2 \lambda \right) A_2 + \dots = 0 \\ \left( \frac{1}{6} - I_1 \lambda \right) A_0 + \left( \frac{2}{15} - I_2 \lambda \right) A_1 + \left( \frac{1}{10} - I_3 \lambda \right) A_2 + \dots = 0 \\ \left( \frac{1}{10} - I_2 \lambda \right) A_0 + \left( \frac{1}{10} - I_3 \lambda \right) A_1 + \left( \frac{3}{35} - I_4 \lambda \right) A_2 + \dots = 0 . \end{array} \right. \quad [7]$$

Eliminando le  $A_i$  costanti, si annulla il determinante dei coefficienti di  $A_0, A_1, A_2, \dots$ , la cui soluzione dà l'equazione dei periodi. In questa equazione si ha:

$$I_n = \int_0^1 \frac{z^2 (1-z)^2 z^n}{\sigma(z)} dz . \quad [8]$$

Poiché la soluzione diviene tanto più difficoltosa quanto maggiore è il valore di  $m$ , Hidaka fornisce le soluzioni per  $m=1$  ed  $m=2$ , soluzioni più che sufficienti per il nostro problema.

Per  $m=1$ , dalla [6] risulta  $u = z(1-z)(A_0 + A_1 z)$ , l'equazione del periodo della sessa uninodale si ottiene annullando il determinante formato dai coefficienti di  $A_0$  e  $A_1$  nelle prime due equazioni della [7]:

$$\begin{vmatrix} \left( \frac{1}{3} - I_0 \lambda \right) & \left( \frac{1}{6} - I_1 \lambda \right) \\ \left( \frac{1}{6} - I_1 \lambda \right) & \left( \frac{2}{15} - I_2 \lambda \right) \end{vmatrix} = 0 ,$$

sviluppando il quale si ha:

$$\left(I_0 I_2 - I_1^2\right) \lambda^2 - \left(\frac{2}{15} I_0 - \frac{1}{3} I_1 + \frac{1}{3} I_2\right) \lambda - \frac{1}{60} = 0. \quad [9]$$

Sostituendo ad  $I_0, I_1, I_2$  i valori numerici ricavati dalla Tabella I, si ha un'equazione di 2° in  $\lambda$  le cui radici sono:

$$\lambda_1 = 0,00952 \quad , \quad \lambda_2 = 0,06171.$$

Ricordando la [4], dove  $T_1 = \frac{2 \pi a}{\sqrt{g_1 \lambda_1}}$  e  $T_2 = \frac{2 \pi a}{\sqrt{g_1 \lambda_2}}$ , siamo finalmente arrivati alla determinazione dei periodi della sessa uni e bi-nodale:

$$T_1 = 6^m 03^s \quad T_2 = 2^m 22^s. \quad [10]$$

Per  $m = 2$ , sempre dalla [6], si ha

$$u = z(1 - z)(A_0 + A_1 z + A_2 z^2).$$

L'equazione dei periodi si ottiene sviluppando e annullando il determinante formato dai coefficienti di  $A_0, A_1, A_2$ , nelle prime tre equazioni del sistema [7]:

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{1}{3} - I_0 \lambda\right) & \left(\frac{1}{6} - I_1 \lambda\right) & \left(\frac{1}{10} - I_2 \lambda\right) \\ \left(\frac{1}{6} - I_1 \lambda\right) & \left(\frac{2}{15} - I_2 \lambda\right) & \left(\frac{1}{10} - I_3 \lambda\right) \\ \left(\frac{1}{10} - I_2 \lambda\right) & \left(\frac{1}{10} - I_3 \lambda\right) & \left(\frac{3}{35} - I_4 \lambda\right) \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} & \left(I_0 I_2 I_4 - I_0 I_3^2 - I_1^2 I_4 + 2 I_1 I_2 I_3 - I_2^3\right) \lambda^3 - \left[\frac{3}{35} \left(I_0 I_2 - I_1^2\right) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{5} \left(I_1 I_2 + I_1 I_3 - I_0 I_3\right) + \frac{2}{15} I_0 I_4 + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{3} \left(I_2 I_3 + I_2 I_4 - I_1 I_4 - I_3^2\right)\right] \lambda^2 + \\ & + \left(\frac{1}{700} I_0 - \frac{3}{350} I_1 + \frac{53}{2100} I_2 - \frac{1}{30} I_3 + \frac{1}{60} I_4\right) \lambda - \frac{1}{10500} = 0. \end{aligned} \quad [11]$$



| Sezioni | $\Delta x$<br>10 <sup>2</sup> m | $b(x)$<br>10 <sup>2</sup> m | $S(x)$<br>10 <sup>3</sup> m <sup>2</sup> | $v(x)$<br>10 <sup>4</sup> m <sup>2</sup> | $V(x)$<br>10 <sup>4</sup> m <sup>2</sup> | $\sigma(x) =$<br>$= S(x) \cdot b(x)$<br>10 <sup>5</sup> m <sup>3</sup> | $z = \frac{V}{a}$ | $\Delta z$ | $\frac{M}{\sigma(z)} =$<br>$\frac{z^2(1-z)^2}{10^{-10}m^{-3}} \Delta z$ | $Mz$<br>10 <sup>-10</sup> m <sup>-3</sup> | $Mz^2$<br>10 <sup>-10</sup> m <sup>-3</sup> | $Mz^3$<br>10 <sup>-10</sup> m <sup>-3</sup> | $Mz^4$<br>10 <sup>-10</sup> m <sup>-3</sup> |
|---------|---------------------------------|-----------------------------|--|--|--|--|-------------------|------------|---|---|---|---|---|
| 0       | 0                               | 0                           | 0  | 0  | 0  | 0  | 0                 | 0          | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |
| 1       | 1                               | 0,58                        | 0,494                                    | 0,4116                                   | 0,4116                                   | 0,2865   | 0.00233           | 0.00233    | 0.00439   | 0.00001                                   | 0   | 0   | 0   |
| 2       | 2                               | 1,29                        | 1,579                                    | 1,2188                                   | 1,6304                                   | 2,0369   | 0.00924           | 0.00691    | 0.02850   | 0.00026                                   | 0.000003                                    | 0   | 0   |
| 3       | 3                               | 1,93                        | 2,590                                    | 1,4552                                   | 3,0856                                   | 4,9987   | 0.01748           | 0.00824    | 0.04863   | 0.00085                                   | 0.000015                                    | 0   | 0   |
| 4       | 4                               | 2,14                        | 3,600                                    | 1,1948                                   | 4,2804                                   | 7,7040   | 0.02425           | 0.00677    | 0.04921   | 0.00119                                   | 0.00003                                     | 0.000001                                    | 0   |
| 5       | 5                               | 2,24                        | 3,951                                    | 1,6220                                   | 5,9024                                   | 8,8502   | 0.03344           | 0.00919    | 0.10851   | 0.00363                                   | 0.00012                                     | 0.000004                                    | 0   |
| 6       | 6                               | 1,98                        | 3,889                                    | 2,1968                                   | 8,0992                                   | 7,7002   | 0.04588           | 0.01244    | 0.30954   | 0.01420                                   | 0.00065                                     | 0.000030                                    | 0.000001                                    |
| 7       | 7                               | 2,06                        | 4,189                                    | 2,0700                                   | 10,1692                                  | 8,6293   | 0.05761           | 0.01173    | 0.40073   | 0.02309                                   | 0.00133                                     | 0.000077                                    | 0.000004                                    |
| 8       | 8                               | 2,04                        | 3,731                                    | 2,1702                                   | 12,3394                                  | 7,6112   | 0.06991           | 0.01230    | 0.68326   | 0.04777                                   | 0.00334                                     | 0.000233                                    | 0.000016                                    |
| 9       | 9                               | 2,34                        | 4,970                                    | 2,1068                                   | 14,4462                                  | 11,6298  | 0.08184           | 0.01193    | 0.57917   | 0.04740                                   | 0.00388                                     | 0.000318                                    | 0.000026                                    |
| 10      | 10                              | 2,60                        | 6,1245                                   | 2,3746                                   | 16,8208                                  | 15,9237  | 0.09530           | 0.01346    | 0.62830   | 0.05988                                   | 0.00570                                     | 0.000543                                    | 0.000052                                    |
| 11      | 11                              | 2,81                        | 7,3475                                   | 2,7040                                   | 19,5248                                  | 20,6465  | 0.11061           | 0.01531    | 0.71765   | 0.07938                                   | 0.00878                                     | 0.000971                                    | 0.000107                                    |
| 12      | 12                              | 2,79                        | 7,144                                    | 2,8152                                   | 22,3400                                  | 19,9318  | 0.12656           | 0.01595    | 0.97788   | 0.12376                                   | 0.01567                                     | 0.001983                                    | 0.000251                                    |
| 13      | 13                              | 3,70                        | 10,174                                   | 3,3008                                   | 25,6408                                  | 37,6438  | 0.14526           | 0.01870    | 0.76581   | 0.11124                                   | 0.01616                                     | 0.002347                                    | 0.000341                                    |
| 14      | 14                              | 3,14                        | 9,9005                                   | 3,2406                                   | 28,8814                                  | 31,0876  | 0.16362           | 0.01836    | 1.10600   | 0.18096                                   | 0.02961                                     | 0.004845                                    | 0.000793                                    |
| 15      | 15                              | 3,82                        | 12,188                                   | 3,4400                                   | 32,3214                                  | 46,5582  | 0.18311           | 0.01949    | 0.93661   | 0.17150                                   | 0.03140                                     | 0.005750                                    | 0.001053                                    |
| 16      | 16                              | 3,44                        | 11,098                                   | 3,6336                                   | 35,9550                                  | 38,1771  | 0.20370           | 0.02059    | 1.41903   | 0.28906                                   | 0.05888                                     | 0.011994                                    | 0.002443                                    |
| 17      | 17                              | 3,06                        | 11,540                                   | 3,0140                                   | 38,9690                                  | 35,3124  | 0.22077           | 0.01707    | 1.43062   | 0.31584                                   | 0.06973                                     | 0.015394                                    | 0.003399                                    |
| 18      | 18                              | 3,56                        | 14,038                                   | 3,2580                                   | 42,2270                                  | 49,9753  | 0.23923           | 0.01846    | 1.22354   | 0.29271                                   | 0.07002                                     | 0.016751                                    | 0.004007                                    |
| 19      | 19                              | 3,77                        | 16,880                                   | 3,9504                                   | 46,1774                                  | 63,6376  | 0.26161           | 0.02238    | 1.77721   | 0.46494                                   | 0.12163                                     | 0.031820                                    | 0.008324                                    |
| 20      | 20                              | 4,57                        | 20,204                                   | 4,1708                                   | 50,3482                                  | 92,3323  | 0.28524           | 0,02363    | 1.06377   | 0.30343                                   | 0.08655                                     | 0.024688                                    | 0.007042                                    |
| 21      | 21                              | 4,30                        | 21,684                                   | 4,4256                                   | 54,7738                                  | 93,2412  | 0.31031           | 0.02507    | 1.23152   | 0.38215                                   | 0.11858                                     | 0.036797                                    | 0.011418                                    |
| 22      | 22                              | 4,46                        | 22,845                                   | 4,3920                                   | 59,1658                                  | 101,8887   | 0.33519           | 0.02488    | 1.21254   | 0.40643                                   | 0.13623                                     | 0.045663                                    | 0.015306                                    |
| 23      | 23                              | 3,84                        | 24,262                                   | 4,6104                                   | 63,7762                                  | 93,1661  | 0.36131           | 0.02612    | 1.48459   | 0.53640                                   | 0.19380                                     | 0.070022                                    | 0.025300                                    |
| 24      | 24                              | 5,26                        | 23,110                                   | 5,0448                                   | 68,8210                                  | 121,5586   | 0.38989           | 0.02858    | 1.33036   | 0.51869                                   | 0.20223                                     | 0.078847                                    | 0.030742                                    |
| 25      | 25                              | 5,08                        | 24,116                                   | 5,0974                                   | 73,9184                                  | 122,5093   | 0.41877           | 0.02888    | 1.39662   | 0.58486                                   | 0.24493                                     | 0.102569                                    | 0.042953                                    |
| 26      | 26                              | 5,02                        | 27,182                                   | 5,1072                                   | 79,0256                                  | 136,4536   | 0.44771           | 0.02894    | 1.29668   | 0.58054                                   | 0.25991                                     | 0.116364                                    | 0.052097                                    |
| 27      | 27                              | 5,80                        | 31,322                                   | 5,7994                                   | 84,8250                                  | 181,6676   | 0.48056           | 0.03285    | 1.12676   | 0.54148                                   | 0.26021                                     | 0.125047                                    | 0.060093                                    |
| 28      | 28                              | 5,97                        | 33,627                                   | 6,0688                                   | 90,8938                                  | 200,7532   | 0.51494           | 0.03438    | 1.06843   | 0.55018                                   | 0.28330                                     | 0.145882                                    | 0.075120                                    |
| 29      | 29                              | 7,20                        | 34,639                                   | 6,6464                                   | 97,5402                                  | 249,4008   | 0.55260           | 0.03766    | 0.92300   | 0.51005                                   | 0.28186                                     | 0.155756                                    | 0.086071                                    |
| 30      | 30                              | 10,79                       | 43,489                                   | 8,3460                                   | 105,8862                                 | 469,2463   | 0.59988           | 0.04728    | 0.58049   | 0.34822                                   | 0.20890                                     | 0.125315                                    | 0.075174                                    |
| 31      | 31                              | 12,02                       | 72,418                                   | 11,8180                                  | 117,7042                                 | 870,4644   | 0.66683           | 0.06695    | 0.37962   | 0.25314                                   | 0.16880                                     | 0.112561                                    | 0.075059                                    |
| 32      | 32                              | 12,52                       | 57,4925                                  | 11,5948                                  | 129,2990                                 | 719,8061   | 0.73252           | 0.06569    | 0.35038   | 0.25666                                   | 0.18801                                     | 0.137721                                    | 0.100883                                    |
| 33      | 33                              | 7,32                        | 43,220                                   | 8,6968                                   | 137,9958                                 | 316,3704   | 0.78179           | 0.04927    | 0.45327   | 0.35436                                   | 0.27704                                     | 0.216587                                    | 0.169326                                    |
| 34      | 34                              | 6,72                        | 35,739                                   | 6,9064                                   | 144,9022                                 | 240,1661   | 0.82092           | 0.03913    | 0.35212   | 0.28906                                   | 0.23730                                     | 0.194804                                    | 0.159918                                    |
| 35      | 35                              | 6,72                        | 41,437                                   | 6,0654                                   | 150,9676                                 | 278,4566   | 0.85528           | 0.03436    | 0.18902   | 0.16166                                   | 0.13827                                     | 0.118260                                    | 0.101145                                    |
| 36      | 36                              | 6,20                        | 31,8665                                  | 6,5688                                   | 157,5364                                 | 197,5723   | 0.89250           | 0.03722    | 0.17347   | 0.15482                                   | 0.13818                                     | 0.123326                                    | 0.110068                                    |
| 37      | 37                              | 6,24                        | 20,983                                   | 11,2454                                  | 168,7818                                 | 130,9339   | 0.95620           | 0.06370    | 0.08538   | 0.08164                                   | 0.07806                                     | 0.074641                                    | 0.071372                                    |
| 38      | 38                              | 3,73                        | 12,378                                   | 4,9428                                   | 173,7246                                 | 46,1699  | 0.98421           | 0.02801    | 0.01468   | 0.01445                                   | 0.01422                                     | 0.013995                                    | 0.013774                                    |
| 39      | 39                              | 1,26                        | 6,876                                    | 1,8552                                   | 175,5798                                 | 8,6638   | 0.99472           | 0.01051    | 0.00360   | 0.00358                                   | 0.00356                                     | 0.003541                                    | 0.003522                                    |
| 40      | 39,7                            | 0                           | 0  | 0,9324                                   | 176,5122                                 | 0  | 1.00000           | 0.00528    | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |
|         |                                 |                             |  |  |  |  |                   |            | 27.91089  | 9.05947                                   | 3.95689                                     | 2.11545                                     | 1.30720                                     |
|         |                                 |                             |  |  |  |  |                   |            | I <sub>0</sub>  | I <sub>1</sub>                            | I <sub>2</sub>                              | I <sub>3</sub>                              | I <sub>4</sub>                              |

Dalla Tabella I, sostituiti ad  $I_0, I_1, I_2, I_3, I_4$  i loro valori numerici

$$\begin{aligned} I_0 &= 27,91089 ; & I_1 &= 9,05947 ; & I_2 &= 3,95690 ; \\ I_3 &= 2,11544 ; & I_4 &= 1,30720 , \end{aligned}$$

abbiamo un'equazione di 3° in  $\lambda$ :

$$188972 \lambda^3 - 34583 \lambda^2 + 1337 \lambda - 9,52381 = 0 . \quad [12]$$

Mediante l'applicazione del metodo di Newton per successive approssimazioni otteniamo la prima radice corretta di  $\lambda$  ( ${}_2\lambda_1 = 0,00920$ ): dividendo poi la [12] per la radice trovata si ha un'equazione di 2° in  $\lambda$ , risolvendo la quale abbiamo i valori di  ${}_2\lambda_2$  e  ${}_2\lambda_3$ :

$${}_2\lambda_1 = 0,00920 , \quad {}_2\lambda_2 = 0,04134 , \quad {}_2\lambda_3 = 0,13247 .$$

Sostituendo nella [4] rispettivamente le tre radici trovate, si ricavano i periodi corrispondenti alla sessa uni-bi e tri-nodale:

$$T_1 = 6^m 09^s \quad T_2 = 2^m 54^s \quad T_3 = 1^m 37^s . \quad [13]$$

5. - *Nodi*. Per la determinazione dei nodi ci rifacciamo alla [6] limitandoci al caso  $m = 2$ .

Per  $m = 2$ ,

$$u = A_0 z (1 - z) \left( 1 + \frac{A_1}{A_0} z + \frac{A_2}{A_0} z^2 \right) ,$$

da cui derivando rispetto a  $z$  e ricordando che nei nodi

$$\frac{du}{dz} = 0 \quad [14]$$

otteniamo

$$\frac{du}{dz} = 4 \frac{A_2}{A_0} z^3 + 3 \left( \frac{A_1}{A_0} - \frac{A_2}{A_0} \right) z^2 + 2 \left( 1 - \frac{A_1}{A_0} \right) z - 1 = 0 . \quad [15]$$

Per risolvere la [15], ci serviamo ancora una volta della [7], ricavando — da una qualunque coppia di equazioni del sistema — i valori numerici dei rapporti  $\frac{A_1}{A_0}$  e  $\frac{A_2}{A_0}$ ;

$$\frac{A_1}{A_0} = -1,56949 \quad \frac{A_2}{A_0} = +0,85246 .$$

Sostituiti questi valori nella [15], otteniamo un'equazione di 3° in  $z$ , che risolveremo ricorrendo al metodo di Newton e rammentando la condizione ai limiti  $0 < z < 1$ :

$$3,40984 z^3 - 7,26585 z^2 + 5,13398 z - 1 = 0 . \quad [16]$$

Risolvendo la [16], vediamo che l'unica radice possibile, delle tre ottenute, è

$$z_1 = 0,31223 ,$$

la quale rappresenta il valore dell'uninodo.

L'uninodo cade quindi fra le sezioni 21 e 22 a ca km 2,14 dall'estremo 0 del lago (v. Tab. I, Fig. 1).

Sostituendo nella [15] ai rapporti  $\frac{A_1}{A_0}$  e  $\frac{A_2}{A_0}$  i valori numerici ottenuti e servendoci del valore della radice  $z_1$ , dalla [7] si ha:

$$16,25872 z^3 - 27,76689 z^2 + 12,38190 z - 1 = 0 . \quad [17]$$

Le radici utili, comprese cioè fra 0 ed 1 sono:

$$z_1 = 0,10320 , \quad z_2 = 0,58381 .$$

I due nodi, quindi, cadono rispettivamente fra le sezioni 10 e 11 ad una distanza di km 1,05 dall'estremo 0 del lago, e fra le sezioni 29 e 30 a circa 1 km dalla diga (Tab. I e Fig. 1).

6. - *Ampiezze.* Per determinare le ampiezze, la formula

$$\eta = - \frac{du}{dz} a \quad (a = \text{superficie totale del lago})$$

in particolare per il caso  $m = 2$ , si può scrivere:

$$\zeta = \frac{\eta}{a A_0} = - \left\{ 4 \frac{A_2}{A_0} z^3 + 3 \left( \frac{A_1}{A_0} - \frac{A_2}{A_0} \right) z^2 + 2 \left( 1 - \frac{A_1}{A_0} \right) z - 1 \right\} . [19]$$

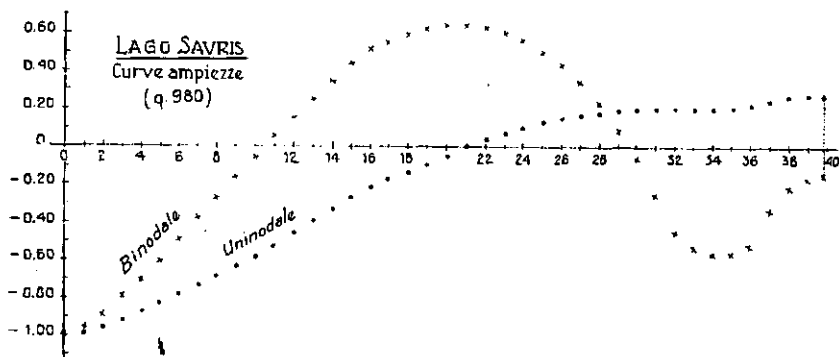


Fig. 4

T a b e l l a I I

| Sezioni | $\Delta x$<br>10 <sup>2</sup> m | $\xi'$    | $\xi''$   |
|---------|---------------------------------|-----------|-----------|
| 0       | 0                               | — 1       | — 1       |
| 1       | 1                               | — 0,98807 | — 0,97130 |
| 2       | 2                               | — 0,95317 | — 0,88807 |
| 3       | 3                               | — 0,91840 | — 0,79209 |
| 4       | 4                               | — 0,87962 | — 0,71589 |
| 5       | 5                               | — 0,83618 | — 0,61645 |
| 6       | 6                               | — 0,77915 | — 0,48867 |
| 7       | 7                               | — 0,72741 | — 0,37576 |
| 8       | 8                               | — 0,67509 | — 0,26460 |
| 9       | 9                               | — 0,62624 | — 0,16380 |
| 10      | 10                              | — 0,57328 | — 0,05807 |
| 11      | 11                              | — 0,51583 | — 0,05197 |
| 12      | 12                              | — 0,45910 | + 0,15518 |
| 13      | 13                              | — 0,39637 | + 0,26254 |
| 14      | 14                              | — 0,33874 | + 0,35382 |
| 15      | 15                              | — 0,28168 | + 0,43606 |
| 16      | 16                              | — 0,22583 | + 0,50756 |
| 17      | 17                              | — 0,18292 | + 0,55513 |
| 18      | 18                              | — 0,13974 | + 0,59562 |
| 19      | 19                              | — 0,09181 | — 0,62997 |
| 20      | 20                              | — 0,04618 | + 0,65002 |
| 21      | 21                              | — 0,00306 | + 0,65437 |
| 22      | 22                              | + 0,03462 | + 0,64297 |
| 23      | 23                              | + 0,06911 | + 0,61585 |
| 24      | 24                              | + 0,10125 | + 0,57035 |
| 25      | 25                              | + 0,12826 | + 0,50973 |
| 26      | 26                              | + 0,15040 | + 0,43694 |
| 27      | 27                              | + 0,17004 | + 0,34217 |
| 28      | 28                              | + 0,18524 | + 0,23325 |
| 29      | 29                              | + 0,19643 | + 0,10667 |
| 30      | 30                              | + 0,20417 | — 0,05472 |
| 31      | 31                              | + 0,20706 | — 0,26929 |
| 32      | 32                              | + 0,20591 | — 0,43875 |
| 33      | 33                              | + 0,20603 | — 0,52217 |
| 34      | 34                              | + 0,20857 | — 0,55308 |
| 35      | 35                              | + 0,21362 | — 0,54943 |
| 36      | 36                              | + 0,22301 | — 0,50833 |
| 37      | 37                              | + 0,25171 | — 0,33369 |
| 38      | 38                              | + 0,27049 | — 0,20990 |
| 39      | 39                              | + 0,27863 | — 0,15540 |
| 40      | 39,7                            | + 0,28297 | — 0,12627 |

Riprendiamo i valori  ${}_2\lambda_1$  e  ${}_2\lambda_2$ , corrispondenti alla sessa uni e binodale, rispettivamente, la [19] diviene:

$$\begin{aligned}\zeta^{\text{v}} &= 3,40984 z^3 - 7,26585 z^2 + 5,13898 z - 1 \\ \zeta^{\text{vi}} &= 16,25872 z^3 - 27,76689 z^2 + 12,38190 z - 1.\end{aligned}\quad [20]$$

Servendoci ora dei valori numerici di  $z$  dati dalla Tabella I e sostituendoli nella [20], si ha l'andamento delle ampiezze per le due sesse considerate. La Fig. 4 dà una rappresentazione grafica di detto andamento, mentre i risultati del calcolo sono contenuti nella Tabella II.

#### LAGO DI SAURIS A QUOTA 939.

7. — La possibilità di eseguire registrazioni nei periodi di svaso di un lago artificiale, ci ha permesso di studiare il lago di Sauris a q. 939 (quota di alleggerimento della diga), applicando lo stesso metodo usato per il lago ad invaso pieno, allo scopo di determinarne i periodi, i nodi e le ampiezze della sessa uni- e binodale.

Va premesso che la diminuzione del livello del bacino, e quindi della superficie libera del lago, lascia al di fuori dell'acqua tutta la zona compresa precedentemente fra le sezioni 0...13 (Fig. 1). La sezione 0 del lago a quota 939, coincide pertanto con la sezione 13 del lago a quota 980.

Il grafico in Fig. 5 rappresenta la curva normale, quello in Fig. 6 l'andamento delle sezioni verticali alla quota in esame.

I dati che caratterizzano la forma del lago sono contenuti nella Tabella III, dalla quale si traggono anche i valori numerici per l'applicazione del metodo di Hidaka:

$$\begin{aligned}I_0 &= 80,50657 & I_1 &= 28,62169 & I_2 &= 13,60640 & I_3 &= 7,81607 \\ & & I_4 &= 5,12866 , & & & & \end{aligned}\quad [21]$$

valori necessari al calcolo dei periodi, dei nodi e delle ampiezze.

8. — *Periodi.* Trascurando il caso  $m = 0$ , per  $m = 1$  l'equazione di 2° grado in  $\lambda$  risulta:

$$276,203456 \lambda^2 - 5,729090 \lambda + 0,016667 = 0 ,$$

le cui radici sono:

$${}_1\lambda_1 = 0,00350 \qquad {}_1\lambda_2 = 0,01724 . \quad [22]$$

T a b e l l a I I I

| Sezioni | $\Delta x$<br>$10^2\text{m}$ | $b(x)$<br>$10^2\text{m}$ | $S(x)$<br>$10^3\text{m}^2$ | $v(x)$<br>$10^4\text{m}^2$ | $V(x)$<br>$10^4\text{m}^2$ | $\sigma(x) =$<br>$= S(x) \cdot b(x)$<br>$10^5\text{m}^3$ | $z = \frac{V}{a}$ | $\Delta z$ | $\frac{M =}{\sigma(z)}$<br>$\frac{z^2(1-z)^2}{10^{-10}\text{m}^{-3}} \Delta z$ | $Mz$<br>$10^{-10}\text{m}^{-3}$ | $Mz^2$<br>$10^{-10}\text{m}^{-3}$ | $Mz^3$<br>$10^{-10}\text{m}^{-3}$ | $Mz^4$<br>$10^{-10}\text{m}^{-3}$ |
|---------|------------------------------|--------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|--|-------------------|------------|--|---------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 0 = 13  | 0                            | 0                        | 0                          | 0                          | 0                          | 0  | 0                 | 0          | 0  | 0                               | 0                                 | 0                                 | 0                                 |
| 1 = 14  | 1                            | 1,11                     | 0,4385                     | 0,760                      | 0,760                      | 0,487  | 0,00882           | 0,00882    | 0,14465  | 0,00128                         | 0,00001                           | 0                                 | 0                                 |
| 2 = 15  | 2                            | 1,50                     | 0,833                      | 1,320                      | 2,080                      | 1,2495   | 0,02415           | 0,01533    | 0,67452  | 0,01629                         | 0,00039                           | 0,00001                           | 0                                 |
| 3 = 16  | 3                            | 1,50                     | 1,395                      | 1,690                      | 3,770                      | 2,0925   | 0,04377           | 0,01962    | 1,65004  | 0,07222                         | 0,00317                           | 0,00014                           | 0,00001                           |
| 4 = 17  | 4                            | 1,68                     | 1,467                      | 1,540                      | 5,310                      | 2,465  | 0,06165           | 0,01788    | 2,42989  | 0,14980                         | 0,00923                           | 0,00057                           | 0,00003                           |
| 5 = 18  | 5                            | 2,20                     | 2,079                      | 1,970                      | 7,280                      | 4,574  | 0,08452           | 0,02287    | 2,98911  | 0,25264                         | 0,02134                           | 0,00180                           | 0,00015                           |
| 6 = 19  | 6                            | 2,64                     | 3,537                      | 2,320                      | 9,600                      | 9,338  | 0,11146           | 0,02694    | 2,83139  | 0,31559                         | 0,03517                           | 0,00392                           | 0,00044                           |
| 7 = 20  | 7                            | 2,83                     | 4,986                      | 2,720                      | 12,320                     | 14,110   | 0,14304           | 0,03158    | 3,36327  | 0,48108                         | 0,06881                           | 0,00984                           | 0,00141                           |
| 8 = 21  | 8                            | 3,10                     | 6,366                      | 2,840                      | 15,160                     | 19,735   | 0,17601           | 0,03297    | 3,51460  | 0,61860                         | 0,10888                           | 0,01916                           | 0,00337                           |
| 9 = 22  | 9                            | 3,14                     | 7,169                      | 3,181                      | 18,341                     | 22,511   | 0,21294           | 0,03693    | 4,60886  | 0,98141                         | 0,20897                           | 0,04450                           | 0,00947                           |
| 10 = 23 | 10                           | 3,11                     | 6,476                      | 3,172                      | 21,513                     | 20,140   | 0,24977           | 0,03683    | 6,41947  | 1,60339                         | 0,40045                           | 0,10002                           | 0,02498                           |
| 11 = 24 | 11                           | 2,89                     | 7,303                      | 2,841                      | 24,354                     | 21,106   | 0,28275           | 0,03298    | 6,42780  | 1,81746                         | 0,51390                           | 0,14531                           | 0,04109                           |
| 12 = 25 | 12                           | 2,92                     | 6,708                      | 2,750                      | 27,104                     | 19,587   | 0,31468           | 0,03193    | 7,58337  | 2,38633                         | 0,75091                           | 0,23630                           | 0,07436                           |
| 13 = 26 | 13                           | 3,66                     | 9,242                      | 3,330                      | 30,434                     | 33,826   | 0,35334           | 0,03866    | 5,96524  | 2,10776                         | 0,74476                           | 0,26315                           | 0,09298                           |
| 14 = 27 | 14                           | 3,40                     | 11,562                     | 3,481                      | 33,915                     | 39,311   | 0,39375           | 0,04041    | 5,85541  | 2,30557                         | 0,90782                           | 0,35746                           | 0,14075                           |
| 15 = 28 | 15                           | 4,00                     | 13,479                     | 4,180                      | 38,095                     | 53,916   | 0,44228           | 0,04853    | 5,47418  | 2,42112                         | 1,07080                           | 0,47359                           | 0,20946                           |
| 16 = 29 | 16                           | 3,90                     | 12,825                     | 3,905                      | 42,000                     | 50,0175  | 0,48762           | 0,04534    | 5,65843  | 2,75916                         | 1,34540                           | 0,65604                           | 0,31990                           |
| 17 = 30 | 17                           | 4,33                     | 14,654                     | 4,129                      | 46,129                     | 63,452   | 0,53556           | 0,04794    | 4,67415  | 2,50329                         | 1,34064                           | 0,71799                           | 0,38452                           |
| 18 = 31 | 18                           | 9,86                     | 27,981                     | 7,062                      | 53,191                     | 275,893  | 0,61755           | 0,08199    | 1,65620  | 1,02279                         | 0,63162                           | 0,39006                           | 0,24088                           |
| 19 = 32 | 19                           | 6,20                     | 23,326                     | 7,979                      | 61,170                     | 144,621  | 0,71018           | 0,09263    | 2,71406  | 1,92747                         | 1,36886                           | 0,97214                           | 0,69040                           |
| 20 = 33 | 20                           | 4,78                     | 17,893                     | 5,520                      | 66,690                     | 85,5285  | 0,77427           | 0,06409    | 2,28801  | 1,77154                         | 1,37164                           | 1,06202                           | 0,82228                           |
| 21 = 34 | 21                           | 4,10                     | 12,791                     | 4,476                      | 71,166                     | 52,443   | 0,82624           | 0,05197    | 2,04242  | 1,68753                         | 1,39430                           | 1,15202                           | 0,95185                           |
| 22 = 35 | 22                           | 4,86                     | 17,324                     | 4,646                      | 75,812                     | 84,195   | 0,88018           | 0,05394    | 0,71201  | 0,62670                         | 0,55161                           | 0,48551                           | 0,42734                           |
| 23 = 36 | 23                           | 5,32                     | 8,459                      | 5,163                      | 80,975                     | 45,002   | 0,94012           | 0,05994    | 0,41958  | 0,39446                         | 0,37084                           | 0,34863                           | 0,32776                           |
| 24 = 37 | 24                           | 1,40                     | 5,983                      | 2,353                      | 83,328                     | 8,376  | 0,96744           | 0,02732    | 0,32238  | 0,31188                         | 0,30173                           | 0,29190                           | 0,28240                           |
| 25 = 38 | 25                           | 1,14                     | 4,755                      | 1,481                      | 84,809                     | 5,421  | 0,98463           | 0,01719    | 0,07220  | 0,07109                         | 0,07000                           | 0,06892                           | 0,06786                           |
| 26 = 39 | 26                           | 0,68                     | 2,724                      | 0,825                      | 85,634                     | 1,852  | 0,99421           | 0,00958    | 0,01533  | 0,01524                         | 0,01515                           | 0,01507                           | 0,01497                           |
| 27 = 40 | 26,70                        | 0                        | 0                          | 0,500                      | 86,134                     | 0  | 1                 | 0,00579    | 0  | 0                               | 0                                 | 0                                 | 0                                 |
|         |                              |                          |                            |                            |                            |  |                   |            | 80,50657   | 28,62169                        | 13,60640                          | 7,81607                           | 5,12866                           |
|         |                              |                          |                            |                            |                            |  |                   |            | $I_0$  | $I_1$                           | $I_2$                             | $I_3$                             | $I_4$                             |

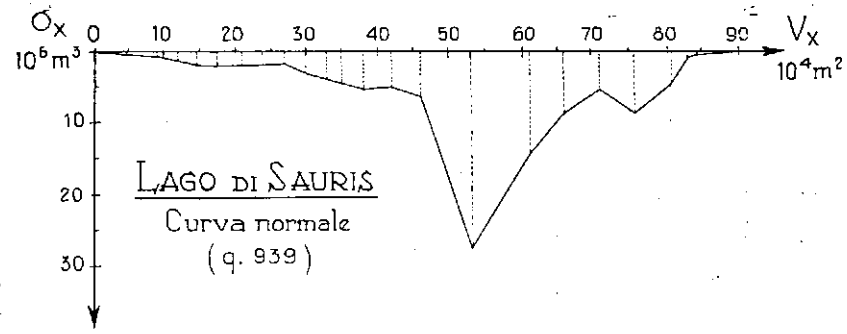


Fig. 5  
->

Sezioni verticali 13-59

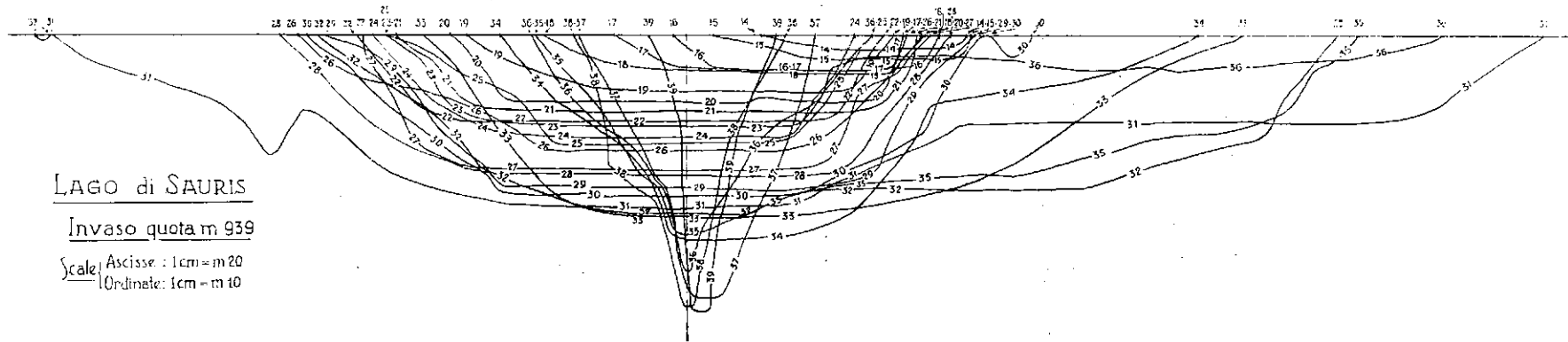


Fig. 6

Sostituendo nella [4], i valori della [22], si hanno i periodi corrispondenti rispettivamente alla sessa uni- e bi-nodale:

$$T_1 = 4^m 52^s \quad T_2 = 2^m 12^s . \quad [23]$$

Per  $m = 2$ , si ha la seguente equazione di 3° grado in  $\lambda$ :

$$67,073756 \lambda^3 - 3,212071 \lambda^2 + 0,038071 \lambda - 0,0000952381 = 0 ,$$

risolvendo la quale si hanno le tre radici:

$${}_2\lambda_1 = 0,003416 , \quad {}_2\lambda_2 = 0,013361 , \quad {}_2\lambda_3 = 0,031111 . \quad [24]$$

Introdotti i valori della [24] nella [4], si ottengono i valori dei periodi per la sessa uni- bi- e trinodale del lago:

$$\begin{aligned} T_1 &= 4^m 56^s && \text{(uninodale)} \\ T_2 &= 2^m 29^s && \text{(binodale)} \\ T_3 &= 1^m 38^s && \text{(trinodale)} . \end{aligned} \quad [25]$$

9. - *Nodi*. Nel caso  $m = 2$ , sostituendo nell'equazione dei nodi [15] il valore  ${}_2\lambda_1 = 0,003416$ , si ha un'equazione di 3° grado in  $z$ :

$$3,02960 z^3 - 6,57654 z^2 + 4,86956 z - 1 = 0 . \quad [26]$$

L'unica radice possibile ( $0 < z < 1$ ) è quella minore dell'unità:

$${}_2z_1 = 0,33021 . \quad [27]$$

che rappresenta il valore corrispondente all'uninodo; questo viene dunque a trovarsi fra le sezioni 25-26 e dista 1,24 km circa dall'estremo 0 del lago (v. Fig. 1, Tabella III).

Sostituendo poi nella [15] la radice  ${}_2\lambda_2 = 0,013361$ , si ha:

$$14,11492 z^3 - 24,92157 z^2 + 11,55692 z - 1 = 0 , \quad [28]$$

le cui soluzioni valide sono:

$${}_2z_1 = 0,11175 \quad {}_2z_2 = 0,60362 . \quad [29]$$

I due binodi cadono, pertanto, fra le sezioni 19-20 e 30-31 e distano rispettivamente circa 0,6 km dall'estremo 0 del lago, e circa 0,9 km dalla diga (v. Fig. 1. Tabella III).



10. - *Ampiezze.* Per  $m = 2$ , le equazioni delle ampiezze relative alle oscillazioni dell'uninodale e della binodale sono [6], [7]:

$$\zeta' = 3,02960 z^3 - 6,57654 z^2 + 4,86956 z - 1$$

$$\zeta'' = 14,11492 z^3 - 24,92157 z^2 + 11,55691 z - 1.$$

Sostituendo nella [30] i valori numerici di  $z$  dati dalla Tab. III, si ottengono le ampiezze delle oscillazioni in corrispondenza delle varie

T a b e l l a I V

| Sezioni | $\Delta x$<br>10 <sup>2</sup> m | $\zeta'$  | $\zeta''$ |
|---------|---------------------------------|-----------|-----------|
| 0 = 13  | 0                               | - 1       | - 1       |
| 1 = 14  | 1                               | - 0,95758 | - 0,90005 |
| 2 = 15  | 2                               | - 0,88617 | - 0,73515 |
| 3 = 16  | 3                               | - 0,79925 | - 0,54087 |
| 4 = 17  | 4                               | - 0,72408 | - 0,37897 |
| 5 = 18  | 5                               | - 0,63356 | - 0,19268 |
| 6 = 19  | 6                               | - 0,53474 | - 0,00192 |
| 7 = 20  | 7                               | - 0,42914 | + 0,18456 |
| 8 = 21  | 8                               | - 0,33014 | + 0,33899 |
| 9 = 22  | 9                               | - 0,23202 | + 0,46720 |
| 10 = 23 | 10                              | - 0,14677 | + 0,55187 |
| 11 = 24 | 11                              | - 0,08042 | + 0,59438 |
| 12 = 25 | 12                              | - 0,02446 | + 0,60882 |
| 13 = 26 | 13                              | - 0,03317 | + 0,59467 |
| 14 = 27 | 14                              | + 0,08269 | + 0,54842 |
| 15 = 28 | 15                              | + 0,12936 | + 0,45756 |
| 16 = 29 | 16                              | + 0,16204 | + 0,34627 |
| 17 = 30 | 17                              | + 0,18704 | + 0,20961 |
| 18 = 31 | 18                              | + 0,21264 | - 0,04301 |
| 19 = 32 | 19                              | + 0,22649 | - 0,30613 |
| 20 = 33 | 20                              | + 0,23403 | - 0,44033 |
| 21 = 34 | 21                              | + 0,24267 | - 0,50290 |
| 22 = 35 | 22                              | + 0,25696 | - 0,51025 |
| 23 = 38 | 23                              | + 0,28275 | - 0,43331 |
| 24 = 37 | 24                              | + 0,29897 | - 0,36042 |
| 25 = 38 | 25                              | + 0,31081 | - 0,30807 |
| 26 = 39 | 26                              | + 0,31807 | - 0,27256 |
| 27 = 40 | 26,7                            | + 0,32262 | - 0,24973 |

sezioni del lago; i valori ottenuti — riportati nella Tabella IV — ci hanno permesso di costruire graficamente le curve delle ampiezze (Fig. 7).

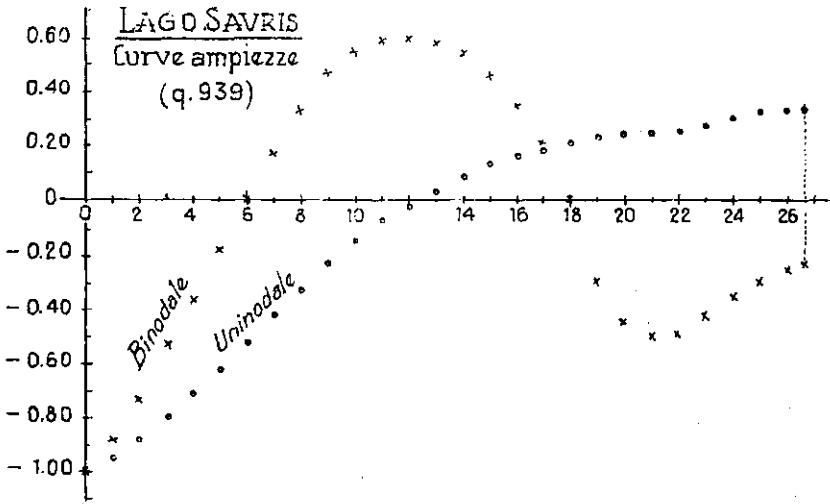


Fig. 7

#### CONCLUSIONI.

In questa prima parte del lavoro sulle oscillazioni libere di un lago artificiale, quale è il lago di Sauris, ci siamo limitati a determinare i periodi della sessa uni e bi-nodale nei casi  $m = 1$  ed  $m = 2$ , la posizione dei nodi e l'andamento delle ampiezze, alle quote 980 (invaso pieno) e 939 (quota alloggiamento diga).

Dai valori numerici si sono potuti ricavare i grafici relativi.

La seconda parte, che è in fase di compimento, sarà dedicata al confronto fra i dati ottenuti per via teorica e quelli ottenuti per via sperimentale.

*Ringraziamo il Prof. P. Caloi per l'assistenza e per i preziosi consigli fornitici, i quali ci hanno permesso di portare a termine questa prima parte dello studio del lago di Sauris.*

BIBLIOGRAFIA

- (1) CHRYSTAL G., *On the hydrodynamical Theory of Seiches*. Transactions of the Royal Society of Edinburg. XLI (1905), XLV (1906), XLVI (1907-8).
  - (2) HIDAKA K., *Application of Ritz's Variation to the Determination of Seiches in a Lake*. The Memoirs of the Imperial Marine Observatory, VI, 2, (1960).
  - (3) CALOI P., *Le sesse del Lago di Garda*. Parte I, « Annali di Geofisica », I, 1, (1948).
  - (4) CALOI P., *Le sesse del Lago di Garda*. Parte II, « Annali di Geofisica », I, 2, (1948).
-