Il teorema del viriale e l'equilibrio di un sistema autogravitante isolato

P. E. Valle

Ricevuto il 2 Luglio 1960

Riassunto. — Si stabilisce il teorema del viriale per i sistemi continui. Mediante questo teorema, si cerca di ottenere qualche informazione sull'equilibrio di un sistema *autogravitante isolato*.

La teoria, avanzata da alcuni Geologi, secondo la quale la Terra avrebbe aumentato notevolmente le sue dimensioni, nel corso delle ere geologiche, non è in contrasto con le conclusioni cui si perviene.

Summary. — The *viriale* theorem for continuous systems, is here established. The A., through this theorem, tries to achieve some information about the equilibrium of the insulated autograviting system.

According to the theory of some Geologists, the Earth — during the geologic Eras — may be increased *remarkably its own dimensions*.

The results attained in this paper are not clashing with above mentioned theory.

Premessa.

Sembra che la nozione di viriale, che ha il vantaggio di implicare globalmente le forze esterne ed interne agenti su un sistema, sia destinata ad avere una funzione prevalentemente in meccanica statistica.

Questa nota costituisce un tentativo di richiamare l'attenzione sul fatto che questa grandezza può essere utilmente introdotta in altre questioni, in particolare in talune questioni che riguardano la geofisica.

Il teorema del viriale per i sistemi continui.

Si consideri un sistema *continuo riferito*, per semplicità, ad una terna assoluta O,x_1, x_2, x_3.

Sia C la sua configurazione attuale, c una parte qualunque di C, Σ la superficie che costituisce il contorno di C e σ la superficie che costituisce il contorno di c.

Il momento d'inerzia polare lagrangiano di c, rispetto al polo O, è definito dalla relazione

$$I_o = \int_c \varrho\, O P \times O P\, d C$$

dove ϱ è la densità di massa nell'intorno del generico punto P di c.

Un sistema continuo si dirà in equilibrio se, almeno in media, il valore di I_o non varia nel tempo. È questa una ovvia estensione della nozione di equilibrio.

Dalla precedente si ottiene subito

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I_o}{d t^2} = 2\, T + \int_c \varrho\, O P \times \boldsymbol{a}\, d C$$

dove T è l'energia cinetica di c ed $\boldsymbol{a}$ l'accelerazione.

Se con $\boldsymbol{F}$ si indica il campo delle forze di massa e con Φ_{ij} il tensore dello sforzo, risulta notoriamente

$$\varrho\, \boldsymbol{a} = \varrho\, \boldsymbol{F} - \sum_1^3{}_i \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_i}{\partial x_i}$$

Si ha pertanto

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I_o}{d t^2} = 2\, T + \int_c \left(\sum_1^3{}_i x_i F_i \right) \varrho\, d C -$$

$$- \int_c \left(\sum_1^3{}_i \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_i}{\partial x_i} \times O P \right) d C$$

Ora si può scrivere

$$\sum_1^3{}_i \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_i}{\partial x_i} \times O P = \sum_1^3{}_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\boldsymbol{\Phi}_i \times O P) - I_1$$

dove I_1 è l'invariante lineare del tensore dello sforzo, ossia

$$I_1 = \sum_1^3{}_i \Phi_{ii}$$

D'altra parte se $\boldsymbol{n}$ è la normale interna a σ e Q un suo generico punto, con qualche passaggio, si ha

$$\int_c \left[\sum_1^3{}_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\boldsymbol{\Phi}_i \times O P) \right] d C = - \int_\sigma O Q \times \boldsymbol{\Phi}_n\, d \sigma$$

Ove si introduca il viriale delle forze di massa

$$V = \int_C \left(\sum_1^3 {}_i \, x_i \, F_i \right) \varrho \, d\, C$$

risulta in definitiva

$$\frac{1}{2} \, \frac{d^2 I_0}{d\, t^2} = 2\, T + V + \int_C I_1 \, dC + \int_\sigma O\, Q \times \Phi_n \, d\, \sigma$$

Sebbene questa relazione sia suscettibile di notevoli applicazioni, qui verrà mostrato soltanto come sia possibile ottenere da essa qualche informazione sull'equilibrio di un sistema autogravitante isolato.

Il viriale delle forze di massa per un sistema autogravitante isolato.

Siano ϱdC e $\varrho' \, d\, C'$ due masse elementari, poste rispettivamente nei punti P e P' di un sistema continuo e soggette a mutua azione gravitazionale. Il viriale di tale azione, calcolato rispetto al polo O, sarà

$$d V = \gamma \, \frac{\varrho \, \varrho' \, d\, C \, d\, C'}{r^3} \quad (P' \, P \times O \, P' + P \, P' \times O \, P)$$

dove si è posto $r = \overline{PP'}$ e con γ si è indicata la costante di gravitazione universale.

Ora

$$P'P \times OP' + PP' \times OP = - r^2$$

consegue

$$d\, V = - \gamma \, \frac{\varrho \varrho' \, dC \, dC'}{r}$$

Se con U si indica il potenziale, si ha quindi

$$V = - \frac{\gamma}{2} \int_C U \varrho \, d\, C$$

la quale mostra che il viriale delle forze di massa di un sistema autogravitante isolato, coincide con l'energia gravitazionale E del sistema stesso.

Il teorema del viriale per un sistema autogravitante isolato.

Tenuto conto di quanto si è esposto nei paragrafi precedenti, dato che il sistema si suppone isolato e quindi si deve porre $\boldsymbol{\phi}_n = 0$ su Σ, risulta subito

$$\frac{1}{2}\,\frac{d^2 I_o}{d t^2} = 2\,T + E + \int_C I_1\, d\,C$$

La relazione

$$\frac{1}{2}\,\frac{d\, I_o}{d\, t} = \int_C \varrho\, O\, P \times \mathbf{v}\, d\, C$$

mostra che un caso interessante di equilibrio si verifica se è nulla la componente radiale, rispetto al polo O, della velocità di ogni punto.

Comunque, se il sistema è in equilibrio, si ha necessariamente

$$0 = 2\,T + E + \int_C I_1\, d\,C$$

Conviene introdurre il valor medio di I_1 in C e scrivere

$$0 = 2\,T + E + \bar{I}_1\, C$$

la quale rappresenta una condizione necessaria per l'equilibrio di un sistema continuo autogravitante isolato.

Se l'equilibrio del sistema è di tipo idrostatico, il valor medio di I_1 coincide col triplo del valor medio della pressione.

La condizione stabilita pone in evidenza, tra l'altro, il ruolo essenziale del valor medio dell'invariante lineare del tensore dello sforzo, nel caso di equilibrio di tipo non idrostatico, e del valor medio della pressione, nel caso di equilibrio idrostatico.

Se in un certo istante essa non fosse più soddisfatta, si verificherebbe un fenomeno assai simile ad un'esplosione oppure ad un collasso.

Si osservi però che la condizione in questione non è sufficiente per assicurare l'equilibrio. Si potrebbe verificare una variazione uniforme di I_o, con conseguente possibile aumento o diminuzione delle dimensioni del sistema.

A prescindere dalle cause di una simile eventualità, è interessante tuttavia rilevare che la teoria, avanzata da alcuni geologi, secondo la quale la Terra avrebbe aumentato notevolmente le sue dimensioni, nel corso delle ere geologiche, non è in contrasto con queste considerazioni.