Ancora qualche considerazione sul problema inverso della geoelettrica

A. Belluigi

Ricevuto il 31 Ottobre 1966

Riassunto. — L'A. mostra l'indirizzo seguito nell'interpretazione dei rilevamenti geoelettrici, a corrente stazionaria, avvalendosi delle soluzioni del « problema inverso » geoelettrico.

Si completa il metodo dato nel 1959 ed esposto (7) in « Zeitschrift für Geophysik » - Heft 3 - (113-142).

Summary. — The problem of deducing from electrical potentials observed at the surface (horizontally uniform Earth) the unknown variation of the conductivity with depth is developed, and the anisotropic case is discussed.

Zusammenfassung. — Der V. behandelt das « umgekehrte gesel. Problem » und folgt dem von Langer gegebenen strengen analytischen Ansatz; entwickelt der V. einen neuen Algorithmüs, u.s.v.w.

Da Langer a Slichter a Tikhonov, all'A. (1), come ricorda esplicitamente A. L. Chetev (richiamando i motivi delle trattazioni, Acc. Sc. URSS), il terreno elettricamente conduttore, convogliante corrente stazionaria (elettrotellurica artificiale o naturale), viene assunto quale un semispazio infinito, uniforme, piano-orizzontale, con conduttività geoelettrica dipendente solo dalla profondità $\sigma(z)$, a partire naturalmente dalla superficie piana del suolo.

Basta considerare inoltre, applicato in superficie, un elettrodo puntiforme, un reoforo che immetta ad es. c.c. (corrente continua).

Anche la non infrequente elettroanisotropia potrà considerarsi variabile solo con la profondità, a conduttività, in ogni piano orizzontale, indipendente dalla direzione. Si avranno sempre condizioni simmetriche rispetto all'asse verticale passante per l'elettrodo superficiale cilindrico verticale o simmetrico-verticale (sferico, emisferico, ellissoidico, conico).

I geopotenziali elettrici, rilevabili con linee equipotenziali o di corrente, alla superficie del terreno, su vaste aree intorno all'elettrodo d'energizzazione, dovrebbero permettere (finalità della prospezione) di risalire da questi valori di misurazione all'incognita funzione di conduttività $\sigma(z)$, e ciò costituisce il cosidetto « problema inverso geoelettrico ».

A questo problema, com'è stato più volte autorevolmente rilevato, è stata rivolta sempre scarsa attenzione, mentre per il problema inverso — epperò diretto — abbondano notoriamente studi, procedimenti risolutivi, interpretativi, spesso grossolani e a carattere del tutto empirico (2):

Comunque il cosidetto problema inverso geoelettrico consiste nel determinare la « $\sigma(z)$ » esistente nel mezzo terroso, supposto note: $\sigma_o = \sigma(o)$, e la distribuzione $V(r)$ del geopotenziale sulla superficie, in funzione della distanza « r » dall'elettrodo di potenza, grandezze tutte accertabili con alta precisione.

Il punto più rigoroso di partenza è dato, com'è noto, dalla trattazione del Langer (1), condotta a più riprese nel « Bulletin of American Mathematical Society ».

Il problema cosidetto inverso (di per sé diretto), di dedurre cioé dai potenziali elettrici rilevati alla superficie del suolo, l'incognite conduttività elettriche, variabili con la profondità del terreno, si riduce ad un problema di valore al contorno, di tipo non comune, in quanto la funzione da trovare esprime la variazione incognita da un punto all'altro di costante fisica del materiale (la conduttività), mentre la funzione stessa si considera nota ai limiti.

Il problema poi inverso a questo, detto impropriamente diretto, a cui si è più abituati, assumendo invece nota (per tentativi) la precedente incognita funzione conduttività, e risolvente la questione relativa al campo potenziale in superficie prericostruibile, è più semplice, porta a soluzioni con valori di confronto rispetto a quelli determinati ad es. dalle misure potenziometriche, modificando o adattando i presupposti se il confronto fallisce fino ad ottenere una sufficiente concordanza. Procedimento perciò per tentativi, essenzialmente empirico per le irreali schematizzazioni, nonostante il grande successo incontrato in pratica, più che altro propagandistico, oggi in declino.

Denotiamo ora con $K(\lambda)$ la funzione «nucleo»:

$$K(\lambda) = \frac{2\pi\sigma_0}{c}\lambda\int_0^\infty V(r)\,J_0(\lambda r)\,r dr \quad (c \text{ intensità di corrente}),$$

per cui note σ_0, $V(r)$, $K(\lambda)$ si può considerare una funzione nota di λ.

Assumendo un elettrodo di raggio a, invece che puntiforme, si dovrà moltiplicare tale funzione $K(\lambda)$ per il rapporto:

$$(\lambda a/\text{sen}\,\lambda a)\ .$$

Come già è apparso nel lavoro del Langer e nel nostro: « Berechnung der elektrischen Leitfähigkeit u.s.v. » [1], il problema si può affrontare nei seguenti termini.

Consideriamo l'equazione differenziale:

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}\frac{dZ}{dz} - \lambda^2 Z = 0 \qquad [1]$$

la quale ammette una soluzione (determinata a meno di un fattore costante): $Z(z, \lambda)$, che si annulla per $z \to \infty$. Questa soluzione verrà in seguito indicata con $Z_1(z,\lambda)$, là ove ci sarà bisogno di distinguerla da un'altra linearmente indipendente come $Z_2(z,\lambda)$.

Si dovrà avere cioé per Z_1:

$$Z_1\,(\infty, \lambda) = 0\ . \qquad [1']$$

Mediante tale $Z\,(z, \lambda)$, la funzione $K\,(\lambda)$ potrà essere espressa da:

$$K(\lambda) = -\lambda Z\,(0,\lambda)/Z'(0,\lambda) \qquad [2]$$

dove l'apice indica la derivazione prima rispetto alla variabile z.

Potendo convenire di normalizzare le Z (nelle Z è disponibile ancora un fattore), si pone la condizione ulteriore:

$$Z'\,(0,\lambda) = -\lambda \qquad [1'']$$

nel qual caso la [2] diventa semplicemente:

$$K\,(\lambda) = Z\,(0,\lambda)\ . \qquad [2'']$$

Il problema consiste nel determinare il rapporto:

$$\sigma'(z)/\sigma(z)\ ,$$

in maniera tale che la soluzione del sistema [1] e [1'] soddisfi anche la relazione [2] (l'apice in alto a destra della σ, è indice di derivazione).

Il Langer risolse questo problema (così formulato), nell'ipotesi che:

1) la funzione $K(\lambda)$ ammetta uno sviluppo in potenze inverse di λ,

2) il rapporto (σ'/σ) sia una funzione analitica di r (almeno in prossimità di $z = 0$).

Gli svantaggi che presenta il metodo originale del Langer sono stati da noi ampiamente discussi e rimossi in [2]. Causa tali svantaggi L. B. Slichter si limitò prima ad esporre casistiche (1), in cui l'equazione [1] ammette soluzioni in forma semplice.

Da ogni posizione assunta si ricava immediatamente però tutta una « famiglia di conduttività » per cui il problema è risolubile semiempiricamente, e non del tutto generalmente, nella seguente maniera: supposta nota la funzione $Z(z,\lambda)$, in corrispondenza ad una certa conduttività $\sigma(z)$, si trae dalle [1] e [1'], che alla $\sigma(z+c)$ corrisponderà la $Z(z+c,\lambda)$; il corrispondente valore $K(\lambda)$ sarà pertanto dato per la [2] da:

$$K(\lambda) = -\frac{\lambda Z(c,\lambda)}{Z'(c,\lambda)} \cdot \qquad [3]$$

In secondo luogo si può rilevare che da ogni famiglia di curve è ottenibile la famiglia inversa, è possibile cioè dimostrare che se:

$$\sigma_1(z) \cdot \sigma_2(z) = \text{cost} , \qquad [4]$$

anche il prodotto delle due funzioni K:

$$K_1(\lambda)\, K_2(\lambda) = 1 . \qquad [5]$$

Infatti la [4] implica (derivando $\log \sigma_1 + \log \sigma_2 = \text{cost}$) che:

$$\frac{\sigma_1'}{\sigma_1} + \frac{\sigma_2'}{\sigma_2} = 0 . \qquad [6]$$

La [1] d'altra parte dà:

$$\frac{d^2 Z^{(1)}}{d z^2} + \frac{\sigma_1'}{\sigma_1}\frac{d Z^{(1)}}{d z} + \lambda^2 Z^{(1)} = 0 \; ; \quad \frac{d^2 Z^{(2)}}{d z^2} + \frac{\sigma_2'}{\sigma_2}\frac{d Z^{(2)}}{d z} - \lambda^2 Z^{(2)} = 0 . \qquad [7]$$

Moltiplicando la prima delle [7] per $\frac{d Z^{(2)}}{d z}$, la seconda per $\frac{d Z^{(1)}}{d z}$, quindi sommando e integrando tra (0 e ∞), tenendo conto della [6], si ottiene:

$$\int_0^\infty \left(\frac{d^2 Z^{(1)}}{d z^2}\frac{d Z^{(1)}}{d z} + \frac{d^2 Z^{(2)}}{d z^2}\frac{d Z^{(2)}}{d z}\right) d z - \lambda^2 \int_0^\infty \left(\frac{d Z^{(2)}}{d z} Z^{(1)} + \frac{d Z^{(1)}}{d z} Z^{(2)}\right) dz = 0 ,$$

ovvero:

$$\left| \frac{d Z^{(1)}}{d z} \cdot \frac{d Z^{(2)}}{d z} \right|_0^\infty - \lambda^2 \left| Z^{(1)} Z^{(2)} \right|_0^\infty = 0 \,, \tag{8}$$

da cui tenendo presenta la [1']:

$$Z^{(1)\prime} (0, \lambda) \, Z^{(2)\prime} (0, \lambda) = \lambda^2 \, Z^{(1)} (0, \lambda) \, Z^{(2)} (0, \lambda) \,,$$

la quale, in base alla definizione di $K_1(\lambda)$ e $K_2(\lambda)$, coincide con la [5]. In questa maniera si può ottenere — da ogni famiglia di conduttività — anche quella inversa, e la casistica ovviamente possiamo estenderla, coprendo una quantità di casi possibili nella prospezione geoelettrica.

I) Esaminiamo pertanto le funzioni Z che coinvolgono quelle di Bessel (le notazioni per le funzioni di Bessel sono quelle adottate da Watson). Con il cambiamento di variabile:

$$Z = \sigma^{-1/2} \cdot u$$

la [1] si trasforma in:

$$\frac{d^2 u}{d z^2} - \left[1 + \frac{1}{4 \lambda^2} \left\{ 2 \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right) + \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)^2 \right\} \right] u = 0 \,, \tag{9}$$

un'equazione che ammette soluzioni che si esprimono mediante funzioni di Bessel: introducendo il parametro Besseliano ν, si ha:

$$2 \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right) + \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)^2 = \frac{(4 \nu^2 - 1)}{Z} \,.$$

Tale equazione allora ha come soluzione generale (il che si può verificare immediatamente per sostituzione):

$$\sigma = B \, e^{(1-2\nu)} \cdot (1 + A \, Z^{2\nu})^2 \,. \tag{10}$$

In questa la soluzione della [9], che soddisfa la condizione all'infinito, è data dalla:

$$u = z^{1/2} \cdot K_\nu (\lambda z) \,, \quad \text{da cui si ottiene per la } Z = u \cdot \sigma^{-1/2} \,;$$

$$Z_1 (z, \lambda) = c \left[\frac{Z^\nu \, K_\nu (\lambda z)}{1 + A \, Z^{2\nu}} \right] . \tag{11}$$

Si ha quindi che per una conduttività del tipo:

$$\sigma = B \, (z + c)^{1-2\nu} \,, \; [1 + A \, (z + c)^{2\nu}] \,, \tag{12}$$

la $K(\lambda)$ è data dalla formula:

$$[K(\lambda)]^{-1} = \frac{K_{\nu-1}(\lambda c)}{K_\nu(\lambda c)} + \frac{2\nu}{\lambda_c} \cdot \frac{A c^{2\nu}}{1 + A c^{2\nu}} , \qquad [13]$$

che deriva appunto sostituendo la [11] nella [3] (non riportiamo i grafici relativi, per brevità e concisione).

Si osservi che nelle [12] e [13] sono disponibili 3 parametri, i quali si possono abbastanza bene adattare per adeguarsi alle curve sperimentali (speciali nomogrammi permettono la variazione relativa di tali parametri).

Si dispone così di un certo numero di curve per ν semiinteri, nel qual caso le K_ν sono esprimibili mediante funzioni elementari (esponenziali e polinomi in λ^{-1}).

II) Caso funzione esponenziale: esso è il più elementare e già esaminato; infatti per σ della forma $\sigma = \sigma_0\, e^{2bz}$, l'equazione [1] passa a coefficienti costanti e si scrive: $z'' + 2\,bz' - \lambda^2 = 0$, la cui soluzione che si annulla all'infinito, è data da:

$$Z = exp\{-b[1 + \sqrt{1 + (\lambda/b)^2}]\} \cdot$$

Pertanto si ha per $K(\lambda)$:

$$K(\lambda) = \frac{b}{\lambda}[\sqrt{1 + (\lambda/b)} - 1] \cdot$$

III) Caso di funzioni iperboliche (integra i precedenti).

Qualora la conduttività σ assuma la forma:

a) $\sigma = A\, ch^2\, \omega\, (z + c)$ b) $\sigma = A\, sh^2\, \omega\, (z + c)$,

saranno anche note le soluzioni della [1]. Quelle che soddisfano la [1] sono date rispettivamente dalle:

a) $Z = exp\, \dfrac{[-z\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}]}{sh\, \dot\omega\, (z + c)}$ b) $Z = exp\, \dfrac{[-z\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}]}{ch\, \dot\omega\, (z + c)}$

da cui si ricava per le funzioni $K(\lambda)$:

a) $K(\lambda) = \dfrac{\lambda}{(\sqrt{\lambda^2 + \omega^2} + \dot\omega\, ch\omega c)}$; b) $K(\lambda) = \dfrac{\lambda}{(\sqrt{\lambda^2 + \omega^2} + \dot\omega\, th\omega c)}$.

Le posizioni I, II, III danno molteplici e varie curve per $K(\lambda)$, per cui è possibile determinare direttamente le corrispondenti σ. In più, come è stato suesposto, si possono aggiungere tutte le curve inverse derivabili (casistiche analitiche e grafiche del genere aiutano in modo razionale l'interpretazione).

I casi I, II, III, esauriscono quelli semplici, un breve elenco che si può però incrementare, come abbiamo mostrato altrove (1).

Una particolare utile estensione, è per il « terreno stratificato », in ogni strato del quale vale una formula sufficientemente semplice per σ'/σ. Nel passaggio da uno strato all'altro valgono allora le condizioni di continuità date dalle:

$$Z_i = Z_{i+1} \;, \qquad \sigma_i Z_i = \sigma_{i+1} Z_{i+1} \;. \tag{14}$$

Riferiamoci a questo punto ad un terreno composto da n strati orizzontali indefiniti sovrapposti, e si indichi con $\sigma_i(z)$ la funzione rappresentante la conduttività dell'*iesimo* strato, con $\sigma_{n+1}(z)$ indicante quella del suolo sottostante (basale); sia inoltre h_i la profondità a cui perviene l'*iesimo* strato (profondità dell'imbasamento).

Indichiamo le soluzioni della [1], per l'*iesimo* strato con:

$$x_i = Z_{i,1}(z, \lambda) \;, \qquad y_i = Z_{i,2}(z, \lambda) \;.$$

In base alla nostra convenzione, x_i rappresenta quella soluzione che per $Z \to \infty$ si annulla.

La soluzione relativa all'*iesimo* strato sarà quindi rappresentabile da:

$$Z_i = A_i x_i + B_i y_i \;,$$

mentre nel suolo sottostante si avrà (per la condizione all'∞):

$$Z_{n+1} = A_{n+1} \cdot x_{n+1} \;.$$

Può convenire impiegare la Z_1 normalizzata, come abbiamo posto nella [1''], e si ottiene:

$$A_1 x_1'(0) + B_1 y_1'(0) = -\lambda \;. \tag{15}$$

Le condizioni di continuità risultano:

$$\begin{cases} A_i x_i(h_i) + B_i y_i(h_i) - A_{i+1} x_{i+1}(h_i) - B_{i+1} y_{i+1}(h_i) = 0 \;, \\ A_i \sigma_i(h_i) x_i'(h_i) + B_i \sigma_i(h_i) y_i'(h_i) - A_{i+1} \sigma_{i+1}(h_i) x_{i+1}(h_i) - \\ \quad - B_{i+1} \sigma_{i+1}(h_i) y_{i+1}'(h_i) = 0 \;. \\ (i = 1, 2, \ldots n-1) \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} A_n\, x_n\,(h_n) + B_n\, y_n\,(h_n) - A_{n+1}\, x_{n+1}\,(h_n) = 0 \\ A_n\, \sigma_n\,(h_n)\, x'_n\,(h_n) + B_n\, \sigma_n\,(h_n)\, y'_n\,(h_n) - A_{n+1}\, \sigma_{n+1}\,(h_n)\, x'_{n+1}\,(h_n) = 0\ . \end{cases} \qquad [16']$$

Le [15], [16] e [16'], formano un sistema di $(2\,n + 1)$ equazioni in $(2\,n + 1)$ incognite: A_i (con $i = 1, \ldots n + 1$) e B_i (con $i = 1 \ldots n$).

Determinate le A_i, e B_i, da questo sistema si ottiene per la $K(\lambda)$ (v. [3]):

$$K(\lambda) = A_1\, x_1\,(0) + B_1\, y_1\,(0)\ . \qquad [17]$$

Limitandoci ad un solo strato ($n = 1$), posto:

$$h_1 = h\ , \qquad \frac{\sigma_{i+1}\,(h)}{\sigma_i\,(h)} = r_i\ , \qquad [18]$$

risolvendo il sistema delle 4 equazioni ed applicando la [17], si perviene, alla:

$$K(\lambda) = -\lambda\,\frac{C\, x_1\,(0) - D\, y_1\,(0)}{C\, x'_1\,(0) - D\, y'_1\,(0)}\,, \qquad [19]$$

con le funzioni:

$$C = x_2\,(h)\, y'_1\,(h) - r\, y_1\,(h)\, y'_2\,(h)\ : \quad D = x_2\,(h)\, x'_1\,(h) - r\, x_1\,(h)\, x'_2\,(h)\ .$$

La [19] si può applicare successivamente ad una serie numerosa di casi particolari (tutti questi casi, appariranno, con i precedenti grafici, in apposito Volume).

α) $\qquad \sigma_1 = \sigma\,(z + c)\ , \quad z < h\ ; \quad \sigma_2 = \sigma\,(h + c)\ , \quad z > 0\ .$

La linearità rientra nell'assunzione (I), con $A = 0$ e $\nu = 0$, per cui si ha:

$$x_1 = K_o\,[\lambda\,(z + c)]\ , \quad y_1 = I_o\,[\lambda\,(z + c)]\ ,$$

mentre ovviamente, essendo σ_2 costante, si ottiene (caso II: $b = (0)$):

$$x_2 = e^{-\lambda z}\ .$$

Inoltre essendo $\sigma\,(z)$ funzione continua in $x = h$, si ha:

$$r = 1\ .$$

Tenendo conto che: $K'_o = -K_1$ e $I'_o = I_1$, la [19] diventa:

$$K(\lambda) = \frac{K_o(\lambda c)\{I_o[\lambda\,(h+c)] + I_1[\lambda(h+c)]\} + I_o(\lambda c)\{K_1[\lambda(h+c)] - K_o[\lambda(h+c)]\}}{K_1(\lambda c)\{I_o[\lambda(h+c)] + I_1[\lambda(h+c)]\} - I_1(\lambda c)\{K_1[\lambda(h+c)] - K_o[\lambda(h+c)]\}}\,.$$

β) $\sigma_1 = c\,(z + c)$, $z < h$; $\sigma_2 = \infty$, $z > h$,

(questo caso differisce dal precedente in quanto ora $r = \infty$) e analogamente si ottiene:

$$K\,(\lambda) = \frac{K_0\,(\lambda\,c)\,I_0[\lambda\,(h + c)] - I_0\,(\lambda\,c)\,K_0[\lambda\,(h + c)]}{K_1\,(\lambda\,c)\,I_0[\lambda\,(h + c)] + I_1\,(\lambda\,c)\,K_0[\lambda\,(h + c)]} .$$

γ) $\sigma_1 = \sigma\,(z + c)$, $z < h$; $\sigma_2 = 0$, $z > 0$.

Qui differiamo dal precedente assunto solo per il fatto che ora $r = 0$; dalla [19] otteniamo allora:

$$K\,(\lambda) = \frac{K_0\,(\lambda\,c)\,I_1\,[\lambda\,(h + c) + I_0\,(\lambda\,c)\,K_1\,[\lambda\,(h + c)]}{K_1\,(\lambda\,c)\,I_1\,[\lambda\,(h + c) - I_1\,(\lambda\,c)\,K_1\,[\lambda\,(h + c)]} .$$

δ) $\sigma_1 = a_1\,(z + c_1)$, $z < h$; $\sigma_2 = a_2\,(z + c_2)$, $z > 0$,

con: $a_1\,(h + c_1) = a_2\,(h + c_2)$.

Anzitutto dalla condizione soprascritta consegue che $r = 1$; x_1 e y_1 hanno la stessa espressione dei casi precedenti ($c = c_1$), mentre evidentemente $x_2 = K_0\,[\lambda\,(z + c_2)]$.

Sostituendo questa espressione nella [19], perveniamo alla:

$$K(\lambda) = \frac{K_0(b_0)[I_1(b_1)K_0(b_2) + I_0(b_1)K_1(b_2)] + I_0(b_2)[K_0(b_2)K_1(b_1) - K_0(b_1)K_1(b_2)]}{K_1(b_0)[I_1(b_1)K_0(b_2) + I_0(b_1)K_1(b_2)] - I_1(b_0)[K_0(b_2)K_1(b_1) - K_0(b_1)K_1(b_2)]} ,$$

con: $b_0 = \lambda c_1$; $b_1 = \lambda\,(h + c_1)$; $b_2 = \lambda\,(h + c_2)$.

Nella situazione di « strati omogenei », il sistema [15] e [16] si semplifica: tenendo conto che,

$$x_1 = e^{-\lambda z} , \qquad y_1 = e^{\lambda z}$$

la $K\,(\lambda) = (A_1 + B_1)$,

assume la forma:

$$K\,(\lambda) = (1 + 2\,B_1)$$

ricorrendo alla [15] (che ora diviene $A_1 - B_1 = 1$): basterà quindi calcolare la B_1 .

Per il numero di strati $n = 2$ si ritrovano le formule esplicite e ben note di Hummel-Stefanescu-Ollendorf (di difficile applicazione per $n > 2$).

Questo metodo, come s'è visto brevemente, consiste nel determinare la $K(\lambda)$ dai dati sperimentali, e di confrontarla con qualcuna delle curve (v. ALBUM) previamente calcolate, o agevolmente adattabili.

È immediata pure l'esemplificazione per tre conduttività diverse, anche se non differiscono molto tra di loro, o per più di tre, per illustrare l'influenza della conduttività sull'andamento della $K(\lambda)$ e della $V(r)$.

Riferiamoci infine ad un suolo in cui la conduttività, oltre a dipendere dalla sola profondità Z, presenta unicamente simmetria intorno all'asse z. In altre parole l'ellissoide di conduttività ha un asse verticale, e gli altri due uguali tra di loro.

Indichiamo allora con $\sigma_z(z)$ la conduttività verticale,e con $\sigma_\varrho(z)$ la conduttività orizzontale, il «*rapporto di anisotropia*» risulterà:

$$\varrho(z) = \sqrt{\frac{\sigma_\varrho(z)}{\sigma_z(z)}}\,, \quad (\text{« \textit{indice anisotropico} »})\,.$$

Il problema della determinazione del «potenziale» si riduce qui al ritrovamento d'una funzione $\varphi(z, \varrho)$ (ϱ = distanza dall'asse z), che soddisfa alla seguente equazione differenziale:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{\sigma_z} \cdot \frac{d\sigma_z}{dz} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - q^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \right) = 0\,, \qquad [20]$$

con le seguenti condizioni al contorno:

$$\left\{ \begin{array}{l} z = 0\,, \quad \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = 0\,, \quad \varphi \simeq - \dfrac{c}{2\pi\varrho\sqrt{\sigma_\varrho(0)\,\sigma_z(0)}}\,, \quad \text{per } \varrho \to 0\,; \\ z \to \infty\,, \quad \text{oppure} \quad \varrho \to \infty\,, \quad \varphi \to 0\,. \end{array} \right. \qquad [21]$$

Si dimostra, è ben noto, che con un cambiamento di variabile z in una nuova variabile w, il problema si trasforma in quello isotropico:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^2} + \frac{1}{u} \frac{du}{dw} \frac{\partial \varphi}{\partial w} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = 0$$

dove:

$$\left\{ \begin{array}{l} w = 0\,, \quad \dfrac{\partial \varphi}{\partial w} = 0\,, \quad \varphi \simeq - \dfrac{c}{\varrho \cdot 2\pi w(0)}\,, \quad \text{per } \varrho \to 0\,, \\ w = \infty\,, \quad \text{oppure} \quad \varrho - 0\,, \quad \varphi = 0\,. \end{array} \right. \qquad [21']$$

Determineremo ora le nuove variabili $w(z)$, e $u(w)$ (conduttività equivalente) che trasformano l'equazione iniziale in queste ultime.

Si ha infatti:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial w} \cdot \frac{d w}{d z} \; ; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^2} \left(\frac{d w}{d z}\right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial w} \frac{d^2 w}{d z^2} \, .$$

Sostituendo questi valori nell'equazione di partenza [20] e dividendo per $\left(\frac{d w}{d z}\right)^2$, si ottiene:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^2} + \left[\frac{\frac{d^2 w}{d z^2}}{\left(\frac{d w}{d z}\right)^2} + \frac{1}{\sigma_z} \frac{d \sigma_z}{d w}\right] \frac{\partial \varphi}{\partial w} + \frac{q^2}{\left(\frac{d w}{d z}\right)^2} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}\right] = 0 \, . \qquad [22]$$

Per far coincidere la [22] con la [20], è sufficiente che si abbia:

$$q = \frac{d w}{d z} \, , \qquad [23]$$

$$\left[\frac{\frac{d^2 w}{d z^2}}{\left(\frac{dw}{d z}\right)^2}\right] + \frac{1}{\sigma_z} \frac{d \sigma_z}{d w} = \frac{1}{u} \frac{d u}{d w} \, , \qquad [24]$$

e inoltre per far coincidere la [21] con la [21′] basta richiedere:

$$w = 0 \quad \text{per} \quad z = 0 \; ; \qquad [25]$$

$$w\,(0) = \sqrt{\sigma_z\,(0)\, \sigma_\varrho\,(0)} = \sigma_z\,(0)\, q\,(0) \, . \qquad [26]$$

Dalla [23] e [25] si trae immediatamente:

$$w\,(z) = \int_0^z q\,(z)\, d z \, .$$

Inoltre dalla [23] si ha:

$$\left[\frac{\frac{d^2 w}{d z^2}}{\left(\frac{d w}{d z}\right)^2}\right] = \frac{\frac{d q}{d z}}{q^2} = q^{-2} \frac{d q}{d z} \, ,$$

che insieme con la:

$$\frac{d q}{d z} = \frac{d q}{d w} \cdot \frac{d w}{d z} = \frac{d q}{d w} \cdot q \, ,$$

dà:

$$\frac{\frac{d^2 w}{d z^2}}{\left(\frac{d w}{d z}\right)^2} = q^{-1} \frac{d q}{d w} \, .$$

Pertanto la [25] si può scrivere:

$$q^{-1}\,\frac{d\,q}{d\,w} + \sigma_2^{-1}\,\frac{d\,\sigma_2}{d\,w} = u^{-1}\cdot\frac{d\,u}{d\,w}\,,$$

la quale integrata dà:

$$\lg\, q + \lg\, \sigma_2 = \lg\, u + \cos\, f\,, \quad \text{oppure } w = A\, q\, \sigma_z\,.$$

Da quest'ultima, tenuto conto della [26], si ottiene $A = 0$ e quindi:

$$u = q\,\sigma_z = \sqrt{\sigma_\varrho\,\sigma_z}\,.$$

Si ha dunque, come risultato, che per risolvere il problema anisotropico basta, invece della profondità, introdurre una nuova variabile:

$$w = \int_0^z \varrho\,(z)\, d\,z\,,$$

e risolvendo il problema con una « conduttività isotropica » u:

$$u = q\,\sigma_z = \sqrt{\sigma_\varrho\,\sigma_z}\,.$$

Si vede che il problema inverso non è univocamente determinabile, potendosi solo ricavare la $u = \sqrt{\sigma_\varrho\,\sigma_z}$, in funzione di w.

Sarebbe necessaria, perciò, qualche ulteriore conoscenza per ricavare la w in funzione di z, e, di conseguenza la $q = \frac{d\,w}{d\,z}$.

Considerando infatti la q come una funzione nota di σ_z, allora la relazione:

$$u\,(w) = f\,(\sigma_z)\cdot\sigma_z\,,$$

permette — essendo nota la $u\,(w)$ — di determinare la σ_z in funzione di w, e di conseguenza anche $q = \frac{d\,w}{d\,z}$.

Ponendo la funzione $q = F\,(w)$, mercè la [23] si può determinare Z in funzione di w. Si ha infatti:

$$Z = \int_0^w \frac{d\,w}{F\,(w)}\,,$$

da cui poi si ricava w in funzione di z, c.d.d.

BIBLIOGRAFIA

(1) LANGER R. E., *An inverse Problem in Differential Equation.* « Bulletin of American Mathematical Society », (1939).

(2) SLICHTER L. B., *The interpretation of the Resistivity Prospecting Method for Horizontal Structures.* « Physics », Sept. 1933.

(3) CHETAEV A. L., *On the solution of the inverse problem of the theory of electromagnetic soundings.* Ac. Sc. U.R.S.S. 1959, « Izvestiya ». 12, (1958).

(4) BELLUIGI A·, *Berechnung der elektrischen Leitfähigkeit des Bodens bei bekannter Verteilung des oberflächtenpotentials.* « Gerlands Beiträge Geoph » 3, (1965).

(5) BELLUIGI A., *Die Methode Stevenson zur Ermittlung der elektrischen Leitfähigkeit aus der Potentialverteilung auf der Begrenzungsebene eines Halbraumes.* « Gerlands Beiträge zur Geoph », 1956.

(6) BELLUIGI A., *Über ein geoelektrischen inverses Problem.* « Zeit. für Geophysik », 1956.

(7) BELLUIGI A., *Neue Theorie für elektrische Sondierungen.* « Zeit für Geophysik », H, 3, 1959.